<2016년 여름학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안>

#1. (a) $0 \leq |f(x,y)| = \left| \dfrac{x^3 y \sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^2} \right|$

$$\leq \left| \frac{(x^6+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^6+y^2)} \right| \quad (\because \text{산술평균과 기하평균의 관계})$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ 이므로 주어진 함수는 원점에서 연속.

(b) $D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0.$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0.$

(c). 함수 f가 원점에서 미분가능하려면, $\lim_{v\to 0} \dfrac{f(0+v)-f(0)-\operatorname{grad} f(0,0)\cdot v}{|v|} = 0$

이어야 한다. (b)로부터 $\operatorname{grad} f(0,0) = (D_1 f(0,0), D_2 f(0,0)) = 0$ 이므로,

$$\underbrace{\lim_{v\to 0} \frac{f(0+v)-f(0)-\operatorname{grad} f(0,0)\cdot v}{|v|}}_{(*)} = \lim_{v\to 0} \frac{f(v)}{|v|}$$

$$= \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{\dfrac{a^3 b\sqrt{a^2+b^2}}{a^6+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

($v=(a,b)$로 표기)

$$= \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^3 b}{a^6+b^2}$$

그런데, $\lim_{\substack{(a,b)\to(0,0)\\ b=a^3}} \dfrac{a^3 b}{a^6+b^2} = \lim_{a\to 0} \dfrac{a^6}{a^6+a^6} = \dfrac{1}{2}$ 이므로 극한값 (*)은 0이 아님을 알 수 있다.

$\therefore$ 원점에서 미분 불가능하다.

※ 채점기준.

- 1-(a) 에서 절댓값이 빠지거나, 분모에 부등식을 적용하는 등의 사소한 실수는 2점 감점.
- 1-(b) 는 $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$ 중 하나만 맞으면 3점만 부여
- 1-(c) 는 부분점수 없음.

#2. $\frac{\partial f}{\partial \theta} = e^{-r^2\sin^2\theta} r\cos\theta + e^{-r^2\cos^2\theta} r\sin\theta$.

(∵ 미적분학 기본정리 + 연쇄법칙)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = -2r\sin^2\theta \cdot e^{-r^2\sin^2\theta} r\cos\theta + e^{-r^2\sin^2\theta}\cos\theta$$

$$-2r\cos^2\theta \cdot e^{-r^2\cos^2\theta} r\sin\theta + e^{-r^2\cos^2\theta}\sin\theta$$

$$= \underline{e^{-r^2\sin^2\theta}\cos\theta(1-2r^2\sin^2\theta) + e^{-r^2\cos^2\theta}\sin\theta(1-2r^2\cos^2\theta)}$$

정답.

별해) $\frac{\partial f}{\partial r} = e^{-r^2\sin^2\theta}\sin\theta - e^{-r^2\cos^2\theta}\cos\theta$ 를 먼저 계산하고, 이것으로부터

$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$ 를 계산해도 된다.

* 채점기준

- $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 혹은 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 를 정확히 계산하면 10점.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$ 까지 맞으면 15점.

3. (15점)

직선의 방정식 : $X(t) = (0,0,3) + t(1,2,-6) = (t, 2t, -6t+3)$, $t \in \mathbb{R}$.

곡면과의 교점 : $-6t+3 = t^2 - 4t^2$

$\Longleftrightarrow 3(t-1)^2 = 0$ $\therefore$ $t=1$ 일때 점 $(1,2,-3) = P$

→ 5점.

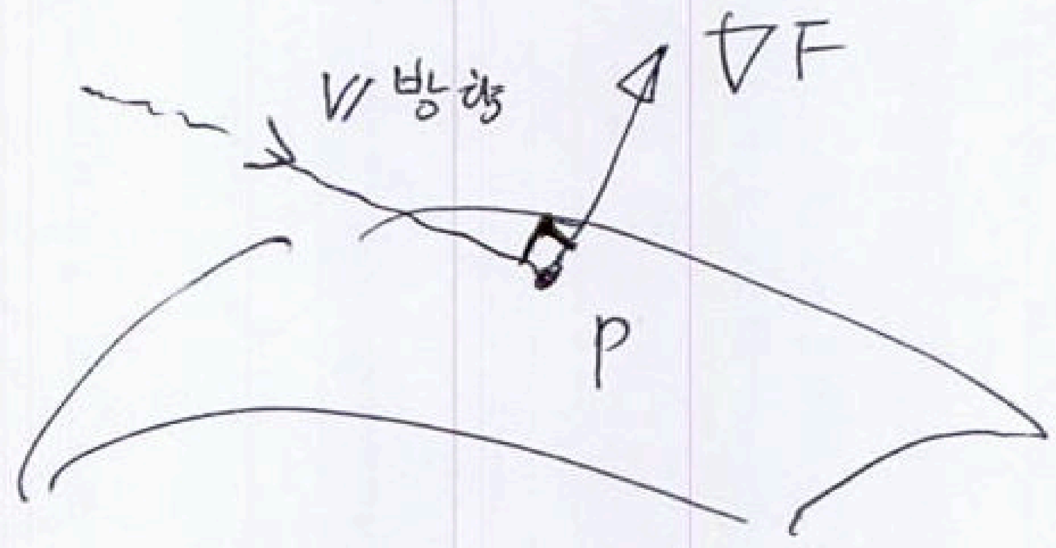
$F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z = 0$: 곡면의식

$\nabla F(x,y,z) = (2x, -2y, -1)$

$\nabla F(1,2,-3) = (2, -4, -1)$: 교점에서의 곡면상의 법벡터 → 5점

$v \cdot \nabla F(1,2,-3) = (1,2,-6) \cdot (2,-4,-1) = 2-8+6 = 0$

$\therefore$ 직선이 곡면에 접한다. → 5점.



4. (15점)

라이프니츠 rule 를 적용

$$f'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(y^2 + \tan^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial y} \log(y^2 + \tan^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2y}{y^2 + \tan^2 x}\,dx$$ ┘ 5점.

$$\Rightarrow f'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1 + \tan^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$$ ┘5점

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2x\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$ ┘ 5점. ▨

5. (15점)

임계점 정리 이용.

$\nabla f(x,y) = (6xy - 6x, \ 3x^2 + 3y^2 - 6y)$

$= (6x(y-1), \ 3x^2 + 3y^2 - 6y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, & y = 0, 2 \\ y = 1, & x = \pm 1 \end{cases}$ $\therefore (0,0), (0,2), (1,1), (-1,1)$

4개의 임계점들.

┘ 5점 (임계점 하나 틀릴때마다 (-1)점.

헤세 판정법을 위해

$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}$ --- (*)

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$: 음행렬 $\Rightarrow$ $(0,0)$: 극대

$f''(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$: 양행렬 $\Rightarrow$ $(0,2)$: 극소

$f''(\pm1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 0 \end{pmatrix}$: 행렬식 < 0 $\Rightarrow$ $(\pm1, 1)$: 안장점.

┘ 15점 (· 헤세 판정법 하나 틀릴때마다 (-2)점.
· (*) 도 틀리면 2점 감점.

#6.

$x=y=0$ 일때 $z+\frac{e^{2z}}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $z=f(0,0)=0$ 5점.

($z+\frac{e^{2z}}{2}$ 는 z에 대한 순증가함수이므로, $z+\frac{e^{2z}}{2}=\frac{1}{2}$ 의 해는 $z=0$ 뿐이다.)

주어진 식 $2x+y+z+\frac{e^{2z}}{2}=\frac{1}{2}$ 의 양변을 x로 편미분하면

$$2+\frac{\partial z}{\partial x}+e^{2z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \cdots ①$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{1+e^{2z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1$$

$2x+y+z+\frac{e^{2z}}{2}=\frac{1}{2}$ 의 양변을 y로 편미분하면

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}+e^{2z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \cdots ②$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{1+e^{2z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-\frac{1}{2}$$

① 의 양변을 x로 편미분하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2e^{2z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

을 얻는다. 여기에 $x=y=0$ 을 대입하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)+2\cdot 1\cdot(-1)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-1.$$

①의 양변을 y로 편미분하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2e^{2z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

을 얻는다. 여기에 $x=y=0$ 을 대입하면.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)+2(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-\frac{1}{2}$$

② 의 양변을 y로 편미분하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2e^{2z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

을 얻는다. 여기에 $x = y = 0$ 을 대입하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) + 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{4}$$

따라서. 원점에서의 근사다항식은 다음과 같다.

$$T_2 f(x,y) = -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2.$$

정답.

15점.

※ 채점기준.

- 근사다항식 $T_2 f(x,y)$ 의 계수가 하나 틀릴 때마다 2점씩 감점.

#7. X가 n-벡터라고 하자.

정리 1. 일급함수 g가 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $g(-P) = -g(P)$를 만족.

$\Rightarrow$ 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $D_X g(-P) = D_X g(P)$ 이다.

「정리 1의 증명: $D_X g(-P) = \lim_{t \to 0} \dfrac{g(-P+tX) - g(-P)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g(P-tX) - g(P)}{-t}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{g(P+sX) - g(P)}{s} = D_X g(P).$$ 」

정리 2. 일급함수 h가 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $h(-P) = h(P)$를 만족.

$\Rightarrow$ 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 $D_X h(-P) = -D_X h(P)$ 이다.

「정리 2의 증명: $D_X h(-P) = \lim_{t \to 0} \dfrac{h(-P+tX) - h(-P)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{h(P-tX) - h(P)}{t}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{h(P-tX) - h(P)}{-t}$$

$$= -\lim_{s \to 0} \frac{h(P+sX) - h(P)}{s} = -D_X h(P)$$ 」

정리 3. 임의의 점 $P \in \mathbb{R}^n$에 대해 함수 k가 $k(-P) = -k(P)$를 만족.

$\Rightarrow k(0) = 0$.

「정리 3의 증명: $k(-P) = -k(P)$의 양변에 $P = 0$을 대입한다. 」

이제 문제에 주어진 함수 f에 대해. $f(-P)=-f(P)$ 이므로.

$\Rightarrow D_x f(-P) = D_x f(P) \quad \forall P\in\mathbb{R}^n$ ($\because$ 정리 1)

$\Rightarrow D_x^2 f(-P) = -D_x^2 f(P) \quad \forall P\in\mathbb{R}^n$ ($\because$ 정리 2)

$\Rightarrow D_x^3 f(-P) = D_x^3 f(P) \quad \forall P\in\mathbb{R}^n$ ($\because$ 정리 1)

$\Rightarrow D_x^4 f(-P) = -D_x^4 f(P) \quad \forall P\in\mathbb{R}^n$ ($\because$ 정리 2)

$\vdots$

$\Rightarrow D_x^{2016} f(-P) = -D_x^{2016} f(P) \quad \forall P\in\mathbb{R}^n$.

이제 정리 3을 쓰면 $D_x^{2016} f(0) = \underbrace{0}_{\text{정답.}}$ 임이 증명된다.

※ 채점기준.

- $D_x^{2016} f(-P) = -D_x^{2016} f(P)$ 를 바탕으로 $D_x^{2016} f(0)=0$ 임을 설명하면 5점.
- $D_x^{2016} f(-P) = -D_x^{2016} f(P)$ 가 모든 $P\in\mathbb{R}^n$에 대해 성립함을 완벽하게 증명해야 15점 만점 부여.

8. 함수 $g(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ 의 c-등위면에서의 f_c의 임계점들을

라그랑즈 승수법으로 찾아본다.

$$\mathrm{grad}\, g(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$$

$$\mathrm{grad}\, f_c(x,y,z) = (2x, -2y, 0)$$

곡면 $x^2+2y^2+3z^2=c$ 에서 $\mathrm{grad}\, g(x,y,z) \neq 0$ 임을 쉽게 확인할 수 있다.

$\Rightarrow$ $(2x,-2y,0) = \lambda(2x,4y,6z)$ 인 실수 λ가 존재.

① $\lambda=0$ 인 경우 $\Rightarrow$ $x=y=0$

$\Rightarrow$ $x^2+2y^2+3z^2=c$ 에서 $z=\pm\sqrt{\frac{c}{3}}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\left(0,0,\sqrt{\frac{c}{3}}\right)}_{P_1:\ \text{임계점 } 1}$, $\underbrace{\left(0,0,-\sqrt{\frac{c}{3}}\right)}_{P_2:\ \text{임계점 } 2}$

② $\lambda\neq 0$ 인 경우 $\Rightarrow$ $2x=2\lambda x$ 로부터 $\lambda=1$ 혹은 $x=0$.

⊙ $x=0$ 인 경우, 우선 $6\lambda z=0$ 이고 $\lambda\neq0$ 이므로 $z=0$

$\Rightarrow$ $x=z=0$ 이므로 $x^2+2y^2+3z^2=c$ 에서 $y=\pm\sqrt{\frac{c}{2}}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\left(0,\sqrt{\frac{c}{2}},0\right)}_{P_3:\ \text{임계점 } 3}$, $\underbrace{\left(0,-\sqrt{\frac{c}{2}},0\right)}_{P_4:\ \text{임계점 } 4}$.

⊙ $\lambda=1$ 인 경우, $-2y=4y$ 이므로 $y=0$.

그리고 $6\lambda z=0$ 이고 $\lambda=1$ 이므로 $z=0$.

$\Rightarrow$ $y=z=0$ 이므로 $x^2+2y^2+3z^2=c$ 에서 $x=\pm\sqrt{c}$.

$\Rightarrow$ $\underbrace{(\sqrt{c},0,0)}_{P_5:\ \text{임계점 } 5}$, $\underbrace{(-\sqrt{c},0,0)}_{P_6:\ \text{임계점 } 6}$. 따라서 $k=6$ 이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{j=1}^{6} f_c(P_j) = \underbrace{6c^2+c}_{\text{정답}}$.

* 채점기준: 임계점 1개당 2점 (총 12점)
답까지 정확하면 15점 만점 부여.

9. (a) (5점)

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3-x^2-y) & \frac{\partial}{\partial y}(3-x^2-y) \\ \frac{\partial}{\partial x}x & \frac{\partial}{\partial y}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 3점

$$\therefore F'(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 2점

(b) (10점) 먼저 $\underbrace{F(1,1) = (1,1)}_{3점}$ 이므로 $F_n(1,1) = (1,1)$ 이다. (모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해)

연쇄법칙에 의해 $F_n'(p) = \underbrace{\{F'(1,1)\}^n}_{5점} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n}_{2점}$ 이 된다.

10.

(a) (10점) $\varphi(x,y,z) = e^x \cos y - x\log z + y^2 z + C$, C는 상수 ⌋ 5점. (C 빼먹으면 2점 감점.)

는 $\nabla\varphi = F$ 를 만족한다. 즉, φ는 F의 잠재함수이다.

영역 $\{z>0\}$는 연결 집합이므로 잠재함수는 위의 꼴 밖에 없다. 즉, 유일하다.

(유일성 논의 5점.
연결집합 얘기 없으면 2점 감점.)

(b) (5점) 선적분의 기본정리를 적용하면.

$$\int_x F \cdot ds = \int_x \nabla\varphi \cdot ds = \varphi(x(2\pi)) - \varphi(x(\pi))$$

$$= \varphi(1,0,2\pi) - \varphi(-1,0,\pi)$$

$$= e - \frac{1}{e} - \log(2\pi^2)$$

⌋ 5점.

(답 틀리면 0점)