문제 1. [20점] 다음과 같이 정의된 함수 f에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^2 x + x\sin^2 y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) (5점) 함수 f가 연속인 점을 모두 구하시오.

(b) (5점) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$를 구하시오.

(c) (10점) 원점에서 f의 미분가능성을 판단하시오.

(a) f는 $(x,y)\neq(0,0)$ 에서는 연속함수들의 곱셈, 덧셈으로 이루어져 있어서 연속이다. +1

$$\lim_{x,y\to 0}\left|\frac{y\sin^2 x + x\sin^2 y}{x^2+y^2}\right| = \lim_{x,y\to 0}\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}\frac{\sin^2 y}{y^2}\right|$$

$$\le \lim_{x,y\to 0}\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| + \lim_{x,y\to 0}\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\frac{\sin^2 y}{y^2}\right|$$

$x^2+y^2 \geq 2|xy|$ when $xy\neq 0$

(if $xy=0$, above line is already 0)

$$\le \lim_{x,y\to 0}\left|\frac{x^2 y}{2xy}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| + \lim_{x,y\to 0}\left|\frac{xy^2}{2xy}\frac{\sin^2 y}{y^2}\right|$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f는 $(0,0)$에서 연속 +4

(b)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad ✓ +2$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad ✓ +3$$

(c) $D_{(1,1)} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h \sin^2 h}{h^3}$$

$$= 1$$

$$\neq \underbrace{D_{(1,0)} f(0) + D_{(0,1)} f(0)}_{0}$$

따라서 f는 원점에서 미분 불가능!

(f가 점 P 에서 미분가능하면, $D_{v+w} f(P) = D_v f(P) + D_w f(P)$) ✓ +10

- 미분가능하다고 적은 경우 0점
- 사소한 계산실수, 그러나 과정과 정답이 맞으면 5점

2.

$\mathrm{grad} f(x,y) = (3x^2+6x, 3y^2-6y)$

임계점은 $(0,0)$ $(-2,0)$, $(0,2)$, $(-2,2)$ 이다. +3

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$ 헤세 판정법에 의해

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$ 안장 ($\det f''(0,0) < 0$) +3

$$f''(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$ 양행렬 → 극소 +3

$$f''(-2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$ 음행렬 → 극대. +3

$$f''(-2,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$ $\det f''(-2,2) < 0$ 안장. +3

극소, 극대, 안장 판정시 근거가 없으면 해당 점수 없음.

임계점은 모든 점이 맞아야 +3

3. (a)

$$\mathrm{grad}\,T(x,y,z) = (-2x-y,\ -x,\ -3z^2)100e^{-x^2-xy-z^3+2}.$$

T가 미분가능 함수이므로

$$D_v T(1,0,1) = \mathrm{grad}\,T(1,0,1)\cdot(1,1,1)$$

$$= (-200, -100, -300)\cdot(1,1,1) = -600$$ +10.

단위벡터로 구한경우 과정 맞으면 8점.

계산실수 : 최대 5점.

(b) $\mathrm{grad}\,T(1,0,1) = (-200, -100, -300)$ 이므로

가장 빠르게 증가하는 방향은 $-\frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3)$ 이다. $=: v$ +5

이때 온도 변화율은.

$$\mathrm{grad}\,T(1,0,1)\cdot v = 100\sqrt{14}.$$ +5

반대방향으로 한경우 온도 변화율까지 맞아야 5점.

계산실수 : 최대 5점.

2022학년도 여름학기 수학 2 중간고사 문제 4,5,6 모범답안 및 채점기준

[문제 4]

(a) 일변수 함수에서의 테일러 전개로부터,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)$$
$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + o\big((x+y)^3\big)$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\cos x \sin(x+y) \\
&\quad = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\right)\left((x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + o\big((x+y)^3\big)\right) \\
&\quad = x + y - \frac{2}{3}x^3 - x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + o\big((x^2+y^2)^{3/2}\big)
\end{aligned}$$

이므로 근사다항식의 유일성에 의해

$$T_3 f(x,y) = x + y - \frac{2}{3}x^3 - x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3$$

임을 안다.

[채점기준]

1. 근사다항식의 유일성을 이용한 풀이의 경우 부분점수 없음
2. 근사다항식 공식을 적고, 고계 방향미분계수를 구했지만 답이 틀린 경우 3점

(b) $\cos 0.02 \sin 0.01$ 의 3차 근삿값은

$$T_3 f(0.02, -0.01) = 0.01 - \frac{2 \cdot 0.02^3}{3} + 0.02^2 \cdot 0.01 - \frac{0.02 \cdot 0.01^2}{2} + \frac{0.01^3}{6}$$

이다. 한편 함수 f 의 4계 편도함수의 절댓값의 상계를 구하면

$$M_4 = \max\left\{ |D_i D_j D_k D_l f(0.02t, -0.01t)| : 1 \leq i, j, k, l \leq 2,\ t \in [0,1] \right\} < 16$$

이고 따라서

$$|R_3(0.02, -0.01)| \leq \frac{M_4}{4!}(0.02 + 0.01)^4 < \frac{16}{24} \times 0.03^4 < 6 \times 10^{-7}$$

을 얻는다.

[채점기준]

1. 3차 근삿값을 구하면 2점
2. 오차 계산 공식과 M_4 를 정확히 적으면 4점
3. M_4 의 상계를 구하면 4점

[**문제 5**] 거리 함수의 제곱을

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

제약 조건을

$$g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z$$

라 두자.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z-2), \qquad \operatorname{grad} g(x,y,z) = (4x, 6y, -1)$$

이므로 라그랑주 승수법에 의해 다음 방정식의 해집합은 함수 f 를 등위면 $g^{-1}(0)$ 으로 제한한 함수 $f|_{g^{-1}(0)}$ 의 극점을 포함한다.

$$\begin{cases} (2x, 2y, 2z-2) = \lambda(4x, 6y, -1) \\ z = 2x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

이 연립방정식의 해를 구하면,

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4} \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = 0 \\ y = \pm\frac{\sqrt{10}}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

을 얻고, 따라서 함수 $\sqrt{f}$ 를 곡면 $z = 2x^2 + 3y^2$ 에 제한한 함수의 최솟값

$$\sqrt{f\left(0, \pm\frac{\sqrt{10}}{6}, \frac{5}{6}\right)} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

이 곡면 $z = 2x^2 + 3y^2$ 와 점 $(0,0,1)$ 사이의 거리이다.

[**채점기준**]

1. 라그랑주 승수법을 이용하여 방정식을 세우면 5점
2. 임계점을 모두 찾으면 5점
3. 답 5점 (임계점을 하나라도 빠뜨린 경우 점수 없음, 단 임계점에서 부호를 빠뜨린 경우 전체 점수에서 5점 감점)

[문제 6] 두 함수에 대한 야코비 행렬을 각각 구하면,

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2xe^{-y} & -x^2e^{-y} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$G'(u,v,w) = \begin{pmatrix} v^4 & 4uv^3 & 0 \\ 6u^2w & 0 & 2u^3+6w \end{pmatrix}$$

이므로 연쇄법칙에 의해

$$\begin{aligned} (G\circ F)'(1,0) &= G'(1,1,0)F'(1,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다.

[채점기준]

1. 두 벡터함수의 야코비 행렬을 구하면 5점
2. 연쇄법칙을 안다고 판단될 경우 5점
3. 답을 구하면 5점

7. **[모범답안]**

(a) $\phi = y\sin(x+z) + z\sinh x + \cosh y$ 라고 할 때 $\operatorname{grad}\phi = \mathbf{F}$ 이다. 삼차원 공간은 곡선연결공간이므로 잠재함수의 유일성에 의해 $\mathbf{F}$ 의 모든 잠재함수는 $\phi + C$(C 는 상수)로 표현가능하다.

(b) 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbf{X}} \operatorname{grad}\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \phi(\mathbf{X}(2\pi)) - \phi(\mathbf{X}(0)) = \cosh(2\pi) - 1.$$

[채점기준]

(a) 적분상수를 명시하지 않으면 5점만 부여.

(b) 선적분의 기본정리를 잘 활용하면 부분점수 5점.

8. **[모범답안]**

$\mathbf{X}$를 $\mathbf{X}_1(t) = (2\cos t, 2\sin t)(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$와 $\mathbf{X}_2(t) = (4t, 2+t)(0 \le t \le 1)$로 나누자. 그러면 주어진 적분 또한 두 부분으로 나뉜다. 첫번째 부분은 $\int_{\mathbf{X}_1}(x+2y)dx+x^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+4\sin t)(-2\sin t)+(2\cos t)^2(2\cos t)dt$
$= \frac{10}{3} - 2\pi$

으로 구할 수 있으며, 두번째 부분은

$\int_{\mathbf{X}_2}(x+2y)dx + x^2dy = \int_0^1(4+6t)\cdot 4 + (4t)^2dt = \frac{100}{3}$

으로 구할 수 있다. 따라서 주어진 적분은 둘을 합한 $\frac{110}{3} - 2\pi$이다.

[채점기준]

두 적분 중 하나만 올바르게 계산하면 5점만 부여.

9. **[모범답안]**

$\mathbf{F}_1 = (\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}, 0)$, $\mathbf{F}_2 = (0, -yz, 2y^2)$ 으로 놓자.

$\int_C \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C \mathrm{grad}(\arctan(xy)) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \left[\arctan\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\cos\pi t\right)\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$

$\int_C \mathbf{F}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}_2(C(t)) \cdot C'(t)dt$

$= \int_0^1 (0, -\cos\pi t(t-\sin\pi t), 2\cos^2\pi t)\cdot(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}, -\pi\sin\pi t, 1-\pi\cos\pi t)dt$

$= \int_0^1 \pi\sin\pi t\cos\pi t(t-\sin\pi t) + 2\cos^2\pi t(1-\pi\cos\pi t)dt$

$= \int_0^\pi \sin t\cos t(\frac{t}{\pi} - \sin t) + 2\cos^2 t(\frac{1}{\pi} - \cos t)dt$

$= \int_0^\pi \frac{t}{\pi}\sin t\cos t - \sin^2 t\cos t + \frac{2}{\pi}\cos^2 t - 2\cos^3 t dt$

$= \int_0^\pi \frac{t}{2\pi}\sin 2t + \sin^2 t\cos t - 2\cos t + \frac{1}{\pi}(1+\cos 2t)dt$

$= [-\frac{t}{4\pi}\cos 2t + \frac{1}{8\pi}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t - 2\sin t + \frac{1}{\pi}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)]_0^\pi$

$= \frac{3}{4}$

따라서 주어진 적분은 $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_C \mathbf{F}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{3-\pi}{4}$ 이다.

[채점기준]

두 적분 중 하나만 올바르게 계산하면 5점만 부여.