

수학 2 중간고사
(2020년 10월 17일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

(연습용 여백)

문제 1. [20점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (7점) f 는 연속함수인지 판단하시오.
- (b) (7점) f 는 원점에서 모든 방향미분계수를 가지는지 판단하시오.
- (c) (6점) 원점에서 함수 f 의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [15점] 함수 $f(x, y) = \frac{1}{y}e^{-xy} \sin(\pi y)$ ($y \neq 0$)에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (6점) 점 $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 \mathbf{v} 라 할 때, $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하시오.
- (b) (9점) 그래프 $z = f(x, y)$ 의 점 $\left(0, \frac{1}{2}, 2\right)$ 에서의 접평면의 식을 구하시오.

문제 3. [15점] $g(\pi) = 1$ 인 일급함수 $g(z)$ 와 다변수함수

$$f(x, y, z) = e^y g(z) \sin x + yz$$

및 곡선 $X(t) = (\sin t, -\cos^2 t, t)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (9점) $h(t) = f(X(t))$ 일 때, $h'(\pi)$ 를 구하시오.
- (b) (6점) $X(\pi)$ 에서 f 의 등위면에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

문제 4. [10점] 이급함수 $f(x, y)$ 의 원점에서의 2차 근사다항식이 $T_2f(x, y) = y + xy$ 일 때, $\frac{\partial(D_1f, D_2f)}{\partial(x, y)}(0, 0)$ 을 구하시오.

문제 5. [20점] 함수 $f(x, y) = \sqrt{2} \cos x + x \sin y$ 의 극대점을 모두 구하시오.

학번:	이름:
-----	-----

문제 6. [20점] xyz -공간에서 원기등좌표계로 나타낸 다음 영역

(연습용 여백)

$$r = (6 - z) \cos \theta, \quad 0 \leq z \leq 6$$

에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = xyz$ 의 최대점과 최소점을 구하시오.

문제 7. [10점] 어떤 함수 $f(x, y, z)$ 를

$$(x, y, z) = F(u, v, w)$$

로 치환하여 나타낸 것을 $g(u, v, w)$ 라고 하자. uvw -공간의 어떤 점 P 에서 F 의 야코비 행렬이

$$F'(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이고, $F(P)$ 에서 f 의 기울기벡터가 $(2, 1, 1)$ 일 때, P 에서 g 의 기울기벡터를 구하시오.

문제 8. [15점] 곡선 $X(t) = (\cos nt, \sin nt)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)를 따르는 벡터장

$$\mathbf{F} = \left(\frac{2020^x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y^{2020}}{x^2 + y^2} \right)$$

의 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (단, n 은 정수이다.)

문제 9. [15점] 양수 a, b 에 대해 $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (a, b)$ 라 할 때 C_1 은 O 에서 A 까지 직선으로 갔다가 C 까지 직선으로 가는 경로이며, C_2 는 O 에서 B 까지 직선으로 갔다가 C 까지 직선으로 가는 경로라 하자.

평면 위의 이급 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 가

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

를 만족한다고 할 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) $\int_0^a (P(t, b) - P(t, 0)) dt = \int_0^b (Q(a, s) - Q(0, s)) ds$ 가 성립함을 보이시오.

(b) (10점) 임의의 양수 a, b 에 대해 (a)가 성립한다고 할 때, 다음 등식을 보이시오.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (x, y > 0)$$

문제 10. [10점] 곡선

$$X(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

에 대하여 선적분 $\int_X 2xe^z dx + \sin z dy + (x^2 e^z + y \cos z) dz$ 를 구하시오.