

## 수학 및 연습 2 중간고사

(2017년 7월 10일 11:00-13:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^6 + y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

- (a) (5점) 함수  $f$  가 원점에서 연속임을 보이시오.
- (b) (5점)  $D_1 f(0, 0)$  와  $D_2 f(0, 0)$  를 구하시오.
- (c) (5점) 함수  $f$  가 원점에서 미분가능함을 판정하시오.

문제 2. [10점] 점  $P \in \mathbb{R}^2$  근방에서 정의된 미분가능함수  $f(x, y)$  가  $(1, 1)$  방향 단위벡터  $\mathbf{v}$  와  $(0, -2)$  방향 단위벡터  $\mathbf{w}$  에 대하여

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = 2\sqrt{2}, \quad D_{\mathbf{w}} f(P) = -3$$

을 만족한다고 한다.  $\mathbf{u}$  를  $(-1, -2)$  방향 단위벡터라 할 때  $D_{\mathbf{u}} f(P)$  를 구하시오.

문제 3. [15점] 함수  $f(x, y, z) = \frac{x}{yz^2}$  과 점  $P = (4, 1, 2)$  에 대하여 다음 질문에 답하시오.

- (a) (5점) 점  $P$  에서 함수  $f$  의 기울기 벡터를 구하시오.
- (b) (5점) 점  $P$  에서 등위면  $f(x, y, z) = 1$  의 접평면을 구하시오.
- (c) (5점) 점  $P$  에서  $f(x, y, z)$  가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위 벡터를  $\mathbf{v}$  라고 할 때,  $D_{\mathbf{v}} f(P)$  를 구하시오.

문제 4. [15점]  $\mathbb{R}^2$  에서 정의된 이급함수  $f(u, v)$  와 변환

$$(u, v) = G(x, y) = \left( \frac{x^2 - y^2}{2}, xy \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$  임을 보이시오.
- (b) (5점)  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$  이면,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  임을 보이시오.

문제 5. [10점]  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  인 영역에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \int_{x+y}^{x^2 y} \frac{\sin(xt)}{t} dt$$

에 대하여  $\text{grad} f(x, y)$  를 구하시오.

문제 6. [15점] 점  $P = (1, 0)$  과 함수  $f(x, y) = \sin(e^y + x^2 - 2)$  에 대하여  $P$  에서  $f(x, y)$  의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [10점] 함수  $f(x, y) = y^3 + 3x^2 y - 6x^2 - 6y^2 + 2$  의 모든 임계점을 구하고, 각각의 임계점이 극대점인지 극소점인지 안장점인지 판정하시오.

문제 8. [15점] 구면  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  에서 정의된 함수  $f(x, y, z) = xy + yz + 3$  의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 9. [10점] 미분가능한 함수  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  와  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  가 다음 조건을 만족한다.

$$f(1, 1) = (1, 0), \quad (g \circ f)'(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이 때,  $f'(1, 1)$  을 구하시오.

문제 10. [10점] 곡선  $X(t) = (t - \sin t - \pi, 1 - \cos t, 0)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 와 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, x^2 + y^2)$  에 대하여

$$\int_X \mathbf{F} \cdot ds$$

를 구하시오.

문제 11. [15점] 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \sin(yz) + 1, x^2 z \cos(yz) + 3y^2 e^z, x^2 y \cos(yz) + e^z y^3)$$

의 잠재함수를 구하고, 곡선  $X(t) = (e^t, \cos t, t)$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) 에 대하여  $\int_X \mathbf{F} \cdot ds$  를 구하시오.

문제 12. [10점] 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F라고 쓰시오. (풀이과정 불필요.)

- (a) (2점) 각원소 벡터장은  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  에서 잠재함수를 가진다.
- (b) (2점) 모든 일급 벡터장은 국소적으로 잠재함수를 가진다.
- (c) (2점)  $\mathbb{R}^n$  의 열린집합에서 정의된 일급 벡터장  $\mathbf{F}$  의 임의의 두 잠재함수  $\phi$  와  $\psi$  에 대하여,  $\phi - \psi$  는 상수함수이다.
- (d) (2점) 입체각 벡터장은  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  에서 닫힌 벡터장이다.
- (e) (2점)  $\mathbb{R}^n$  의 열린집합  $U$ 에서 정의된 벡터장  $\mathbf{F}$  에 대하여, 영역  $U$  속의 임의의 닫힌 곡선  $C$  에 대하여  $\int_C \mathbf{F} \cdot ds = 0$  이면,  $\mathbf{F}$  는 닫힌 벡터장이다.