

|     |     |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [20점] 다음과 같이 정의된 함수  $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin^2 x + x \sin^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (5점) 함수  $f$ 가 연속인 점을 모두 구하시오.
- (b) (5점)  $D_1 f(0, 0)$ 와  $D_2 f(0, 0)$ 를 구하시오.
- (c) (10점) 원점에서  $f$ 의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [15점] 다음 함수의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점과 안장점으로 분류하시오.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

문제 3. [20점] 공간상의 점  $(x, y, z)$ 에서 온도  $T$ 는 다음과 같은 함수로 주어진다.

$$T(x, y, z) = 100e^{-x^2 - xy - z^3 + 2}$$

- (a) (10점)  $(1, 0, 1)$ 에서  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$  방향으로의 온도 변화율을 구하시오.
- (b) (10점)  $(1, 0, 1)$ 에서 온도가 가장 빠르게 증가하는 방향을 구하고, 그 때의 온도 변화율을 구하시오.

문제 4. [15점] 함수  $f(x, y) = \cos x \sin(x + y)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서 함수  $f$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (10점) (a)의 결과를 이용하여  $\cos 0.02 \sin 0.01$ 의 3차 근사값을 구하고, 오차가  $6 \times 10^{-7}$  이하임을 보이시오.

문제 5. [15점] 점  $(0, 0, 1)$  에서 곡면  $z = 2x^2 + 3y^2$  에 이르는 최단거리를 라그랑주 승수법을 사용하여 구하시오.

문제 6. [15점] 벡터함수  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  와  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  가 다음과 같이 주어질때  $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  에 대하여  $\mathbf{H}'(1, 0)$  를 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y) = (xe^y, x^2e^{-y}, \sin(xy))$$

$$\mathbf{G}(u, v, w) = (uv^4, 2u^3w + 3w^2)$$

문제 7. [20점] 삼차원 공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos(x+z) + z \cosh x, \sin(x+z) + \sinh y, y \cos(x+z) + \sinh x)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\mathbf{F}$  의 잠재함수가 존재하면 모두 구하시오.

(b) (10점) 곡선  $\mathbf{X}$  가 다음과 같이 주어질 때 선적분  $\int_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  를 구하시오.

$$\mathbf{X}(t) = (1 - \cos t, t - \sin t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

문제 8. [15점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\mathbf{X}} (x + 2y)dx + x^2dy$$

이때,  $\mathbf{X}$  는 점  $(2, 0)$  에서 점  $(0, 2)$  까지의 원  $x^2 + y^2 = 4$  의 짧은 호와 점  $(0, 2)$  에서 점  $(4, 3)$  까지의 선분으로 구성된다.

문제 9. [15점] 공간에서 곡선

$$C : \mathbf{X}(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos \pi t, t - \sin \pi t \right) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

을 따라 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{1+x^2y^2} \mathbf{i} + \left( \frac{x}{1+x^2y^2} - yz \right) \mathbf{j} + 2y^2 \mathbf{k}$$

가 한 일을 구하시오.