2017년 2학기 수학 및 연습 2
중간고사 채점기준

1. (a) $(x, y) \neq (0, 0)$ 일 때

$$|f(x,y)| = \frac{|x| \cdot |x^3 y^2|}{|x^6 + y^4|}$$

산술·기하평균 부등식에 의해

$$|x^3 y^2| \leq \frac{x^6 + y^4}{2}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| |x^6 + y^4|}{2 |x^6 + y^4|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0.$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ 이므로 f는 원점에서 연속.

- 산술·기하평균 부등식을 이용할 때 절댓값을 적용하지 않은 경우 (−1)
- $|f(x,y)| \leq \frac{|x^4 y^2|}{2|x^3 y^2|}$ 등과 같이 분모를 변형한 경우

  분모가 0이 되는 경우를 고려하지 않으면 (−2)
- 부등식을 전개할 때 중간과정에 대한 설명이 부족한 경우

  (−3)

(b) $D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$.

- 답이 맞아도 식이 틀린 경우 점수 없음.

(c) f가 원점에서 미분가능하다면

$$\lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{|f(\vec{v}) - f(0) - \mathrm{grad} f(0)\cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = 0$$

$\vec{v} = (a, b)$라 하면 $f(0)=0$, $\mathrm{grad} f(0) = (0,0)$ 이므로

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{\frac{a^4b^2}{a^6+b^4}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^4b^2}{(a^6+b^4)\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

그런데 $a^3=b^2$ 인 경우

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^4b^2}{(a^6+b^4)\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{a\to 0} \frac{a^7}{2a^6|a|\sqrt{1+a}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

위의 가정에 모순

∴ f는 원점에서 미분불가능.

- 부분점수 없음.

2.

$\frac{y}{x} = u, \quad \frac{z}{x} = v$ 라 하자.

$w = x^2 f(u,v)$ 이므로

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x f(u,v) + x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$$

$$= 2x f(u,v) + x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= 2x f(u,v) + x^2 \left(D_1 f(u,v) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + D_2 f(u,v) \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) \right)$$

$$= 2x f(u,v) - y D_1 f(u,v) - z D_2 f(u,v) \quad \cdots ① \quad +6$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$$

$$= x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= x^2 \left(D_1 f(u,v) \cdot \frac{1}{x} + D_2 f(u,v) \cdot 0 \right)$$

$$= x D_1 f(u,v) \quad \cdots ② \quad +3$$

마찬가지로 $\frac{\partial w}{\partial z} = x D_2 f(u,v) \quad \cdots ③ \quad +3$

①, ②, ③ 에 의해 $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 2x^2 f(u,v) = 2w \quad \cdots ④ \quad +3$

채점 기준

- 편미분 기호를 잘못 사용한 경우 0점 (ex. $D_3 f$, f_1, f_2, …)
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ 를 더 전개하지 않은 경우 0점.
- ①, ②, ③ 중 하나라도 틀릴 경우 ④ 점수 없음.
- 기타 $\frac{\partial}{\partial x}$ 를 $\frac{d}{dx}$ 로 쓰는 등 미분기호를 쓰는 과정에서 사소한 실수는 감점 없음.

3. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2$ 라고 두자.

문제에서 주어진 타원면은 $f^{-1}(1)$ 등위면이다.

타원면에 있는 점 (a,b,c)의 접평면은 $\mathrm{grad} f(a,b,c)$를 법선벡터로 가진다.

$\mathrm{grad} f(a,b,c) = (2(a-1),\ 4(b-2),\ 6(z-3))$ 5

따라서 (a,b,c)에서의 접평면은 $(2(a-1),\ 4(b-2),\ 6(z-3))\cdot(x-a,\ y-b,\ z-c)=0$

이다.

접평면이 원점을 지나야하므로 $(0,0,0)$을 대입하면

$(2(a-1),\ 4(b-2),\ 6(z-3))\cdot(-a,\ -b,\ -c)=0$ 을 얻는다. 5

(a,b,c)는 타원면 위에 있으므로 $(a-1)^2+2(b-2)^2+3(c-3)^2=1$을 만족한다.

정리하면 다음의 연립방정식을 얻는다:

$$\begin{cases} a^2-a+2b^2-4b+3c^2-9c=0 \\ a^2-2a+2b^2-8b+3c^2-18c+35=0 \end{cases}$$

위의 식에서 아래식을 빼면 $a+4b+9c=35$를 얻는다.

5

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$\boxed{x+4y+9z=35}$$

4. $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$

$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta$ +3.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta\right)$$

$$= \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \cos\theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= \cos^2\theta \cdot D_1^2 f + 2\cos\theta\sin\theta \cdot D_1 D_2 f + \sin^2\theta \cdot D_2^2 f$$

+7.

(· 형태는 다르지만 연쇄법칙을 사용하여 이와 같은 식을 쓰면 +7.
· 전개 과정 중에 먼저 값을 대입하고 식을 전개하면 틀린 것으로 간주.).

$(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{3}) \longrightarrow (x, y) = (1, \sqrt{3})$ 을 대입하면,

답 : $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. +5

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2y^2 - y \quad -①$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4xy - x \quad -②$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 4y - 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$

f의 임계점 : ①, ② $= 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y(3x^2 + 2y - 1) = 0 \\ x(x^2 + 4y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) = (0,0), (-1,0), (1,0), (0, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{1}{5}), (-\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{1}{5})$$

각각의 경우 f''은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

로 계산되므로, 헤세 판정법에 의하여

$(0,0), (0,\tfrac{1}{2}), (-1,0), (1,0)$ 은 안장점,

$(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{1}{5})$는 극소점, $(-\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{1}{5})$는 극대점이다.

- ∇f 계산 : 5점
- f'' 계산, "헤세 판정법" 사용 : 4점
- 각 임계점별 판정이 맞아야 1점씩 획득.

#6

$g(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy - 8$

$S = \{ (x, y) \mid g(x, y) = 0 \}$

$D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 8 \}$ 라 두면

$S \cap D$ 는 공집합이 아닌 ($\because (-2, -2) \in S \cap D$)

유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 $S \cap D$ 위에서

최댓·최솟값을 갖는다 ($\because$ 최대·최소 정리)

이때, $S \cap D$ 위에서 $f(x, y) \le 8$ 이므로

$S \cap D$ 위에서 최솟값이 S에서의 최솟값이다.

4

i) $\nabla f(x, y) = 0$ 인 경우

$\nabla f = (2x, 2y) = (0, 0)$ 은 S에 들어가지 않음.

ii) $\nabla f(x, y) \neq 0$ 인 경우

라그랑주 승수법에 의해 극점에서

$\nabla g = \lambda \nabla f$ 인 λ가 존재한다.

3

($\because \nabla f \neq 0$)

3

#6 이어서)

$$\Rightarrow 3x^2 + 6y = 2\lambda x, \quad 3y^2 + 6x = 2\lambda y$$

$$\Rightarrow 2\lambda xy = \underline{3x^2y + 6y^2 = 3xy^2 + 6x^2} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow 3(x-y)(2x+2y-xy) = 0$$

a) $x=y$ 인 경우

$$0 = g(x,x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$$

$$\Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$= (x-1)(x+2)^2$$

$\therefore$ 최솟점 후보 $(1,1)$, $(-2,-2)$

$$(f(1,1) = 2, \quad f(-2,-2) = 8)$$

b) $2x + 2y = xy$ 인 경우

$$0 = g(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy - 8$$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 6xy - 8$$

$$= (x+y)^3 - 6(x+y)^2 + 12(x+y) - 8$$

$$= (x+y-2)^3$$

#6 이어서

$\Rightarrow \quad x+y=2, \quad xy=4$

하지만 위를 만족하는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

$\therefore$ S 위에서 f의 최솟값은 $f(1,1)=2$

5

7

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\log(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \cdots)$

에서 $e^{x+xy}\log(1-xy) = -(1 + (x+xy) + \frac{(x+xy)^2}{2!} + \cdots)(xy + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3y^3}{3} + \cdots)$

$= -xy - x^2y - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{2}x^3y^2 - \frac{1}{6}x^4y - \frac{4}{3}x^3y^3 - \frac{3}{4}x^4y^2 + \cdots$

테일러 전개의 유일성에 의하여,

$T_2 f((0,0)) = -xy$.

+5점

b)

a)와 마찬가지로 테일러 전개의 유일성에 의하여

$T_6 f((0,0))$을 구할 수 있고,

$\frac{{}_6C_3}{6!}(D_1^3 D_2^3 f)((0,0))$과 $T_6 f((0,0))$에서 x^3y^3의 계수가 같다.

따라서, $-xy \cdot (\frac{x^2y^2}{2}) - (\frac{x^2y^2}{2!}) \cdot xy - 1 \cdot \frac{x^3y^3}{3} = -\frac{4}{3}x^3y^3$ 에서,

+5점

$(D_1^3 D_2^3 f)((0,0)) = \frac{6!}{{}_6C_3} \cdot -\frac{4}{3} = -48$.

+5점

*) a), b) 각각 '테일러전개의 유일성'에 대한 언급이 없을시 2점씩 감점.

8

$$f'(s,t) = \begin{pmatrix} 2e^{2s+t} & e^{2s+t} \\ \sin s & 3 \\ 2s & 1 \end{pmatrix} \qquad g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z \\ 2x & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*

+7

$f(0,0) = (1,-1,2)$, $g(0,0,0) = (0,1)$ 이므로,

$$F'(0,0) = g'(f(0,0)) \cdot f'(0,0) = g'(1,-1,2) \cdot f'(0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

+4

$$G'(0,0,0) = f'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = f'(0,1) \cdot g'(0,0,0)$$

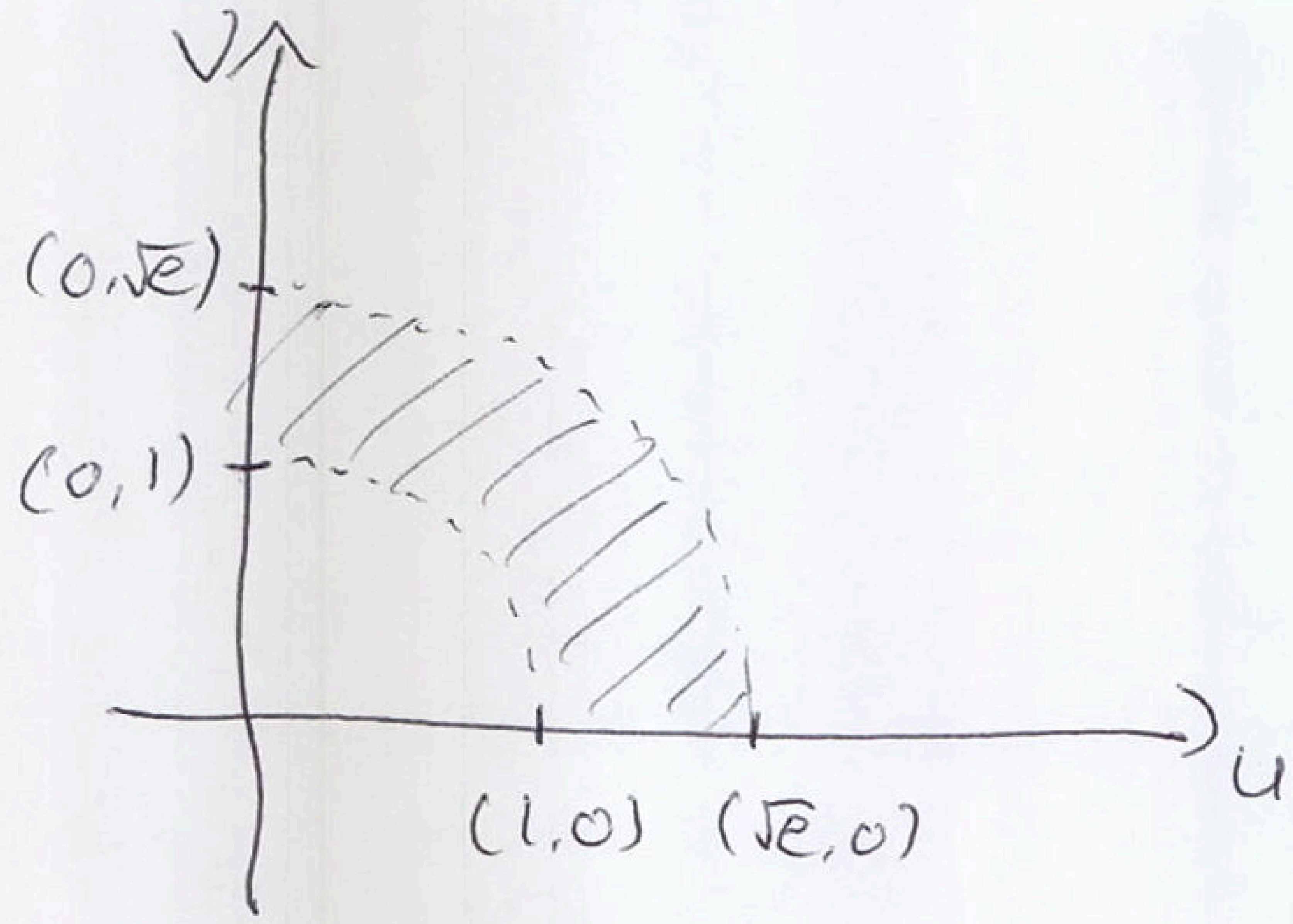
$$= \begin{pmatrix} 6e & 4e & -e \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

+4

- * 를 적지 않은 경우, $F'(0,0)$ 와 $G'(0,0,0)$ 중 하나가 틀리면 8점.
  둘 다 맞으면 15점.

- $f'(s,t)$, $g'(x,y,z)$를 전치 행렬로 적은 경우, 7점.

9.(a)



경계를 점선으로 그리지 않고
따로 언급이 없으면 -2점

9.(b)

$(F \circ G)(u,v) = (u,v)$

이므로 연쇄법칙에 의해

$F'(x,y)\,G'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서

$$G'(u,v) = (F'(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \\ \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

$$\det G'(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$G'(u,v)$ 만 맞고
$\det G'$ 틀리면 8점
$\det G'$을 따로 구해서
맞으면 3점
모두 맞으면 10점

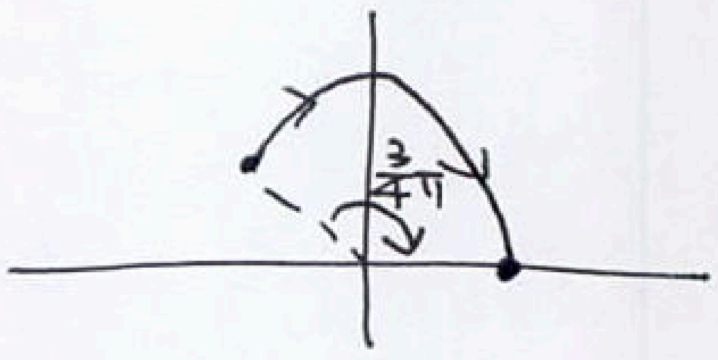
※ u, v로 표현하지 않으면 -1점
$\det G'$ 만 맞아도
과정에 오류가 있으면 0점
G'에서 역행렬 계산을
완전히 끝내지 않으면 점수없음

10. $F(x,y) = a(x,y) + (0, x^2 y)$ (a는 각원소 벡터장)

곡선 $X(t) = (t, 2-t^2)$ $(-1 \le t \le \sqrt{2})$

$\rightsquigarrow \int_X \vec{F} d\vec{s} = \underbrace{\int_X \vec{a}\, d\vec{s}}_{①} + \underbrace{\int_X (0, x^2 y)\, d\vec{s}}_{②}$

① = 곡선을 따른 각의 변화량



$\lrcorner + 2$

$= -\frac{3}{4}\pi$ (시계 방향 이므로) $\lrcorner + 5$

② $= \int_{-1}^{\sqrt{2}} (0, t^2(2-t^2)) \cdot (1, -2t)\, dt$

$\lrcorner + 3$

$= \int_{-1}^{\sqrt{2}} 2t^5 + 4t^3\, dt$

$= \cancel{\int_{-1}^{\sqrt{2}}} \left[\frac{t^6}{3} + t^4 \right]_{-1}^{\sqrt{2}}$

$= \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1$

$= -\frac{2}{3}$

$\lrcorner + 5$

$\therefore \int_X \vec{F} d\vec{s} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}$

※ ①, ② 계산시 곡선의 향 문제로 부호가 반대일 경우 각각 −2점