수학 및 연습 2 중간고사

(2017년 10월 21일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [15점] 주어진 함수에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) (5점) 함수 f 의 원점에서의 연속성을 조사하시오.

(b) (5점) $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$ 를 구하시오.

(c) (5점) 함수 f 의 원점에서의 미분가능성을 조사하시오.

문제 2. [15점] $w = x^2 f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 2w$$

문제 3. [15점] 좌표공간에서 식

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$$

로 주어지는 타원면을 생각하자. 타원면 위에있는 점 $P=(a,b,c)$ 에 대하여 점 P 에서의 접평면이 원점을 지나는 조건을 만족하는 점 P 들의 집합은 하나의 평면안에 들어있다. 이 평면의 방정식을 구하시오.

문제 4. [15점] 이급함수 $f(x,y)$ 가

$$D_1f(1,\sqrt{3}) = \sqrt{3},\ \ D_2f(1,\sqrt{3}) = 1+2\sqrt{3},$$
$$D_1^2f(1,\sqrt{3}) = 0,\ \ D_1D_2f(1,\sqrt{3}) = 1,\ \ D_2^2f(1,\sqrt{3}) = 2$$

를 만족한다. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 라 할 때, 점 $(r,\theta) = \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에서

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

의 값을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수 $f(x,y) = x^3y + 2xy^2 - xy$ 의 임계점을 모두 구하고, 그 점들을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

문제 6. [15점] 좌표평면에 있는 곡선 $x^3+y^3+6xy=8$ 에서의 함수 $f(x,y)=x^2+y^2$ 의 최솟값을 구하시오.

문제 7. [15점] 함수 $f(x,y) = e^{x+xy}\log(1-xy)$에 대하여 물음에 답하시오.

(a) (5점) 원점에서 f 의 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) (10점) $D_1^3D_2^3f(0,0)$을 구하시오.

문제 8. [15점] 벡터함수 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$와 $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$는 다음과 같이 주어질 때,

$$f(s,t) = (e^{2s+t}, 3t-\cos s, s^2+t+2)$$
$$g(x,y,z) = (3x+2y+z^2, x^2-z+1)$$

벡터함수 $F = g\circ f$와 $G = f\circ g$에 대하여, $F'(0,0)$과 $G'(0,0,0)$을 각각 구하시오.

문제 9. [15점] 좌표평면에서 정의된 영역 $D = \left\{(x,y) \mid 0 < x < \dfrac{1}{2}\ ,\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ 에서 정의된 사상 $F(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y) = (u,v)$와 F의 역사상 $G(u,v) = (x,y)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 영역 D의 F에 의한 상을 uv-평면 위에 그리시오.

(b) (10점) $G'(u,v)$ 와 $\det G'(u,v)$를 u,v 로 표현하시오.

문제 10. [15점] 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + x^2y\right)\mathbf{j}$$

를 곡선 $y = 2-x^2$ 을 따라서 점 $(-1,1)$ 에서 점 $(\sqrt{2},0)$ 까지 적분한 값을 구하시오.