[(a) 풀이]

원점이 아닌 곳에서는, f가 연속함수의 합과 곱으로 이루어져 있으므로 연속이다.
이제 f가 원점에서 연속인지 판정하자. 산술·기하평균 부등식에 의해

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

이다. 따라서

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x+y|$$

이다.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|x+y| = 0$$

이므로, 조임 정리(샌드위치 정리, 극한의 대소 관계)에 의하여

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

이다. 따라서 f가 원점에서도 연속이다.

별해. f를 극좌표로 나타내면

$$f(r,\theta) = \begin{cases} r\left(\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta\right) & (r \neq 0) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

이다.

$$0 \leq |f(r,\theta)| \leq |r| \cdot 2$$

이고 $\lim_{r\to 0} |r|\cdot 2 = 0$이므로,

$$\lim_{r\to 0}\left(\max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(r,\theta)|\right) = 0$$

이다. 따라서 f가 원점에서 연속이다.

[(a) 채점 기준]

- 답이 맞으면 3점 (단, 근거가 전혀 없으면 0점).
- 답과 증명이 맞으면 5점.

[(a) 채점 기준 세부 사항]

- 부등식에서 분모가 0 인 경우를 충분히 고려하지 않았으면 3점.
- 부등식에서 절댓값이 있어야 할 곳에 없으면 3점.
- 별해에서 θ 각각에 대해
$$\lim_{r\to 0}|f(r,\theta)| = 0$$
이라는 사실만 증명했으면 3점.

[(b) 풀이]

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

[(b) 채점 기준]

- $D_1 f(0,0)$ 또는 $D_2 f(0,0)$ 의 정의가 있으면 3점.
- 답과 증명이 맞으면 5점.

[(b) 채점 기준 세부 사항]

-
$$D_1 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \right),$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) \right)$$

  라고만 쓰여 있으면 0점.

[(c) 풀이]

f 가 원점에서 미분가능하면

$$D_{(1,1)}f(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0)$$

이다.

$$D_{(1,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = 1$$

이고, (b) 에 의해

$$D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0) = 0 + 0 = 0$$

이다. 두 값이 다르므로 f 는 원점에서 미분가능하지 않다.

[(c) 채점 기준]

- 답이 맞으면 3점 (단, 근거가 전혀 없으면 0점).
- 답과 증명이 맞으면 5점.

문제 2.

~~또 풀면~~ $x^2+y^2+z^2=1$은 ~~일급함수~~ $g(x,y,z)=x^2+y^2+z$의 1등위면이다. $\nabla g(P)$는 1-등위면에 수직이다.

$\nabla g(P)$는 주어진 평면의 법선벡터 $(2,1,-3)$과 평행하다.

+5 ①

$P=(a,b,c)$라 놓자.

$\mathrm{grad}\, g(a,b,c) = (2a,2b,1)$

$(2a,2b,1) \parallel (2,1,-3) \Rightarrow \frac{2a}{2} = \frac{2b}{1} = -\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{6}$

점 P는 $g^{-1}(1)$위의 점이므로

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2+c=1 \qquad \therefore c=\frac{31}{36}$

따라서 점 P는 $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{31}{36}\right)$뿐이다. +5 ②

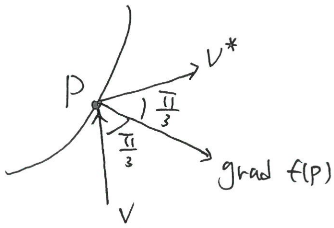
Componentwise, +2 +2 +1

- 올바른 답과 틀린 답을 같이 구한 경우. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{31}{36}\right)$과 가장 비슷한 답에 1점 감점한 점수 부여.
- 등위면에 수직이라는 것만 언급한 경우 ①항목에서 5점 중 +2점 부여.

#3 $D_v f(P) = v \cdot \mathrm{grad}\, f(P)$ 이다. +5

$D_v f(P) < 0$ 이고 v와 v^*가 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

v, v^*, $\mathrm{grad}\, f(P)$는 오른쪽 그림과 같다.



[그림]

- v^*-v 는 $\mathrm{grad}\, f(P)$ 와 방향이 같은 단위벡터가 된다.
- v와 $\mathrm{grad}\, f(P)$가 이루는 각은 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 v^*와 $\mathrm{grad}\, f(P)$가 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$이다.
- $v^*-v = -2\frac{v\cdot n}{n\cdot n}n = -2\frac{|v||n|\cos\frac{2\pi}{3}}{|n|^2}\cdot n = \frac{n}{|n|}$ 이다. +10

따라서 $D_{v^*}f(P) - D_v f(P) = (v^*-v)\cdot \mathrm{grad}\, f(P) = \frac{7}{3}$ 이다. +5

* 마지막 (+5) 에서 [그림]이 잘못되었음에도 논리전개가 올바른 경우 5점 부여.

* $D_v f(P) = \lim_{t\to 0}\frac{f(P+tv)-f(P)}{t}$ 를 이용한 경우 $D_{v^*}f(P)-D_v f(P)$를 올바르게 구한 경우에만 첫 (+5)를 부여함.

4번

$f(x,y) = e^{x^2y}$ 에서 $\text{grad } f(x,y) = e^{x^2y}(2xy, x^2)$ 이고

$\text{grad } f(1,0) = (0,1)$ 이다 ┘+3 $v = (a,b)$ 일때

$D_v f(1,0) = \text{grad } f(1,0) \cdot (a,b) = b$ 이고

$D_v f(1,0)$ 이 최소가 되도록 하는 단위벡터 $v = (0,-1)$ 이다. ┘+3

$D_v^2 f(1,0) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(1,-t) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} e^{-t} = 1$ 이다 ┘+4

$\text{grad } f(x,y)$ 가 틀리면 0점

$v = (0,1)$ 로 잘못 구하고 $D_v^2 f(1,0) = 1$ 이 나온경우 점수 X

5

f 가 이급함수이고 근사 다항식의 유일성에 의해, 원점에서의 2차 근사항식은

$$T_2f(x,y) = f(0,0) + \left(D_1f(0,0)\cdot x + D_2f(0,0)\cdot y\right) + \frac{1}{2!}\left(D_1^2f(0,0)\cdot x^2 + 2D_1D_2f(0,0)\cdot xy + D_2^2f(0,0)\cdot y^2\right)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

이다. 위 식의 두번째, 세번째 식의 계수를 비교하면

$$D_1^2f(0,0) = 1,\quad D_1D_2f(0,0) = D_2D_1f(0,0) = 0,\quad D_2^2f(0,0) = -1$$

이므로, 원점에서 f의 헤세 행렬은

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} D_1^2f(0,0) & D_2D_1f(0,0) \\ D_1D_2f(0,0) & D_2^2f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다.

* 헤세 행렬을 정확히 구하면 +10점 (행렬이 틀렸을 경우 부분점수 없음)

* 함수를 특정하여 (예시: $f(x,y) = 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ 등) 헤세행렬을 계산한 경우에는 +5점만 부여.

* 답만 쓴 경우 0점

* 그 외 부분점수 없음.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = x - 2y + \log\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y) \neq (0,0))$ 의 임계점을 모두 구하고,

각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하라.

sol) $\mathrm{grad}\, f(x,y) = \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2},\ -2 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

이로부터 f의 임계점은 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 로 유일함을 안다. 4점

f의 헤시안 행렬은 $f''(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$. 4점

$\therefore\ f''\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. 2점

$\det f''\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = -9-16 < 0$ 이므로, 헤세 판정법에서

$\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 는 안장점이다. // 5점

헤시안 값과 안장점 판정을 제대로 했을 때의 점수 (5 + 2 점)는

그 위의 과정이 올바른 경우에만 인정.

문제7 (20점) 좌표공간의 구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 위에서 정의된 함수

$$f(x,y,z) = \sqrt{3}x(y+z) - yz$$

의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(proof) 먼저, 구면 $x^2+y^2+z^2=1$은 닫혀있고 유계인 영역이고, f는 그 위에서 연속이므로, 최대값과 최솟값이 존재한다.

$g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$ 라고 하자

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{grad} f(x,y,z) = (\sqrt{3}y+\sqrt{3}z,\ \sqrt{3}x-z,\ \sqrt{3}x-y) \\ \operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \end{cases}$$

+5 (둘 중 하나만 적으면 부분점수 없음)

case1: $\operatorname{grad} g(x,y,z) = 0$ 인 경우,

$(x,y,z)=(0,0,0)$ 이어야 하는데 이 점은 구면 위의 점이 아니므로 고려 대상이 아니다.

case2: $\operatorname{grad} g(x,y,z) \neq 0$ 인 경우, +5

(x,y,z)에서 f가 최대나 최소가 된다면, 라그랑주 승수법에 의해서 $\lambda \in \mathbb{R}$ 가 존재하여 $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ 을 만족한다.

즉,
$$\begin{cases} \sqrt{3}y+\sqrt{3}z = \lambda 2x & \cdots ① \\ \sqrt{3}x - z = \lambda 2y & \cdots ② \\ \sqrt{3}x - y = \lambda 2z & \cdots ③ \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$
을 만족한다.

②−③ 에의해서, $y-z = 2\lambda(y-z)$.

case 2-1: $\lambda = \frac{1}{2}$

① → $\sqrt{3}y+\sqrt{3}z = x$ ✳

② → $\sqrt{3}x - z = y$ ⇝ $\times\sqrt{3}$: $3x - \sqrt{3}z = \sqrt{3}y$. 이를 ✳ 식과 연립하면 $x=0$, $y=-z$.

구면 위의 점이므로, $(x,y,z) = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 이고, 이때 $f(x,y,z) = \frac{1}{2}$.

case 2-2: $y=z$

① → $2\sqrt{3}y = \lambda 2x$ 즉, $\sqrt{3}y = \lambda x$ ·· ✳

이제, ②에서 $\sqrt{3}$을 곱하고 ✳를 대입하면 $2\lambda^2 x + \lambda x - 3x = 0$

이때, $x=0$ 이 되면 $(x,y,z)=0$ 이므로 모순이기에 위 식을 x로 나누어 $2\lambda^2+\lambda-3=0$ 을 얻는다.

$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$ or 1.

i) $\lambda = -\frac{3}{2}$인 경우, $(x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}})$ 이 경우, $f(x,y,z) = -\frac{3}{2}$

ii) $\lambda = 1$인 경우, $(x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}})$ 이 경우, $f(x,y,z) = 1$

∴ 결과를 요약하면, 최댓값 = 1, 최솟값 = $-\frac{3}{2}$ ■

+5 +5

8번 모범답안

f가 미분가능하므로, $\mathbb{R}^2$의 임의의 벡터 $\mathbf{u}$에 대해 $D_{\mathbf{u}}f(P) = \mathrm{grad}f(P) \cdot \mathbf{u}$이다. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$와 $\mathbf{u} = \mathbf{w}$를 대입하게 되면 각각 $2 = -2D_1f(P) + D_2f(P)$와 $5 = 3D_1f(P) - 2D_2f(P)$를 얻는다. 따라서 $D_1f(P) = -9$, $D_2f(P) = -16$이고, $\mathrm{grad}f(P) = (-9, -16)$이다. $\mathrm{grad}(f(x,y))^2 = 2f(x,y)\mathrm{grad}f(x,y)$이므로[1], F의 야코비 행렬은 $F'(P) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}f(P) \\ 2f(P)\mathrm{grad}f(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -16 \\ 36 & 64 \end{pmatrix}$.

8번 채점기준

1. 야코비 행렬 전체를 잘 구했으면 15점.(전치행렬을 쓴 경우 부분점수 없음.)
2. $\mathrm{grad}f(P)$만 잘 구하였으면 8점.
3. 이미 구한 답을 옮겨적는 과정에서 발생한 실수는 감점하지 않음.

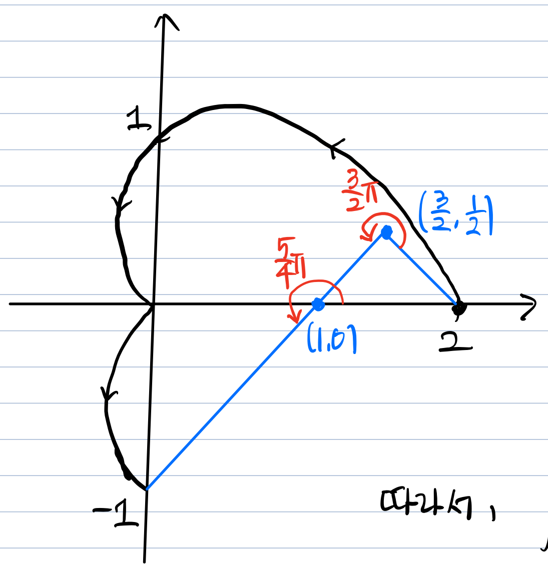
[1]연습문제 10장 3절 3번의 넷째 수식에 $h(t) = t^2$을 대입하였다.

9. $F_1(x,y) = \dfrac{(-y,\ x-1)}{(x-1)^2+y^2}$: $(1,0)$을 기준으로 하는 각원소벡터장. — (4점)

$F_2(x,y) = \dfrac{(-(y-\frac{1}{2}),\ x-\frac{3}{2})}{(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}$: $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$을 기준으로 하는 각원소벡터장. — (4점)

$F(x,y) = F_1(x,y) - F_2(x,y)$ 이다.

곡선 X를 평면에 그리면,



$\Rightarrow$ $\int_X F_1\cdot ds = \frac{5}{4}\pi$ — (4점)

$\int_X F_2\cdot ds = \frac{3}{2}\pi$ — (4점)

따라서, $\int_X F\cdot ds = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{4}$ — (4점).

채점기준 : ① 위의 F_1, F_2가 각원소벡터장의 형태임을 언급하면 각 4점.
또는 잠재함수 $\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)$, $\arctan\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}\right)$을 언급해도 각 4점

② F_1, F_2 정의에 부합하게 각 선적분을 계산하면 각 4점.
(부호가 틀릴시 0점)

③ $\int_X F\cdot ds = \int_X F_1\cdot ds - \int_X F_2\cdot ds$ 를 올바르게 계산하면 4점
(단, 각 성분이 맞아야 4점, 틀릴 시 0점.)

10번

풀이 1

$$\int_X F\cdot ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} F(x(t))\cdot x'(t)\,dt$$

선적분의 정의를 올바르게 썼을 경우 +5

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(e^{\sin t\cdot\log t}\cdot\log(e^t),\ \frac{e^{\sin t\cdot \log t}}{e^t} - \cos\frac{t}{2},\ e^t\sin\frac{t}{2}\right)\cdot$$

$$\left(\cos t\log t + \frac{\sin t}{t},\ e^t,\ \frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} t^{\sin t+1}\left(\cos t\log t + \frac{\sin t}{t}\right) + t^{\sin t} - e^t\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}e^t\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \left[t^{\sin t+1} - e^t\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

계산을 올바르게 했을 경우 +10

풀이 2

$$\varphi(x,y,z) = e^x\log y - y\cos z$$

잠재함수를 제대로 구했을 경우 +5

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\varphi = F$$

$$\int_X F\cdot ds = \left[\varphi(x(t))\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

선적분의 기본정리를 잘 적용한 경우 +5

$$= \varphi\left(x\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right) - \varphi\left(x\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \varphi\left(-\log\left(\tfrac{3}{2}\pi\right),\ e^{\frac{3}{2}\pi},\ \tfrac{3}{4}\pi\right) - \varphi\left(\log\left(\tfrac{\pi}{2}\right),\ e^{\frac{\pi}{2}},\ \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

계산을 올바르게 했을 경우 +5

※ 계산을 올바르게 한 경우, 표기법의 오류는 용인함