2020학년도 2학기 수학 2 중간고사 모범답안 및 채점기준

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| = 0$ 임을 보여야함.

풀이 1. $|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^4+|y|^3}{x^2+y^2} = x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$

$$\le x^2+|y|$$

따라서, $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ 일때, $|f(x,y)-f(0,0)| \to 0$.

풀이 2. ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 로 두고,)

$$\left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^4\cos^4\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| = r\left|r\cos^4\theta + \sin^3\theta\right| \le r(r+1)$$

따라서, $r \to 0$ 일때, 즉, $(x,y) \to (0,0)$ 일때, $|f(x,y)-f(0,0)| \to 0$.

- 감점요소 (아래에 해당되는 실수가 1개 일때 4점 감점, 2개 이상일 때 0점 부여)
  - (부등식을 쓰는 과정에서) 분모가 0 이 되는 경우를 고려하지 않았거나,
  - 절댓값을 빼먹은 경우. (예를들어, $|x^4+y^3| \le x^4+y^3$ 과 같이 쓴 경우.)
  - 예를 들어, $x^4 \le |x|^3$ 와 같은 부등식을 쓸 때, 원점 근방 혹은 $|x|<1$ 라는 언급이 없는 경우.
  - 극한 값을 구할 때 엄밀하지 못한 경우. (예를 들어, $\lim_{r\to 0} r(r\cos^4\theta+\sin^3\theta)=0$ 임을 보일 때, $r\cos^4\theta + \sin^3\theta$ 가 유계함을 언급하지 않은 경우.
- 0점을 부여하는 경우.
  - 아예 잘못된 부등식을 쓴 경우. (산술기하 평균 부등식을 반대로 적용했다거나, $|y|^3 \le y^4$ 와 같은 부등식을 쓴 경우. $\frac{x^4+y^3}{x^2+y^3} = \frac{x^2+\frac{y^3}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$ 와 같은 등식을 쓴 경우.)
  - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$ 을 보일때, $x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} \le x^2$ 와 같은 부등식 없이 바로 0 이라고 쓴 경우.

(b) $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t\cdot v) - f(0)}{t}$ $\quad (v=(a,b))$

→ 1점 (정의 언급)

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{f(at, bt) - f(0,0)}{t} = \dfrac{b^3}{a^2+b^2}$ → $D_v f(0,0)$을 구하여 존재함을 보이면 3점.

- 결론을 잘못 내린 경우 -3점.

- v가 단위벡터임을 언급하고 $D_v f(0,0) = \dfrac{b^3}{a^2+b^2} = b^3$ 으로 결론을 내린 경우 감점X.

- 미분가능함을 가정하고 풀이를 전개한 경우 0점 부여.

(c) 방법1. 미분이 가능하다면 $D_v f(0,0) = \text{grad} f(0,0)\cdot v$ 를 언급하고 $\text{grad} f(0,0) = (0,1)$를 올바르게 구함 → 3점

$D_v f(0,0) = \dfrac{b^3}{a^2+b^2} \neq b = \text{grad} f(0,0)\cdot v$ $\quad (v=(a,b))$ 임을 보임 → 3점.

방법2 미분이 가능하다면 $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(p+t\cdot v) - f(p) - \text{grad} f(p)\cdot(tv)}{t} = 0$ 임을 언급하고

$\text{grad} f(0,0) = (0,1)$을 올바르게 구함 → 3점.

$\lim_{t\to 0} \dfrac{f(p+t\cdot v) - f(p) - \text{grad} f(p)\cdot(tv)}{t} \neq 0$ 임을 보임 → 3점.

- $\text{grad} f(0,0)$을 잘못 구한 경우 정의를 언급하여도 0점 부여.

2.a) (6점)

$y \neq 0$ 에서 f는 미분가능하므로, grad f 가 잘 정의 된다.

이때, f의 함숫값이 가장 빠르게 증가하는 방향은 gradient 벡터 방향이다.

따라서 grad f 를 구해보면,

$$\text{grad } f(x,y) = (D_1 f(x,y),\ D_2 f(x,y))$$

$$D_1 f(x,y) = -e^{-xy}\sin(\pi y),\quad D_2 f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{y}\left(-\frac{1}{y}\sin(\pi y) - x\sin(\pi y) + \pi\cos(\pi y)\right)$$

따라서, $\text{grad } f(0,\frac{1}{2}) = (-1,-4)$ +3

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } f(0,\frac{1}{2})}{\|\text{grad } f(0,\frac{1}{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,-4) \quad \text{이다.}$$

이때, $D_{\vec{v}} f(p) = \text{grad } f(p)\cdot\vec{v}$ 이므로,

$$D_{\vec{v}} f(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,-4)\cdot(-1,-4) = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \quad \text{이다.}$$ +3

채점기준

- grad $f(0,\frac{1}{2})$ 을 올바르게 구하면 3점.
- $D_{\vec{v}} f(0,\frac{1}{2})$ 을 올바르게 구하면 3점.
- grad $f(0,\frac{1}{2})$을 틀렸을시,

  함숫값이 가장 빠르게 증가하는 방향이 gradient 벡터 방향인 것을 언급하거나, 알고 있는 경우 3점.

  (e.g. $\vec{v} = \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}$ or $D_{\vec{v}} f(p) = \text{grad } f(p)\cdot\left(\frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}\right)$ 등)

  하지만 이 경우 $D_{\vec{v}} f(0,\frac{1}{2})$ 계산은 점수 없음.

2.b) (9점)

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 을 $g(x,y,z) = \frac{1}{y} e^{-xy} \sin(\pi y) - z$ 라 하자.

그러면 g는 미분가능하고, 문제의 그래프는 $g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^3$ 로 생각할 수 있다.

이때, grad $g(p)$는 g의 0-등위면인 $g^{-1}(\{0\})$의 점 p에서의 접평면에 수직인 벡터이다. +3

한편, $\text{grad}\, g(x,y,z) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y), -1)$ 이므로,

$\text{grad}\, g(0, \frac{1}{2}, 2) = (-1, -4, -1)$ 이다. +3

이때, 점 $(0, \frac{1}{2}, 2)$ 에서의 접평면의 방정식은,

$$\text{grad}\, g(0, \tfrac{1}{2}, 2) \cdot \left((x,y,z) - (0, \tfrac{1}{2}, 2) \right) = 0$$ 이므로,

이를 정리하면, $x + 4y + z = 4$ 가 된다. +3

채점 기준

- $\text{grad}\, g(0, \frac{1}{2}, 2)$를 올바르게 계산하면 3점
- $\text{grad}\, g(0, \frac{1}{2}, 2)$가 점 $(0, \frac{1}{2}, 2)$에서의 접평면에 수직임을 알면 3점. ($\text{grad}\, g(0, \frac{1}{2}, 2)$ 계산을 잘못 하였더라도 점수 부여)
  (e.g. $\text{grad}\, g(0, \frac{1}{2}, 2)$ // 법선벡터 등)
- 접평면의 방정식을 올바르게 구하면 3점.
- 접평면의 방정식을 올바르게 구했지만 식 정리 과정에서의 사소한 계산 실수는 감점하지 않음.

#3.

(a) I. $h'(\pi) = \text{grad}f(X(\pi)) \cdot X'(\pi)$ 이고, +7

$X'(\pi) = (-1, 0, 1)$, $X(\pi) = (0, -1, \pi)$,

$\text{grad}f(x,y,z) = (e^y g(z)\cos x,\ e^y g(z)\sin x + z,\ e^y g'(z)\sin x + y)$

이므로

$\text{grad}f(X(\pi)) = (e^{-1}, \pi, -1)$

$\therefore h'(\pi) = (e^{-1}, \pi, -1)\cdot(-1, 0, 1)$

$= -e^{-1} - 1.$ +2

※ $h'(\pi) = \text{grad}f(X(\pi)) \cdot X'(\pi)$ 의 의미를 정확히 알고 이를 이용하여 풀이한 경우 +7.

올바른 계산으로 답을 도출하면 +2.

단, 계산 과정을 반드시 명시해 주어야 함.

II. $h'(t) = 2\sin t\cdot\cos t\cdot e^{-\cos^2 t}\cdot g(t)\cdot \sin(\sin t)$
$+ e^{-\cos^2 t}\cdot g'(t)\cdot \sin(\sin t)$
$+ e^{-\cos^2 t}\cdot g(t)\cdot \cos(\sin t)\cdot \cos t$
$-\cos^2 t + 2t\sin t\cos t$ +7

이므로 $h'(\pi) = -e^{-1} - 1$ +2

※ $h'(t)$를 정확히 구한 경우에만 +7.

올바른 계산으로 답을 도출하면 +2.

(b) (a)에서,

$\mathrm{grad} f(X(\pi)) = (e^{-1}, \pi, -1)$,

$X(\pi) = (0, -1, \pi)$ 이므로

평면의 방정식은

$e^{-1}x + \pi(y+1) - (z-\pi) = 0$

$\Rightarrow e^{-1}x + \pi y - z + 2\pi = 0$.

※ 6점 or 0점.

단, $\mathrm{grad} f(X(\pi))$ 와 $X(\pi)$를 제대로 구했는데 평면의 방정식에서 계산 실수를 한 경우 5점.

채점기준

4.

$$\frac{\partial(D_1 f, D_2 f)}{\partial(x, y)}(0,0) = \begin{pmatrix} -\mathrm{grad}(D_1 f)- \\ -\mathrm{grad}(D_2 f)- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}f & D_{12}f \\ D_{12}f & D_{22}f \end{pmatrix} \quad (D_{12}f = D_{21}f).$$

이급함수 $f(x,y)$의 원점에서의 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x,y) = f(0,0) + D_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{2} D^2_{(x,y)} f(0,0)$$

$$= f(0,0) + [D_1 f(0,0)]x + [D_2 f(0,0)]y + \frac{1}{2}\{[D_{11}f(0,0)]x^2 + 2[D_{12}f(0,0)]xy + [D_{22}f(0,0)]y^2\}.$$

계수 비교

$$= y + xy. \quad \text{(4점)}.$$

$\Rightarrow$ $D_{11}f(0,0) = D_{22}f(0,0) = 0$ & $D_{12}f(0,0) = 1$ (4점)
$(= D_{21}f(0,0))$.

(※ $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{21}$ 중 하나 틀릴 때마다 1점씩 감점.
※ 반드시 명시해야 함)

∴ 구하고자 하는 답은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이다. (2점)

참고사항 ※ 특정한 $f(x,y)$을 이용하여 (예) $f(x,y)$를 $e^x \sin y$ 혹은 $y+xy$) 문제를 풀이한 경우 4점.

※ 일반적으로 $D_i f(x,y) \neq D_i T_2 f(x,y)$이다. 이를 같이 두고 푼 경우도 4점.

5. $f(x,y) = \sqrt{2}\cos x + x\sin y$ 의 극대점을 모두 구하시오.

함수 f의 모든 극대를 판별하기 위해 우선 모든 임계점을 구해내야 한다. 그리고 각 임계점에서 함수의 행동을 전부 판별하여 추가적인 극대가 생길 여지를 완전히 없애줘야 한다.

f는 무한급 함수이기 때문에 페르마의 임계점 판정법과 헤세 판정법을 사용한다.

STEP 1. 임계점 구하기 (7점)

$\nabla f = (-\sqrt{2}\sin x + \sin y,\ x\cos y) = (0,0)$ 인 점은 (2점)

case 1. $x=0 \Rightarrow \sin y = 0 \quad \therefore (0, n\pi)$, n은 모든 정수

case 2. $\cos y = 0$ 즉 $y = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ or $2m\pi - \frac{\pi}{2}$, m은 임의의 정수.

- $y = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin y = 1$ 이 되므로 $-\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ 으로부터

  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ or $2k\pi + \frac{3}{4}\pi$, k는 임의의 정수

- $y = 2m\pi - \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin y = -1$ 이 되고 $-\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ 이여야 한다.

  이때, $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ or $2k\pi - \frac{3}{4}\pi$, k는 임의의 정수 (5점)

STEP 2. 헤세 행렬 구하기 (2점) + 안장점, 극점의 헤세 판정법 사용 (5점) + 극대점 구하기 (6점)

$$H = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\cos x & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}$$

$\det(H) < 0$

극대 : H가 음행렬

극소 : H가 양행렬

(모든 점을 전부 구해야 점수 부여)

(왜 극대인지 극대가 아닌지 정확하게 이유를 달아 줬을 때만 점수를 부여한다.)

case 1. $H(0, n\pi) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 $\det(H(0,n\pi)) < 0 \quad \therefore (0, n\pi)$는 모두 안장점

case 2. (다음 장)

case 2.

- $H\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -(2k\pi+\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$

$f_{xx} = -1 < 0$ 이고 $\det(H) = (2k\pi+\frac{\pi}{4}) > 0$ 가 돼야 한다.

따라서 K의 범위가 0 이상의 정수일 때만 극대가 발생한다.

- $H\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi,\ 2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(2k\pi+\frac{3}{4}\pi) \end{bmatrix}$

$f_{xx} = 1 > 0$ 이므로 이 경우 극대는 발생하지 않는다.

- $H\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},\ 2m\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +(2k\pi-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$

$f_{xx} = -1 < 0$ 이고 $\det(H) = -2k\pi+\frac{\pi}{4} > 0$ 이어야 하므로

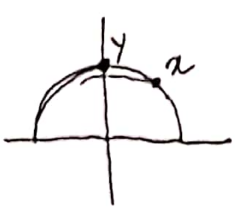
K는 0 이하의 정수여야 한다.

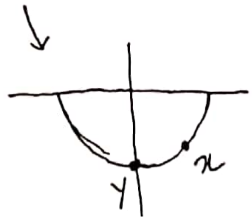
- $H\left(2k\pi-\frac{3}{4}\pi,\ 2m\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2k\pi-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$

$f_{xx} = 1 > 0$ 이므로 음행렬이 될 수 없다.

따라서. 모든 극대점은 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $K \geq 0$ 정수 & m : 임의의 정수

$\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},\ 2m\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ $K \leq 0$ 정수 & m : 임의의 정수





6.

주어진 영역은 유계이고 닫힌 집합이므로 최대점·최소점 존재 +2

$x^2+y^2=(6-z)x$ $\quad x^2+y^2+zx-6x=0$ (원기둥 좌표계의 경우 $f(r,\theta,z)=r^2\cos\theta\sin\theta z$) +4

$f(x,y,z)=xyz$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+zx-6x=0$ ··· (*)

i) $0<z<6$ 에서

$\text{grad}\, f=(yz, zx, xy)$

$\text{grad}\, g=(2x+z-6, 2y, x)$

라그랑주 승수법에 의해 $\text{grad}\, g\neq 0$ 일 때 (즉 $(0,0,6)$이 아닐때) $\text{grad}\, f=\lambda\, \text{grad}\, g$ 인 λ 존재

$\Rightarrow (yz, zx, xy)=\lambda(2x+z-6, 2y, x)$ 4

$f(0,0,6)=0$

$yz=\lambda(2x+z-6)$ ①, $zx=2\lambda y$ ②, $xy=\lambda x$ ③ $\rightarrow x=0$ or $y=\lambda$

(i) $x=0 \rightarrow f=0$

(ii) $y=\lambda$

$\lambda=0$일 때 $f=0 \Rightarrow \lambda\neq 0$이라 가정.

① 에서 $z=2x+z-6 \Rightarrow x=3$

② 에서 $zx=2\lambda^2 \Rightarrow 3z=2\lambda^2 \Rightarrow 0<\frac{2}{3}\lambda^2=z<6 \Rightarrow -3<\lambda<3$, $\lambda\neq 0$

$g(3,\lambda,\frac{2}{3}\lambda^2)=9+\lambda^2+2\lambda^2-18=0 \quad \Rightarrow 3\lambda^2=9, \quad \lambda=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow (3,\pm\sqrt{3},2)$가 극점.

$f(3,\pm\sqrt{3},2)=\pm 6\sqrt{3}$ +6

ii) $z=0$, $z=6$에서

$z=6$일 때 $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$, $f(0,0,0)=0$

$z=0$일 때 $\Rightarrow f=0$ +4

따라서 최대점은 $(3,\sqrt{3},2)$, 최소점은 $(3,-\sqrt{3},2)$

* x,y,z가 0이 되는 경우 또는 $\text{grad}\, g=0$인 경우 ($(0,0,6)$인 경우)를 제대로 언급하지 않으면 -3

* 계산 과정은 맞았으나 답이 틀리면 -1

* (*)에서 오류가 있을 경우 부분점수 없음

7.

By the Chain rule, $\nabla g(P) = \nabla f(F(P)) \cdot F'(P)$ $\cdots$ (1)

Then, we can compute $\nabla g(P) = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 1)$ $\cdots$ (2)

(1) Chain rule 식 언급 혹은 성분별로 이루어진 식을 올바르게 언급한 경우 +5

* $F'(P) \cdot \nabla f(F(P))$ 나 잘못된 Chain rule 사용시 부분점수 없음

* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 과 같이 transpose 취한 경우 점수 인정.

(2) 계산을 올바르게 한 경우 +5

* 계산 실수 부분점수 없음.

#08

① $\int_x F\cdot ds = \int_0^{2\pi} F(X(t))\cdot X'(t)\,dt$ 를 쓰거나 바로 t를 대입한 식으로 나타낸 경우 (3점)
(3)

②-1
(8) $F = F_1 + F_2$, $F_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ (각원소 벡터장) , $F_2 = \left(\frac{2020^x}{x^2+y^2}, \frac{y^{2020}}{x^2+y^2}\right)$

으로 나누어 계산할 때,

$\int_x F_1\cdot ds = 2n\pi$ 임을 서술한 경우 (4점)

$\int_x F_2\cdot ds = 0$ 임을 계산한 경우 (4점)

②-2
(8) F를 나누지 않고 정의로 모두 계산한 경우. (8점)

~~★~~ 계산값이 틀렸더라도 2-1 에서의 $\int_x F_1\cdot ds$ 혹은 $\int_x F_2\cdot ds$ 중에서 하나가 맞았을 경우 각 4점씩

③ 답을 $2n\pi$로 구한 경우 (4점).

---

* 2-1 에서 $\int_x F_1\cdot ds = 2\pi$ 로 계산한 경우 0점.

* $\int_x F_2\cdot ds = 0$ 을 장재함수, 폐곡선, 푸앵카레의 보움정리를 언급하여 유도한 경우 0점.

$\int_x F_2\cdot ds$ 를 계산할 때, $\int_0^{2\pi} \underbrace{-n\sin nt\cdot 2020^{\cos nt}}_{ⓐ}\,dt$ 를 ⓐ 가 $(\pi, 0)$ 에서 점대칭임을 이용하여

계산하는 것도 인정.

문제 9 모범답안

(a) $\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{\overrightarrow{OA}} \mathbb{F}\cdot ds + \int_{\overrightarrow{AC}} \mathbb{F}\cdot ds$

$\int_{C_2} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{\overrightarrow{OB}} \mathbb{F}\cdot ds + \int_{\overrightarrow{BC}} \mathbb{F}\cdot ds$ 임을 알 수 있다.

이때, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}$ 는 왼쪽 점에서 오른쪽 점으로 가는 직선경로를 의미한다.

각각을 $(t,0); 0\le t\le a$, $(a,t); 0\le t\le b$, $(0,t); 0\le t\le b$, $(t,b); 0\le t\le a$ 로 매개화할 수 있다. 이를 각각 $X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)$ 로 표기한다.

$$\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{\overrightarrow{OA}} \mathbb{F}\cdot ds + \int_{\overrightarrow{AC}} \mathbb{F}\cdot ds$$

$$= \int_0^a \big(P(X_1(t)), Q(X_1(t))\big)\cdot \underbrace{X_1'(t)}_{(X_1'(t)=(1,0))} dt + \int_0^b \big(P(X_2(t)), Q(X_2(t))\big)\cdot \underbrace{X_2'(t)}_{(X_2'(t)=(0,1))} dt$$

$$= \int_0^a P(t,0)\,dt + \int_0^b Q(a,t)\,dt$$

$$\int_{C_2} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{\overrightarrow{OB}} \mathbb{F}\cdot ds + \int_{\overrightarrow{BC}} \mathbb{F}\cdot ds$$

$$= \int_0^b \big(P(X_3(t)), Q(X_3(t))\big)\cdot \underbrace{X_3'(t)}_{(X_3'(t)=(0,1))} dt + \int_0^a \big(P(X_4(t)), Q(X_4(t))\big)\cdot \underbrace{X_4'(t)}_{(X_4'(t)=(1,0))} dt$$

$$= \int_0^b Q(0,t)\,dt + \int_0^a P(t,b)\,dt.$$

$\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{C_2} \mathbb{F}\cdot ds$ 이므로 $\int_0^a P(t,0)\,dt + \int_0^b Q(a,t)\,dt = \int_0^b Q(0,t)\,dt + \int_0^a P(t,b)\,dt$

이고 양변을 정리하면 $\int_0^a P(t,b)\,dt - \int_0^a P(t,0)\,dt = \int_0^b Q(a,t)\,dt - \int_0^b Q(0,t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^a \big(P(t,b) - P(t,0)\big)\,dt = \int_0^b \big(Q(a,s) - Q(0,s)\big)\,ds$$ 를 얻는다.

채점기준. $\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot ds$ 와 $\int_{C_2} \mathbb{F}\cdot ds$ 를 위와 같은 적분꼴로 나타내는 것에 각 2점.

마지막 결론 도출하는 데에 1점.

잠재함수가 존재한다고 가정하여 풀이한 경우 0점 부여.

(b) $\boxed{\text{풀이 1}}$ $\int_0^a (P(t,b) - P(t,0))\,dt = \int_0^b (Q(a,s) - Q(0,s))\,ds$ 등식에 대해 미분연산자 $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b}$ 를 적용한다. 벡터장 $\mathbb{F}$는 이급함수이므로 편미분교환법칙과 라이프니츠 정리를 적용할 수 있다.

좌변은 $\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\int_0^a (P(t,b) - P(t,0))\,dt = \frac{\partial}{\partial a}\int_0^a \frac{\partial}{\partial b}(P(t,b) - P(t,0))\,dt$

$= \frac{\partial}{\partial a}\int_0^a \frac{\partial}{\partial b}P(t,b)\,dt$

미적분학의 기본정리에 의해 $= \frac{\partial}{\partial b}P(a,b)$

우변은 편미분교환법칙에 의해

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\int_0^b (Q(a,s) - Q(0,s))\,ds = \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^b (Q(a,s) - Q(0,s))\,ds$$

라이프니츠 정리에 의해 $= \frac{\partial}{\partial b}\int_0^b \frac{\partial}{\partial a}(Q(a,s) - Q(0,s))\,ds$

$= \frac{\partial}{\partial b}\int_0^b \frac{\partial Q}{\partial a}(a,s)$

미적분학의 기본정리에 의해 $= \frac{\partial}{\partial a}Q(a,b)$

이를 종합하여 $\frac{\partial}{\partial b}P(a,b) = \frac{\partial}{\partial a}Q(a,b)$를 얻는다.

$\boxed{\text{풀이 2}}$ $\int_0^a (P(t,b) - P(t,0))\,dt = \int_0^b (Q(a,s) - Q(0,s))\,ds$ 등식에 대해 미분연산자 $\frac{\partial}{\partial a}$를 적용한다.

좌변은 미적분학의 기본정리에 의해, 우변은 라이프니츠 정리에 의해

$$P(a,b) - P(a,0) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial a}Q(a,s)\,ds$$

를 얻는다. 다시 미분연산자 $\frac{\partial}{\partial b}$를 적용한다.

우변에 미적분학의 기본정리를 적용하여 $\frac{\partial}{\partial b}P(a,b) = \frac{\partial}{\partial a}Q(a,b)$를 얻는다.

채점기준 : $\boxed{\text{풀이 1}}$에서 편미분교환법칙, 라이프니츠 정리를 사용하지 않고 결과를 도출한 경우 2점 감점.

$\boxed{\text{풀이 2}}$에서 라이프니츠 정리를 사용하지 않고 결과를 도출한 경우 2점감점.

모든 풀이에서 결론을 내지 못하고 미분연산만 정확히 한 경우 3점 부여.

잠재함수가 존재한다고 가정하고 풀이한 경우 0점 부여.

#10. $X(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $t \in [0, \pi/2]$ 에 대해

$\int_X 2xe^z dx + \sin z\, dy + (x^2e^z + y\cos z) dz$ 를 계산하시오.

(sol) $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 를

$\mathbb{F}(x,y,z) = (2xe^z, \sin z, x^2e^z + y\cos z)$ 로 정의하면

$\int_X 2xe^z dx + \int \sin z\, dy + (x^2e^z + y\cos z) dz = \int_X \mathbb{F} \cdot ds$ 이다.

이제 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 을 $\varphi(x,y,z) = x^2e^z + y\sin z$ 로 정의하면.

$(\nabla\varphi)(x,y,z) = (D_1\varphi(x,y,z), D_2\varphi(x,y,z), D_3\varphi(x,y,z))$

$= (2xe^z, \sin z, x^2e^z + y\cos z) = \mathbb{F}(x,y,z)$ 이므로

$\nabla\varphi = \mathbb{F}$ 가 되어 φ는 $\mathbb{F}$의 잠재함수가 된다. (a) +5

따라서, 선적분의 기본정리에 의해 (b) +1

$\int_X \mathbb{F} \cdot ds = \int_X \nabla\varphi \cdot ds = \int_{\partial X} \varphi = \varphi(X(\pi/2)) - \varphi(X(0))$

$= \varphi(1,0,0) - \varphi(0,1,0)$ (c) +1 (d) +1

$= 1 - 0 = 1$ 이다. (e) +2 □

- (a)에서 아무런 설명 없이 $\varphi(x,y,z) = x^2e^z + y\sin z$ 라고만 쓴 경우 0점.
  적어도 $\nabla\varphi = \mathbb{F}$ 나 잠재함수라는 언급이 있어야함.
- (a)에서 0점이면 뒤에서도 0점.
- (b)에서 '선적분의 기본정리', '미적분학의 기본정리' 등의 언급이 없거나
  $\int_X \mathbb{F} \cdot ds = \int_X \nabla\varphi \cdot ds = \int_{\partial X}\varphi$ 라는 수식 없이 $\int_X \mathbb{F} \cdot ds = \varphi(X(\pi/2)) - \varphi(X(0))$ 라고만 쓴 경우
  1점 감점.
- (c), (d) 에서 $X(\pi/2)$, $X(0)$을 잘못 계산하면 각 1점 감점.
- (e) 에서 답 계산이 틀린경우 2점 감점.
- 미분형식의 언어로 풀었어도 (a) - (e)에 준하는 설명이 있으면 풀이로 인정.
- 논리적인 gap이 있거나 서술이 미흡한 부분이 있는 경우 추가 감점이 있을 수 있음.

(sol 2) $X(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $t \in [0, \pi/2]$ 이므로, 선적분의 정의에 따라

$$\int_X 2xe^z\,dx + \sin z\,dy + (x^2e^z + y\cos z)\,dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2\sin t\, e^{\sin 2t} \cdot \cos t + \sin(\sin 2t)\cdot(-\sin t) + \left((\sin t)^2 e^{\sin 2t} + \cos t \cdot \cos(\sin 2t)\right)\cdot 2\cos 2t\right) dt$$

$$= \underbrace{\left[\sin^2 t\, e^{\sin 2t} + \sin(\sin 2t)\cdot \cos t\right]_0^{\pi/2}}_{(f)} +5$$

$$= \underbrace{1}_{(g)} +5.$$

• 각 (f), (g) 에서 끝까지 계산하지 않았으면 부분점수 없음.
