2018년 여름 계절학기

수학 및 연습 2 중간고사

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \cdot \frac{|\sqrt{x^2y^2}|}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}$

$\displaystyle \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}} \cdot |y| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$\therefore \displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$ $\Rightarrow$ 연속

* $x^4+y^4+x^2y^2 \geq 3x^2y^2$를 사용했을 시 x축, y축의 경우를 언급하지 않은 경우

극좌표계를 사용했을 시 분모가 0이 아님을 명시하지 않은 경우

$\Rightarrow -2$점

(b) $\displaystyle D_1 f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{0\cdot t^2}{\sqrt{t^4}}}{t} = 0$

$\displaystyle D_2 f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{t^4}}}{t} = 0$

(c) 미분가능하기 위해서는 $D_v f = \mathrm{grad}f \cdot V$를 만족해야 한다.

$V=(1,1)$이라 하면 $\displaystyle D_v f = \lim_{t\to0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{\sqrt{2}t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{t^3}{\sqrt{3t^4}}}{\sqrt{2}t}$

$\displaystyle = \lim_{t\to0} \frac{t^3}{\sqrt{6}t^3} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 이다. 이는 우변 $\mathrm{grad}f \cdot V = (0,0)\cdot(1,1) = 0$

과 다르다. $\Rightarrow$ 미분불가능하다.

2. $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2+6yz+6xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(3z^2+6xy)\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2+6yz=0$$

$$z^2+2xy\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x^2-2yz}{z^2+2xy}$$

* 부분점수 없음

3. (a) 가장 빨리 함숫값이 증가하는 방향은 grad f와 평행하다. $\mathrm{grad} f=(-2xe^{-x^2-2y^2}, -4ye^{-x^2-2y^2})$

$$=(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \left(r=\sqrt{(-2xe^{-x^2-2y^2})^2+(-4ye^{-x^2-2y^2})^2}\right)$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\left.\frac{-4ye^{-x^2-2y^2}}{-2xe^{-x^2-2y^2}}\right|_{(x,y)=(1,1)}=\frac{4e^{-3}}{2e^{-3}}=2$$

* grad f를 제대로 구하면 3점

(b) $g(x,y,z)=e^{-x^2-2y^2}-z$ 라 하면 $(1,1,e^{-3})$은 $g(x,y,z)=0$ 인 등위면 위의 점이다.

$$\mathrm{grad}\, g=(-2xe^{-x^2-2y^2}, -4ye^{-x^2-2y^2}, -1) \rightarrow \mathrm{grad}\, g(1,1,e^{-3})=(-2e^{-3},-4e^{-3},-1)$$

$\rightarrow$ 등위면의 접평면은 $(-2e^{-3},-4e^{-3},-1)\cdot(x-1,y-1,z-e^{-3})=0$

$$\Rightarrow 2x+4y+e^3z-7=0$$

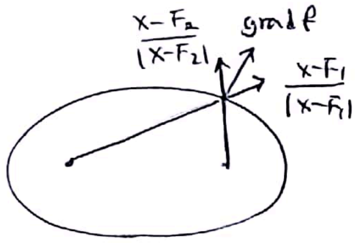
* grad g를 제대로 구하면 3점

4. 힌트를 이용하면 $f(X) = |X-F_1| + |X-F_2|$

$\Rightarrow$ $\text{grad} f(x) = \dfrac{X-F_1}{|X-F_1|} + \dfrac{X-F_2}{|X-F_2|}$. 는 두 단위벡터의

합으로 나타난다.

+5



두 단위벡터의 사이각을 2θ 라고 하면

$$|\text{grad} f| = \sqrt{1+1+2\cos 2\theta} = 2\cos\theta$$

그러므로 grad f 와 $\dfrac{X-F_1}{|X-F_1|}$ 의 사이각은 θ 이고

마찬가지로 grad f 와 $\dfrac{X-F_2}{|X-F_2|}$ 의 사이각도 θ 이다.

+10.

책 461p. 에 나오는 식 을 이용해 풀 경우, 식을 바르게 명시하면 5점.

- $V_* = V - 2\dfrac{V \cdot N}{N \cdot N} N$ / 그 후 풀이가 올바르면 만점.

* 그외 도형을 이용한 풀이는 완벽한 경우 만점, 그외 부분점수 없음.

5. $f(x,y) = \int_{y^2}^{x} \frac{e^{xt^2}}{t}\,dt$

$$D_1 f(x,y) = \frac{e^{x^3}}{x} + \int_{y^2}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt^2}}{t}\right)dt$$

$$= \frac{e^{x^3}}{x} + \int_{y^2}^{x} t e^{xt^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{2x}e^{x^3} - \frac{1}{2x}e^{xy^4}$$

4점

$$D_2 f(x,y) = -\frac{e^{xy^4}}{y^2}\cdot 2y = -2\frac{e^{xy^4}}{y}$$

4점

$$\therefore \text{grad } f(2,1) = \left(\frac{1}{4}(3e^8 - e^2),\ -2e^2\right)$$

2점

＊ 계산이 틀리면 부분점수 X

5. $f(x,y) = \int_{y^2}^{x} \frac{e^{xt^2}}{t}\,dt$

$$D_1 f(x,y) = \frac{e^{x^3}}{x} + \int_{y^2}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xt^2}}{t}\right)dt$$

$$= \frac{e^{x^3}}{x} + \int_{y^2}^{x} t e^{xt^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{2x}e^{x^3} - \frac{1}{2x}e^{xy^4}$$

4점

$$D_2 f(x,y) = -\frac{e^{xy^4}}{y^2}\cdot 2y = -2\frac{e^{xy^4}}{y}$$

4점

$$\therefore \operatorname{grad} f(2,1) = \left(\frac{1}{4}(3e^8 - e^2), -2e^2\right)$$

2점

* 계산이 틀리면 부분점수 X

Scanned by CamScanner

6. $f(x,y) = e^x \log(1+y)$

(a) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$$

$$e^x \log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}y^3 + o(\sqrt{x^2+y^2}^3)$$

테일러 전개의 유일성에 의해

$$T_3 f(x,y) = y - \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}y^3$$

(b) $D_1^4 f(x,y) = e^x \log(1+y)$ $D_1 D_2^3 f(x,y) = \frac{2e^x}{(1+y)^3}$

$D_1^3 D_2 f(x,y) = \frac{e^x}{1+y}$ $D_2^4 f(x,y) = -\frac{6e^x}{(1+y)^4}$

$D_1^2 D_2^2 f(x,y) = -\frac{e^x}{(1+y)^2}$

$$M_4 = \max\left\{ |D_{i_1}\cdots D_{i_4} f(0.1t, 0.1t)| : \begin{matrix} 1 \le i_1, i_2, i_3, i_4 \le 2 \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\le \frac{6e^{0.1}}{1^4} < 7.2$$

이므로

$$|R_3| \le M_4 \cdot \frac{(0.1+0.1)^4}{4!} < 7.2 \times \frac{1}{4!} \times 0.2^4 < 5 \times 10^{-4}$$

* (a) 다항식을 완벽히 구해야만 3점, $o(\sqrt{x^2+y^2}^3)$를 (혹은 테일러급수를) 잘 쓰면 1점
'테일러 전개의 유일성' 언급 1점

(b) 4계미분 계산 4점
M_4 계산 3점. R_3의 공식 정확히 언급 후 사용 3점

#7. $g(x,y,z) := \underline{z^2 + xy^2 - 1 = 0}$ ① 일 때 $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$
이 최소가 되는 (x,y,z)를 구해야 한다.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = 2(x,y,z)$$
$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (y^2, 2xy, 2z).$$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$
$\Rightarrow z^2 + xy^2 - 1 = 0$을 만족하지 않음.

∴ 주어진 곡면 위에서는 $\operatorname{grad} f(x,y,z) \neq 0$ 이다. … (*)

∴ 라그랑즈 승수법에 의해 (x,y,z)가 주어진 곡면에서 f의 극점이면

$$(y^2, 2xy, 2z) = 2\lambda(x,y,z)$$ ⌋ 5점

인 실수 λ가 존재한다.

$$\begin{cases} 2\lambda x = y^2 & \cdots ② \\ 2\lambda y = 2xy & \cdots ③ \\ 2z = 2\lambda z & \cdots ④ \end{cases}$$

④ $\Rightarrow z = 0$ or $\lambda = 1$.

- $\lambda = 1$인 경우: $\lambda = 1$을 ③에 대입하면 $2y = 2xy$
  $\Rightarrow x = 1$ or $y = 0$.
  - ②에 $x=1$과 $\lambda=1$을 대입하면 $y^2 = 2$.
    $x = 1, y^2 = 2$이면 ①을 만족하는 실수 z가 존재하지 않음.
  - ②에 $y=0$과 $\lambda=1$을 대입하면 $x=0$.
    $x=0, y=0$이면 ①로부터 $z = \pm 1$. $\to \underline{(0,0,1)}, \underline{(0,0,-1)}$ … (**)

- $z=0$인 경우: $z=0$을 ①에 대입하면 $xy^2 = 1$.
  $xy^2 = 1$을 ②에 대입하면 $x^2 = \frac{1}{2\lambda}$
  $xy^2 = 1$을 ③에 대입하면 $y^2 = \frac{1}{\lambda}$
  $\Rightarrow y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}x.$

  $z=0, y=\pm\sqrt{2}x$를 ①에 대입하면 $2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}}$
  $\Rightarrow y = \pm\sqrt{2}x$이므로 $y = \pm 2^{\frac{1}{6}}$

  $\to \underline{(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{6}}, 0)}, \underline{(2^{-\frac{1}{3}}, -2^{\frac{1}{6}}, 0)}$ … (***)

⌋ 12점

$$f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 1.$$

$$f(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{6}}, 0) = f(2^{-\frac{1}{3}}, -2^{\frac{1}{6}}, 0) = 3\cdot 2^{-\frac{2}{3}} > 1.$$

∴ 곡면 $z^2+xy^2-1=0$ 위의 점 중 원점과 가장 가까운 점은 $(0,0,1), (0,0,-1)$ 이며, $\boxed{\text{최단거리는 } 1}$ 임을 안다. 15점.

정답.

* 채점 기준

- (*)를 쓰지 않으면 첫 5점 중 3점 감점.
- (**)와 (***)의 네 점 중 하나라도 빠지면 부분점수 없음.

#8. $f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - y,\ -3y^2 - x) = (0,0)$ 인 (x,y)가 임계점이다.

$\Rightarrow y = 3x^2,\quad x = -3y^2.$

연립해서 풀면 $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 가 임계점임을 안다. ┘+5점

헤세 행렬 $f''(x,y) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x,y) & D_1 D_2 f(x,y) \\ D_2 D_1 f(x,y) & D_2^2 f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & -6y \end{pmatrix}$ ┘+5점

- $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

  $\det f''(0,0) = -1 < 0$ 이므로 $(0,0)$은 안장점이다.

- $f''\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

  $\det f''\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 4 - 1 = 3 > 0$ 이고 $-2 < 0$ 이므로 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$은 극대점이다.

+5점.

※ 채점 기준

- 임계점은 모두 맞았으나, 둘 중 한 점의 극대·극소·안장점 여부를 잘못 판정하면 마지막 5점 중 2점만 부여함.

#9. $F(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\Rightarrow F(2, \frac{\pi}{6}) = (\sqrt{3}, 1)$.

$\therefore 3 = \det (G \circ F)'(2, \frac{\pi}{6})$

$= \det \left(G'(F(2, \frac{\pi}{6}))\, F'(2, \frac{\pi}{6}) \right)$

$= \det \left(G'(\sqrt{3}, 1)\, F'(2, \frac{\pi}{6}) \right)$

$= \det G'(\sqrt{3}, 1) \det F'(2, \frac{\pi}{6})$. $\cdots (\star)$

$F'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ 에서 $\det F'(r,\theta) = r$ 이므로

$\det F'(2, \frac{\pi}{6}) = 2$ 이다. 이것을 $(\star)$에 대입하면

$\det G'(\sqrt{3}, 1) = \frac{3}{2}$ 5점

을 얻는다. $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$는 선형사상이므로, $G'(x,y)$는 선형사상 G에 대응되는 행렬과 같으며 따라서 (x,y)에 의존하지 않는다.

$\therefore \det G'(1,1) = \det G'(\sqrt{3}, 1) = \boxed{\frac{3}{2}}$ 10점.

정답.

#10. $X(t) = (t, \sin t, \cos t) \quad (1 \leqq t \leqq e^2)$

$\Rightarrow X'(t) = (1, \cos t, -\sin t)$.

$\therefore \int_X \log x\, dx - z\,dy + y\,dz = \int_1^{e^2} (\log t, -\cos t, \sin t) \cdot (1, \cos t, -\sin t)\, dt$ 5점

$= \int_1^{e^2} (\log t - \cos^2 t - \sin^2 t)\, dt$

$= \int_1^{e^2} (\log t - 1)\, dt$

$= \left[t\log t - t - t \right]_1^{e^2}$

$= \boxed{2}$

정답. 10점.

11. $\varphi = yz^2\sin x + \cosh(1+yz) + \frac{1}{2}z^2$

라고 하자.

그럼 $\operatorname{grad}\varphi = F$ 이다.

벡터장이 정의된 xyz-공간은 연결되어 있으므로

잠재함수의 유일성에 의해

$\varphi_c = yz^2\sin x + \cosh(1+yz) + \frac{1}{2}z^2 + C$ 이

우리가 구하려는 모든 잠재함수이다.

채점기준.

① φ만 구한 경우 3점.

② φ_c 까지 구한 경우 5점.

③ φ_c 가 모든 잠재함수임을 보이면 5점. (유일성)

* 유일성을 $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz^2\cos x$ 로부터

$\varphi = yz^2\sin x + h(y,z) + C_1$ 이고

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}'(y,z) = z\sinh(1+yz)$ 이므로.

$h = \cosh(1+yz) + g(z) + C_2$ 이고.

마찬가지 방법에 의해 $g = \frac{1}{2}z^2$ 이다.

따라서 $\varphi = yz^2\sin x + \cosh(1+yz) + \frac{1}{2}z^2 + C$ 로 보여도 인정.

#12 (a). $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ 에서.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

따라서 F는 닫힌 벡터장이다.

5점.

(b) $H = \{(x,y) \mid x>0\}$은 열린 볼록 집합이므로

푸앵카레 도움정리에 의해 잠재함수를 갖는다.

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 라고 하면

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times -\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$ 이다.

따라서 φ는 F의 잠재함수이다. 5점.

(c) F가 잠재함수를 가지므로 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_X F\cdot ds = \varphi(1,1) - \varphi(1,-1) \quad \left(\begin{array}{l} \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ X(t_0) = (1,-1) \\ X(t_1) = (1,1) \end{array} \right)$$

$$= \arctan(1) - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$ 5점

*채점 기준

(a) 계산이 틀리거나 없으면 0점.

(b) 잠재함수의 존재성만 보인 경우 -3점.

(c) 각원소벡터장의 성질을 이용해도 답이 맞으면 5점.

$-\frac{\pi}{2}$, 90° 라고 답을 쓴 경우 -3점.