202 학년도 여름 계절학기

수학 2 중간고사

모범답안 및 채점기준

문제 1 - (a)

방향미분계수의 정의에 의해

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(1,0)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(0,1)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

이다.

- 채점기준

- 방향미분계수의 정의만 안다고 판단될 경우 3점

문제 1 - (b)(풀이 1)

$\mathbf{v} = (a,b)$라 하자. (a)에 의해 $\mathrm{grad}\, f(0,0) = \mathbf{0}$이므로 다음 극한값이 0인지 확인해보면 된다.

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{v}) - f(0,0) - \mathrm{grad}\, f(0,0)\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{|b\sin^3 a + a\sin^3 b|}{|a^3 - b^3|\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots 5\text{점}$$

직선 $b = -a$를 따라 극한값을 계산하면

$$\lim_{\substack{(a,b)\to(0,0)\\ \text{along } b=-a}} \frac{|b\sin^3 a + a\sin^3 b|}{|a^3 - b^3|\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{a\to 0} \frac{2|a\sin^3 a|}{2\sqrt{2}|a^4|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{a\to 0}\left|\frac{\sin a}{a}\right|^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad \cdots\cdots 5\text{점}$$

이므로 함수 f는 원점에서 미분가능하지 않다.

문제 1 - (b)(풀이 2)

f가 원점에서 미분가능하다고 가정하자. 그러면 벡터 $(2,1)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$D_{(2,1)}f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot (2,1)$$

그런데 (a)에 의해 $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$이고,

$$D_{(2,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(2,1)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(2t,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^3 2t + 2\sin^3 t}{7t^3} = \frac{10}{7}$$

이므로

$$D_{(2,1)}f(0,0) = \frac{10}{7} \neq 0 = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot (2,1)$$

이므로 모순이다. 따라서 f는 원점에서 미분가능하지 않다.

- 채점기준

- 임의의 방향 $\mathbf{v} = (a,b)$에 대해 보인 경우 $a \neq b$를 고려하지 않으면 5점 감점
- 논리적 오류가 있거나 계산실수한 경우 5점 감점

문제 1 - (b)(풀이 3)

곡선 $x = y^2 + y$를 따라 극한값을 계산하면

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{along } x=y^2+y}} \frac{y\sin^3 x + x\sin^3 y}{x^3 - y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^3(y^2+y) + (y+1)\sin^3 y}{y^5 + 3y^4 + 3y^3} = \frac{2}{3} \neq 0 = f(0,0)$$

이므로 함수 f는 원점에서 연속이 아니다. 따라서 주어진 함수는 미분가능하지 않다.

문제 2

$$g(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^z,\quad P=(1,2,3)$$

라 두면

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1+xh}{2+yh}\right)^{3+zh}-\frac{1}{8}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{g(P+(xh,yh,zh))-g(P)}{h}\\&=D_{(x,y,z)}g(P)\end{aligned}$$

이다. 한편 함수 g는 점 P에서 미분가능하므로

$$D_{(x,y,z)}g(P)=\operatorname{grad}g(P)\cdot(x,y,z)$$

임을 안다.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{y},\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right),\quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\log\frac{x}{y}$$

이므로

$$\operatorname{grad}g(P)=\left(\frac{3}{8},-\frac{3}{16},-\frac{1}{8}\log 2\right)$$

이고

$$f(x,y,z)=\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}y-\frac{z}{8}\log 2$$

이다. 문제의 조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$이므로 벡터 (x,y,z)는 단위벡터이고
함수 f는 점 P에서 함수 g의 (x,y,z)-방향미분계수이므로 최댓값

$$|\operatorname{grad}g(P)|=\frac{\sqrt{45+4(\log 2)^2}}{16}$$

를 갖는다.

- 채점기준

- f를 구하거나 grad f를 구한 경우 10점, 최댓값을 구한 경우 10점
- 계산 실수로 f를 잘못 구한 경우 이후 논리적 오류가 없으면 10점
- f를 잘못 구하고 최댓값도 틀린 경우 0점

문제 3

$$g(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

라 두면, 연쇄법칙에 의해

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right), f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

이다. 따라서 점 (a,b)에서의 접평면의 방정식은

$$\begin{aligned} z &= g(a,b) + \operatorname{grad} g(a,b) \cdot (x-a, y-b) \\ &= af\left(\frac{b}{a}\right) + \left(f\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}f'\left(\frac{b}{a}\right), f'\left(\frac{b}{a}\right)\right) \cdot (x-a, y-b) \\ &= \left(f\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{a}{b}f'\left(\frac{b}{a}\right)\right)x + f'\left(\frac{b}{a}\right)y \end{aligned}$$

이고, 이 평면은 점 (a,b)와 관계없이 원점을 지난다. 따라서 접평면은 모두 원점에서 만난다.

- 채점기준

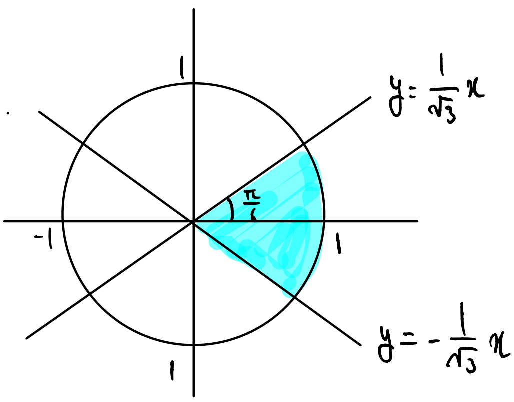
\- 연쇄법칙을 이용하여 $\operatorname{grad} g$를 구한 경우 10점
\- 접평면의 방정식을 구한 경우 5점
\- 접평면이 항상 원점을 지남을 설명하면 5점
\- 논리적 오류가 없으나 계산 실수를 한 경우 5점 감점

#4

$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$ +2 이므로, $F'(x,y) > 0$ 이려면 $x>0$, $x-3y^2>0$

이어야 한다. +3 이때 $(x-3y^2) = (x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y) > 0$ 이고, F가 $U: x^2+y^2<1$

에서 정의되었으므로 $S = \{(x,y) \in U \mid F'(x,y) > 0\}$ 은 다음과 같이 그려서 나타낼 수 있다.



따라서 그 넓이는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. +5.

#5

a) $D_1 f(x,y) = \dfrac{1}{x+e^y}$, $D_2 f(x,y) = \dfrac{e^y}{x+e^y}$, $D_1D_1 f(x,y) = \dfrac{-1}{(x+e^y)^2}$,

$D_1D_2 f(x,y) = \dfrac{-e^y}{(x+e^y)^2}$ 그리고 $D_2D_2 f(x,y) = \dfrac{x \cdot e^y}{(x+e^y)^2}$ 이므로.

$D_1 f(0,0) = 1$ +1, $D_2 f(0,0) = 1$ +1, $D_1^2 f(0,0) = -1$ +1, $D_1D_2 f(0,0) = -1$ +1, $D_2^2 f(0,0) = 0$ +1

$f(0,0) = 0$ +1 이고 따라서 $T_2 f(x,y) = x+y-\frac{1}{2}x^2 - xy$ 이다. +1.

(b) $T_1 f(x,y) = x+y$ 이므로 일차 근삿값은 $T_1 f(0.01, 0.01) = 0.02$ 이다. +4.

이때 오차는 $M_2 = \max\{ | D_{i_0} D_{i_1} f((0.01)t, (0.01)t) | \mid 1 \le i_0, i_1 \le 2,\ 0 \le t \le 1 \}$

이라고 하면 $\frac{1}{2!} M_2 (0.01 + 0.01)^2 = M_2 \times 2 \times 10^{-4}$ 이하 이다.

한편 $x = (0.01)t,\ y = (0.01)t$ 라고 하면 $|D_1 D_1 f(x,y)| = \frac{1}{(x+e^y)^2} \le \frac{1}{e^{2y}} \le 1$,

$|D_2 D_2 f(x,y)| = \frac{x \cdot e^y}{(x+e^y)^2} \le \frac{x \cdot e^y}{x^2 + e^{2y}} \le \frac{1}{2}$, $|D_1 D_2 f(x,y)| = \frac{e^y}{(x+e^y)^2} \le \frac{1}{e^y} \le 1$

이므로 $M_2 \le 1$ 이다. 따라서 오차는 2×10^{-4} 이하이다. +4.

6.

$f(x,y) = x^2 + xy^2 - y^2 - 3x$ 는 미분가능하다.

따라서 임계점 정리에 의해 $\mathrm{grad}\, f = (0,0)$ 인 점이 임계점이다

$\mathrm{grad}\, f = (2x + y^2 - 3,\ 2xy - 2y)$

$\therefore$ $(\frac{3}{2}, 0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ 이 임계점이다.

$$f'' = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix}$$

$(\frac{3}{2}, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 $\det > 0$ 이고 $f_{xx} > 0$ 이므로 극소점이다.

$(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det < 0$ 이므로 안장점.

$(1,-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det < 0$ 이므로 안장점.

채점기준: 임계점 각각 1점 → 3점.

헤세행렬 각각 2점 → 6점.

헤세 판정 각각 2점 → 6점.

헤세 판정시 양행렬, $\det < 0$ 이라는 언급이 반드시 있어야함

없으면 판정을 올바르게 했어도 점수 없습니다.

CamScanner로 스캔하기

7.

$f(x,y)=x^2+y^2$ $g(x,y)=x^2+y^2+xy$ 로 두자.

주어진 영역은 g의 3-등위면이다.

g가 연속함수이므로 등위면은 닫힌 집합이다.

$xy \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 이 항상 성립한다.

$3=x^2+y^2+xy \geq x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $\therefore x^2+y^2 \leq 6$ 유계이다.

$\therefore$ f가 연속함수이므로 최대최소정리에 의해 주어진 영역에서 최솟값을 가진다.

$\text{grad } g = (2x+y,\ 2y+x)$ $\text{grad } f = (2x, 2y)$

만약 $\text{grad } g=(0,0)$ 이면 $x=y=0$. 주어진 영역의 점이 아니다.

$\therefore$ 라그랑주 승수법에 의해 극점에서 $(2x,2y)=\lambda(2x+y,\ 2y+x)$

인 λ 존재한다.

$2(x+y)=\lambda(3x+3y)$ $\therefore x+y=0$ 혹은 $\lambda=\frac{2}{3}$

1) $x+y=0$ 인 경우 $(x,y)=(\pm\sqrt{3},\ \mp\sqrt{3})$ 이 경우 함숫값 6.

2) $\lambda=\frac{2}{3}$ 일때 $x=y$. $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ 이 경우 함숫값 2.

$\therefore$ 최솟값은 2이다.

채점기준

최대 최소정리 : 3점.

라그랑주 승수법식 $(2x,2y)=\lambda(2x+y,\ 2y+x)$ 를 세우는 경우 5점.

점 4개를 구하는 경우 각 1점 모두 맞으면 5점. (점을 추가로 구했으면 점 개수마다 -1점)

최솟값 2를 구하는 경우 2점. (이 경우 4개의 점을 정확히 구하지 않고 2라고 하는 경우 점수 없음)

CamScanner로 스캔하기

다른 풀이.

$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 이성립한다.

$3 = x^2+y^2+xy \le \frac{3}{2}(x^2+y^2)$

$\therefore\ x^2+y^2 \ge 2$

이때 $x^2+y^2=2$ 를 만족하는 점이 주어진 영역기에 존재한다.

($x=y=1$ 혹은 $x=y=-1$)

$\therefore$ 2가 최솟값이다.

논리가 맞는 경우 점수를 드렸습니다.

틀린예시) 산술기하 부등식의 등호조건 $|x|=|y|$ 라고 놓고 바로 계산하는 경우.

8. $H'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$

$F(1,2,3) = (1,2)$ 에서

$H'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

주어진 grad f, grad g 값으로부터

$F'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

연쇄법칙에 의해

$(H \circ F)'(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -8 & -10 & -12 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix}$

$H'(1\ 2)$ 구하면 +3점

$F'(1\ 2 3)$ 구하면 +3점

답 잘 구하면 +4점

단순 계산실수로 답 틀리면 −2점

9. $X'(t) = \left(\frac{-t\sin t - \cos t}{t^2}, \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \right)$

$(\vec{F} \circ X)(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\vec{F} \circ X)(t) \cdot X'(t)\, dt$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{t} dt = \log 3$

$X'(t)$ 잘 구하면 +5점

$(\vec{F} \circ X)(t)$ 잘 구하면 +5점

적분하여 답 잘 구하면 +5점

* 계산 문제이므로 단순 계산실수에 대한 부분점수 없음.

#10. $X(t) = \left(t - \sin t - \pi/2,\ 1 - \cos t\right),\ t \in [0, 2\pi]$.

put $F(x,y) := \left(\dfrac{x^3 + xy^2 + y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x^2y + y^3 - x}{x^2+y^2} \right)$, then

$$\int_X \frac{x^3+xy^2+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x^2y+y^3-x}{x^2+y^2}\,dy = \int_X F.$$

Note that $F(x,y) = (x,y) + \dfrac{1}{x^2+y^2}(y,-x) = \underset{\substack{\shortparallel \\ G(x,y)}}{(x,y)} - \omega(x,y)$

where $\omega(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$. $G(x,y)$.

+5

① $\displaystyle\int_X G \underset{\uparrow}{=} \int_X \nabla g \underset{\uparrow}{=} g(X(2\pi)) - g(X(0)) = g\left(\tfrac{3}{2}\pi, 0\right) - g\left(-\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \pi^2$. +5

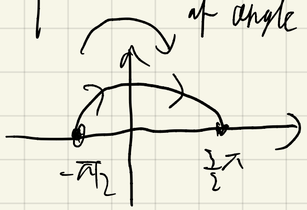
put $g(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$,
then $G(x,y) = \nabla g$.

by fundamental theorem of line integral.

② $\displaystyle\int_X \omega \underset{\uparrow}{=}$ change of angle along $X = -\pi$. +5

of angle $-\pi$.

X :



$$\Rightarrow \int_X \frac{x^3+xy^2+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x^2y+y^3-x}{x^2+y^2}\,dy = \int_X F = \int_X G - \int_X \omega = \pi^2 - (-\pi) = \pi^2 + \pi.$$

- 명시되어 있는 것 외의 부분점수 없음.
- ①,②의 과정에서 다른 여러가지 방식으로 계산해도 답이 맞으면 인정.
- 벡터장이 아닌 미분형식의 언어로 기술해도 대응되는 점수 인정
- 마지막에 더하는 과정에서 답이 틀릴 경우 3점 감점.
- 논리적인 gap이 있거나 서술상 미흡한 부분이 있으면 추가 감점.
