2016년 2학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안

(a)

#1. $V=(a,b)$라 하자.

i) $b\neq 0$ $\quad D_v f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2ab}{t(t^2a^2+tb)}=\lim_{t\to 0}\frac{ab}{ta^2+b}=a$ +3

ii) $b=0$ $\quad D_v f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$ +2

$\therefore$ 모든 방향에 대해 방향미분계수가 존재

(b)

① f가 원점에서 미분가능하면 $\operatorname{grad} f(0,0)\cdot V = D_v f(0,0)$을 만족해야 한다. +2

(a)에서 $\operatorname{grad} f(0,0)=(0,0)$이므로 $ab\neq 0$일 때 $\operatorname{grad} f(0,0)\cdot(a,b)=0\neq a=D_v f(0,0)$

$\therefore$ 미분불가능 +8

② f가 원점에서 미분가능하면 $\lim_{V\to 0}\frac{|f(V)-f(0)-\operatorname{grad} f(0,0)\cdot V|}{|V|}=0$ ----(*) 이다. +2

$f(0)=0$, $\operatorname{grad} f(0,0)=(0,0)$이므로 $V=(a,a)$일 때

$(*)=\lim_{a\to 0}\frac{\left|\frac{a}{a^2+a}\right|}{\sqrt{2}|a|}=\lim_{a\to 0}\left|\frac{a^2}{a(a^2+a)\sqrt{2}}\right|=\lim_{a\to 0}\left|\frac{1}{\sqrt{2}(1+a)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

f는 원점에서 미분가능하지 않다. +8

③ 곡선 $y=\frac{x^2}{x-1}$을 따른 극한을 생각하면

$\lim_{x\to 0} f\left(x,\frac{x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{x-1}}{x^2+\frac{x^2}{x-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1\neq f(0,0)$ 이므로

f는 원점에서 불연속. 따라서 미분불가능.

채점기준

(a). D_1, D_2만 구한경우 , $|v|=1$인 경우만 구한경우 등 0점

- 곡선 $y=-x^2$에서 방향미분이 0이라 서술한 경우 −2점
- 기타 방향미분의 정의를 제대로 이해하지 못한 경우 0점

(b)

- 극한값 계산 과정에서 부등식을 잘못 사용한 경우 0점
- $\mathrm{grad} f(0,0)=(0,0)$ 임을 제대로 설명하지 못하면 0점
((a)에서 $b=0$일때 $D_v=0$임을 설명하지 않고 (b)에서 $\mathrm{grad}=(0,0)$임을 이용한 경우 포함)

(공통)

- f가 연속 or (틀린) 쓸데없는 내용 언급 −2점
- 사소한 계산실수 −3점.

#2. $g(x,y,z) = x + xy + xyz$ 로 놓으면 S는 $g(x,y,z)$의 3-등위면이다. 점 $P=(1,1,1)$에서의 S의 단위접벡터 v는 $\mathrm{grad}\, g(p)$에 수직이므로 $v=(a,b,c)$로 놓으면

$$\mathrm{grad}\, g(p)\cdot v = (3,2,1)\cdot v = 3a+2b+c=0 \quad \cdots (*)$$

v는 단위접벡터이므로 $a^2+b^2+c^2=1 \quad \cdots (**)$

$D_v f(p) = \mathrm{grad} f(p)\cdot v$ 이므로 ($\because f$가 일급)

$D_v f(p) = (1,2,0)\cdot(a,b,c) = a+2b$ 의 최댓값을 $(*)$와 $(**)$의 조건 하에서 구하는 문제이다.

3점

풀이1) $(*)$와 $(**)$을 연립하면 $c=-3a-2b$, $a^2+b^2+c^2=1$ 이므로

$$10a^2+12ab+5b^2=1 \quad \cdots (***)$$

$a+2b=h(a,b)$로 놓으면 라그랑주 승수법에 의해

$\mathrm{grad}\, h(a,b) = (1,2) = \lambda(20a+12b,\ 12a+10b)$ 를 만족하는 (a,b)에서 극값을 갖는다. 또한 $(***)$ 영역이 유계인 닫힌 집합이므로 최댓값을 가짐을 알 수 있다. 식에 의해 $b=-2a$.

대입하면 $a=\pm\frac{1}{\sqrt6}$. 따라서 $\left(\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right)$에서 극값이고

$$h(a,b)=\frac{3}{\sqrt6} \quad \text{또는} \quad h(a,b) = -\frac{1}{\sqrt6}$$

따라서 영역 $(***)$에서 h의 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt6}$이다. $h(a,b)=D_v f(P)$ 이므로

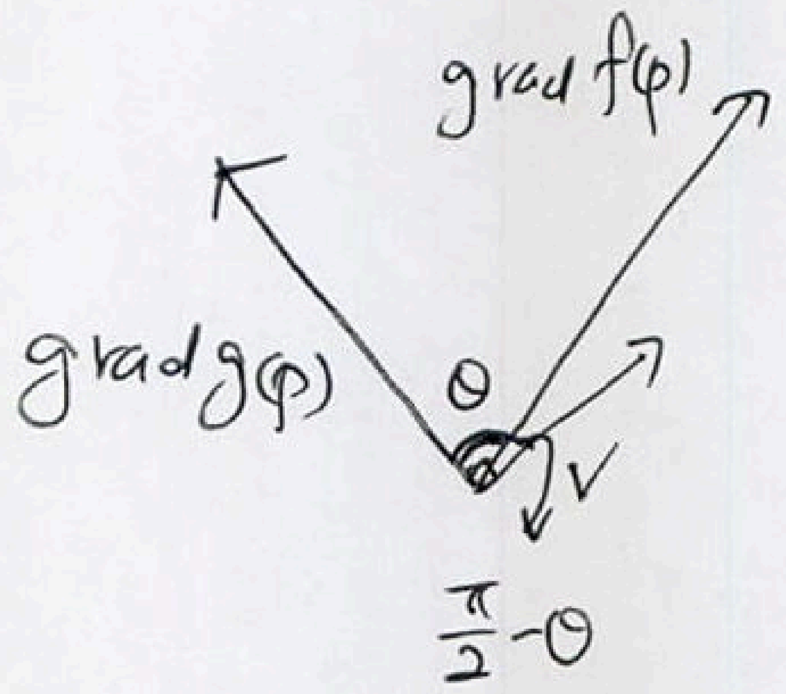
$D_v f(p)$의 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt6}=\frac{\sqrt6}{2}$

15점

※ 라그랑주 승수법을 쓸 시 유계의 닫힌 집합에 대한 언급이 없으면
1점 감점

풀이 2) grad $f(p)$와 grad $g(p)$가 이루는 각 θ의

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1\cdot 3 + 2\cdot 2}{|(1,2,0)||(3,2,1)|} = \dfrac{7}{\sqrt{70}} \\ \sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$ 이다.



grad $g(p)$와 수직인 단위벡터 V 중에서
$D_V f(p) = \text{grad } f(p) \cdot V$ 의 값이 최대가 되어야 하는데
이는 옆의 그림과 같이 grad $g(p)$, grad $f(p)$, V
가 한 평면에 있는 경우이다. 따라서 이때

$$D_V f(p) = \text{grad } f(p) \cdot V = |\text{grad } f(p)| \cdot |V| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{5} \cdot 1 \cdot \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

15점

※ 계산실수 (또는 이로 인해 정답도 틀림) 시 5점 감점.

#3

(i) $x \neq 0$ 일 때, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} \cdots (*)$ 이므로

(*)의 양변에 $\dfrac{\partial}{\partial x}$를 취하면

$$\sec^2\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}$$

이다.

그러므로 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ 이다.

(ii) $y \neq 0$ 일 때, $\cot\theta = \dfrac{x}{y} \cdots (**)$ 이므로

(**)의 양변에 $\dfrac{\partial}{\partial x}$를 취하면

$$-\csc^2\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{r\sin\theta}$$

이다.

그러므로 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ 이다.

* (r,θ)와 (x,y)의 관계식 서술 +2점
* arcsin, arccos, arctan 로 풀 때 범위를 나누지 않았으면 −2점
* 최종답안을 (r,θ)로 표현 X −2점.

문제 4. [15점] 함수 $f(x) = \int_{2/\sqrt{x}}^{3/\sqrt{x}} \frac{1}{y} e^{xy^3}\, dy$ $(x>0)$ 의 도함수를 구하시오.

풀이) cf. p.478 연습문제 제 11장 1절 2번

: $\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,y)\, dy\right] = F(x, b(x))\, b'(x) - F(x, a(x))\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\, dy$.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{1}{(3/\sqrt{x})} e^{x(3/\sqrt{x})^3} (3/\sqrt{x})' - \frac{1}{(2/\sqrt{x})} e^{x(2/\sqrt{x})^3} (2/\sqrt{x})' + \int_{2/\sqrt{x}}^{3/\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial x}(y e^{xy^3})\, dy$$

(∵ 라이프니츠 정리
미적분학의 기본정리) ┘8점

$$= \frac{1}{2x}\left(e^{\frac{8}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{27}{\sqrt{x}}}\right) + \int_{2/\sqrt{x}}^{3/\sqrt{x}} y^2 e^{xy^3}\, dy$$

$$= \frac{1}{2x}\left(e^{\frac{8}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{27}{\sqrt{x}}}\right) + \left[\frac{1}{3x} e^{xy^3}\right]_{2/\sqrt{x}}^{3/\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{2x}\left(e^{\frac{8}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{27}{\sqrt{x}}}\right) + \frac{1}{3x}\left(e^{\frac{27}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{8}{\sqrt{x}}}\right)}_{(*)} = \frac{1}{6x}\left(e^{\frac{8}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{27}{\sqrt{x}}}\right).$$

┘15점. ┘15점

*채점기준

1. 참고식 이용하거나 두 정리를 이용하여 전개 성공시 8점

2. (*) 이후의 답으로 계산이 맞은 경우 7점

3. 그 외 부분점수 없음.

#5.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+6x-9, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x+6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2+6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y+6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

임계점 정리에 의해,

$$\mathrm{grad}\, f(x,y) = (3x^2+6x-9,\ -3y^2+6y) = (0,0)$$

을 만족하는 (x,y)가 임계점이다. +2

$$\begin{cases} 3x^2+6x-9=0 \rightsquigarrow x = 1,\ -3 \\ -3y^2+6y=0 \rightsquigarrow y = 0,\ 2 \end{cases}$$

따라서, $(1,0)$, $(1,2)$, $(-3,0)$, $(-3,2)$가 임계점이다.

이 때, 하세 행렬은

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & -6y+6 \end{pmatrix}$$

이고, 헤세 판정법에 의해,

$f''(1,0) > 0$ ···· $(1,0)$은 극소점 +2

$f''(-3,2) < 0$ ···· $(-3,2)$는 극대점 +2

$\det f''(1,2) < 0$ ··· $(1,2)$는 안장점 +2

$\det f''(-3,0) < 0$ ··· $(-3,0)$은 안장점 +2

* 채점기준

· grad $f(x,y)$를 잘못구한 경우 0점

· 헤세 행렬을 잘못구한 경우 0점.

· 그 외 계산 실수 또는 잘못된 판정법을 쓴경우 감점.

#6.(a)

$v=(a,b)$ 일 때, $D_v^2 f(p) = a^2 D_1^2 f(p) + 2ab\, D_1 D_2 f(p) + b^2 D_2^2 f(p)$ (∵ f가 이급)

2점.

이 때, $D_1 f(x,y) = e^{x\cos y}\cdot \cos y$

$D_2 f(x,y) = -x\sin y\, e^{x\cos y}$

$D_1^2 f(x,y) = \cos^2 y\, e^{x\cos y}$

$D_1 D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y) = (-\sin y - x\sin y\cos y)e^{x\cos y}$

$D_2^2 f(x,y) = (x^2\sin^2 y - x\cos y)e^{x\cos y}$

이다. 그러므로 $D_1^2 f(1,0) = e$, $D_1D_2 f(1,0) = 0$, $D_2^2 f(1,0) = -e$

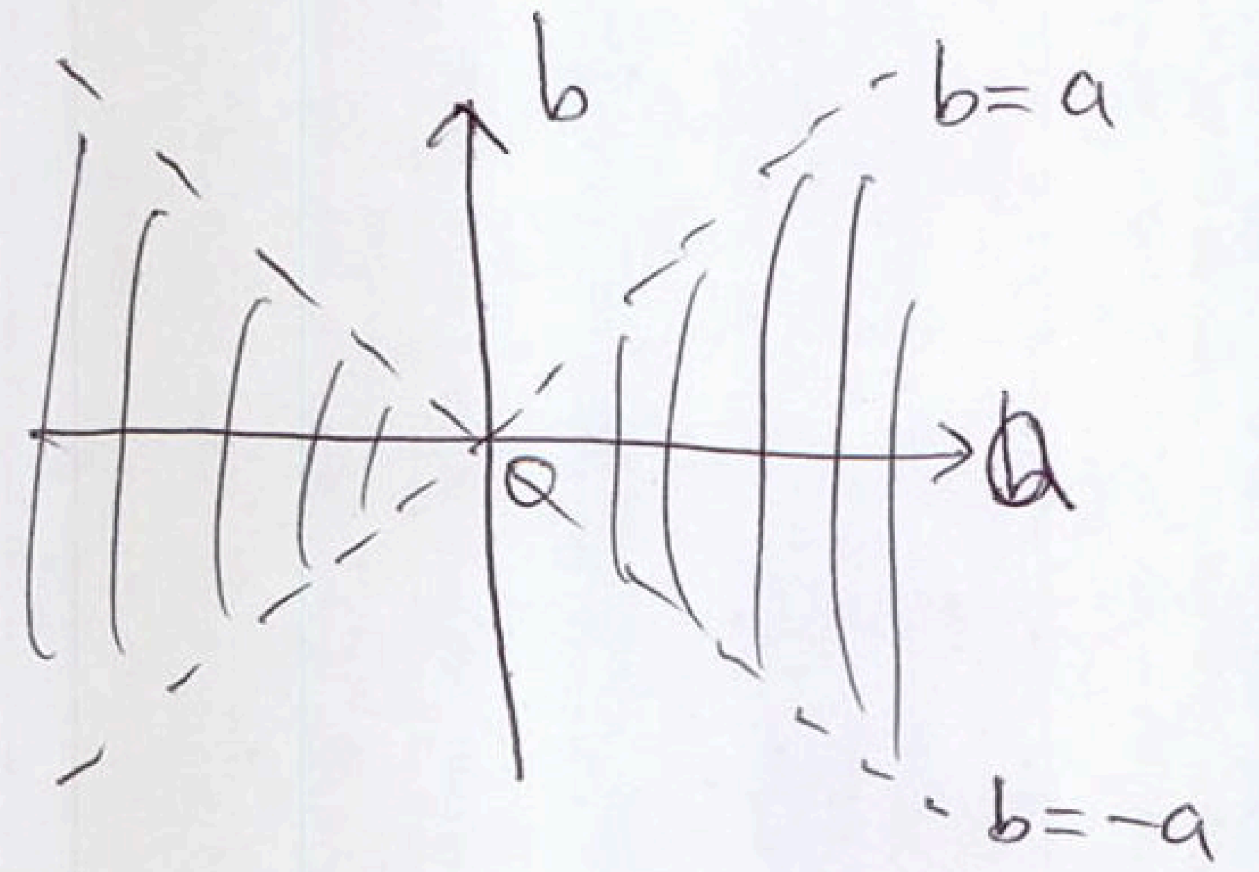
이고, ∴ $D_v^2 f(p) = e(a^2-b^2)$

계산까지 맞아야 3점.

점 P에서 v 방향으로 함수 f가 아래로 볼록인 영역은 (합쳐서 5점)

$D_v^2 f(p) = e(a^2-b^2) > 0$ 인 영역이 되고, 즉 $a^2 > b^2$.

$\Rightarrow$



그래프 잘 그린 경우 5점.

(경계에 대한 언급이 없으면

점선 or 부등호($D_v^2 f(p)>0$)등... 2점 감점)

그래프가 이상하면 0점.

총 10점

#6.(b) 점 P에서 f의 2차근사다항식은
$\overset{\shortparallel}{(1,0)}$

$$f(1,0) + D_1 f(1,0)(x-1) + D_2 f(1,0)y + \frac{1}{2}\left(D_1^2 f(1,0)(x-1)^2 + 2D_1D_2 f(1,0)(x-1)y + D_2^2 f(1,0)y^2\right)$$

$= e + e(x-1) + 0\cdot y + \frac{1}{2}\left(e\cdot(x-1)^2 + 0\cdot(x-1)y + (-e)\cdot y^2\right)$

$= e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 - \frac{1}{2}ey^2$ 5점

- 답이 틀리면 0점.

다른풀이 6 #(a)

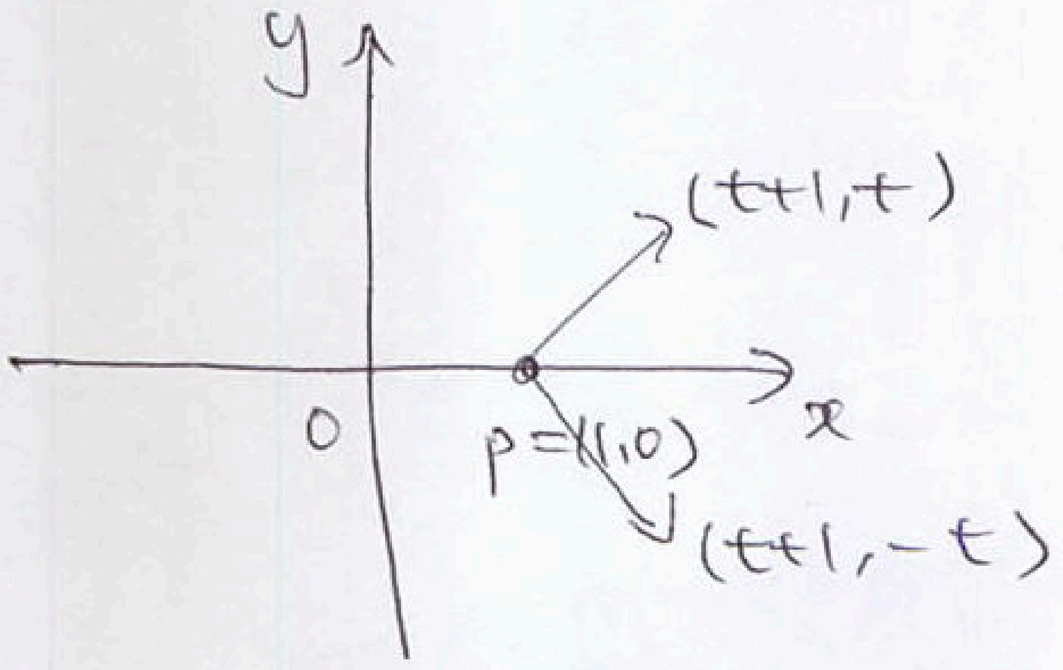
$D_v^2 f(p) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(p+tv) \quad (p=(1,0),\ v=(a,b))$ 2점

$= \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} e^{(1+ta)\cos(tb)}$

$= e(a^2-b^2)$ 3점 (합쳐서 5점)

* comment : $D_v^2 f(p) = 0$ 인 경우는 볼록인지 아닌지

직접 체크해 봐야 한다!!



$\Rightarrow e^{(1+t)\cos t}$ 가 $t=0$ 에서

볼록인지 아닌지!!

$\Rightarrow$ 해보면 $\left.\left(\frac{d}{dt}\right)^3\right|_{t=0} e^{(1+t)\cos t} = -\frac{5}{6}e \neq 0$

이므로 볼록이 아니다.

7. (a). $(1,2)\in S$ 이고 $f(1,2)=5$ 이므로. $D:=\{(x,y): f(x,y)\le 5\}$ 라

정의하면, $D\cap S$ 는 유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 $D\cap S$ 에서

최솟값을 가진다.

이제, $g(x,y)=x^2y$ 라두면. $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$. $\nabla g(x,y)=(2xy,x^2)$ 이고

만약 $\nabla g(x,y)=0$ 이면 $x=0$ 이고 이는 S에 속하지 않는다.

따라서 $\nabla g(x,y)\neq 0$ 이고, 라그랑주 승수법에 의해 $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$

이다.

$\therefore (2x,2y)=\lambda(2xy,\cancel{x}^2)$ $\therefore 2x=2\lambda xy$, $2y=\lambda x^2$.

$x\neq 0$ 이므로. $y=\frac{1}{\lambda}$, $x^2=\frac{2}{\lambda^2}$. $\therefore x^2y=\frac{2}{\lambda^3}=2$ $\therefore \lambda=1$.

$\therefore x^2=2$. $y=1$ $x=\pm\sqrt{2}$. $y=1$.

$\therefore f(\pm\sqrt{2},1)=3$.

따라서 $x=\pm\sqrt{2}$, $y=1$ 에서 최솟값 3을 가진다.

(b). $(2,2)\in T$ 이고 $f(2,2)=8$ 이므로 $D:=\{(x,y): f(x,y)\le 8\}$라 정의하면

$D\cap T$는 유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 $D\cap T$에서 최솟값을 가진다.

따라서. $g(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ 라두면,

$\nabla f(x,y)=(2x,2y)$. $\nabla g(x,y)=(3x^2-3,3y^2-3)$.

Case 1) $\nabla g(x,y)=0$ 즉. $x=\pm1$, $y=\pm1$ 인 경우.

이 중 $g(x,y)=4$를 만족하는 쌍은 $(-1,-1)$ 뿐이고 이 때 $f(-1,-1)=2$ 이다.

Case 2) $\nabla g(x,y)\neq 0$. 인경우.

라그랑주 승수법에 의하여. $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ 이고, 즉,

$$(2x,2y)=\lambda(3x^2-3,3y^2-3)$$

$\therefore \lambda=\frac{2x}{3x^2-3}=\frac{2y}{3y^2-3}$. $\Rightarrow (xy+1)(x-y)=0$.

Ⅰ) $x=y$ 인경우

$2x^3-6x-4=0 \Rightarrow x=-1$ or 2 $\therefore (x,y)=(-1,-1)$ or $(2,2)$

$(x,y)=(-1,-1)$ 인경우 $\nabla g(x,y)=0$. $\therefore (x,y)=(2,2)$.

ii) $xy=-1$ 인 경우.

$x^2+y^2 \geq 2|xy| = 2$ 이므로, $xy=-1$ 일때의 가능한 최솟값은 2이상이다.

Case 1), Case 2) 를 모두 고려하면,

$(x,y) = (-1,-1)$ 일때 $f(x,y)$의 최솟값은 2 이다.

채점기준 ①. (a), (b) 모두 존재성을 보이지 않거나, 잘못 보인 경우 1점 감점.

②. (a) 에서 라그랑주 승수법을 옳게 서술하면 +2

답 까지 맞으면 +2.

③ (b)에서 라그랑주 승수법을 정확히 서술한 경우 +4.

($\mathrm{grad} f = \lambda \mathrm{grad}\, g$ 라 두고 $\mathrm{grad}\, g = 0$ 인 경우를 따로 언급하지 않으면 점수 없음)

· 이후 논리에 오류가 있는경우 점수 없음.

논리에 따라 올바르게 답을 낸 경우 +5.

8. $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)} = \dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \cdot \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}$

$$= \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y + z & y \\ -e^x\sin y + z & -e^x\cos y & x \\ y & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2t \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$ 8점.

$(r,s,t)=(1,0,1)$ 이면 $(x,y,z)=(0,0,1)$ 이므로

① $\det\left(\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}(1,0,1)\right) = \det\left(\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(0,0,1)\right) \cdot \det\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}(1,0,1)\right)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot(-8) = 16.$$ 2점.

② 또는 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 에서

구해도 된다.

- 야코비 행렬이 없거나, 연쇄법칙 혹은 야코비 행렬이 잘못된 경우, 계산실수 2개로 생각.
- 야코비 행렬의 변수 표현을 계산할 때 계산 실수당 -2
  3개 이상시 0점
- 변수 표현 없이 $(1,0,1)$에서의 값을 계산해도 인정되나,
  이 경우 계산 실수가 있으면 감점 2배.
- $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$ 를 r,s,t 로만 나타낸 식이 틀렸더라도
  $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ 와 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}$ 까지만 맞으면 점수 인정.
- det 계산에 배정된 2점은 위의 8점을 모두 받아야 인정.
  (단, 야코비 행렬을 전치행렬로 적은 경우는 2점도 인정.)

다른 풀이 :

$$\begin{cases} u = e^{t^2-r}\cos 4s + 4st^2 \\ v = t^4 - rt^2 - e^{t^2-r}\sin 4s \\ w = 4st^2 - 4rs + t^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} =$$

$$\begin{pmatrix} -e^{t^2-r}\cos 4s & 4t^2 - 4e^{t^2-r}\sin 4s & 8ts + 2te^{t^2-r}\cos 4s \\ -t^2 + e^{t^2-r}\sin 4s & -4e^{t^2-r}\cos 4s & 4t^3 - 2rt - 2te^{t^2-r}\sin 4s \\ -4s & 4t^2 - 4r & 8st + 2t \end{pmatrix}$$

8점

이후 같은 방법으로 det 계산 : +2점

9

Let $X(\theta) = ((1+\theta^2)\cdot\cos\theta,\ (1+\theta^2)\cdot\sin\theta),\ 0 \le \theta \le 1$

($\because$ X : 반시계 방향).

+3

$$\int_X \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 F(X(\theta))\cdot X'(\theta)\cdot d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{r(-\sin\theta,\ \cos\theta)}{r^3}\cdot(2\theta\cos\theta - (1+\theta^2)\cdot\sin\theta,\ 2\theta\cdot\sin\theta + (1+\theta^2)\cdot\cos\theta)\cdot d\theta$$

L (a)

+5

$$= \int_0^1 \frac{r(1+\theta^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{r^3}\cdot d\theta \quad (\because (-\sin\theta,\ \cos\theta)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta) = 0).$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\theta^2}\cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 t}\cdot\sec^2 t\cdot dt = \frac{\pi}{4}$$

$(\because t = \tan\theta \Rightarrow dt = \sec^2\theta\cdot d\theta)$.

+7.

* (a)의 식을 $\int_0^1 \frac{r(-\sin\theta,\ \cos\theta)}{r^3}\cdot(-r\sin\theta,\ r\cos\theta)\,d\theta$ 로 적은 경우,

r이 θ의 함수임을 고려하지 않았으므로, (a) 부분을 틀린 것으로 간주.

* $a(x,y) := \frac{(-y,\ x)}{x^2+y^2}$: 각 원소 벡터장을 이용한 경우.

$\vec{F} = \frac{1}{r}\cdot\vec{a}$ 이므로,

$$\int_X \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 F(X(\theta))\cdot X'(\theta)\cdot d\theta = \int_0^1 \frac{1}{r}\cdot a(X(\theta))\cdot X'(\theta)\cdot d\theta$$

이때 $a(X(\theta))\cdot X'(\theta) = 1$ 임을 설명하였다면, (a) 부분의 점수 인정.

* (a) 부분이 맞지 않으면, 답이 맞더라도 점수 부여 X.

문제 10   선적분의 정의에 의해

$$\int_X \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{a}\,(X(t))\cdot X'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-b\sin t,\ a\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\cdot(-a\sin t,\ b\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \quad \text{— ①}$$

한편, $X(t)$ 가 나타내는 곡선은

$$\begin{cases} ab>0 \text{ 일때 원점 주위를 반시계 방향으로 한 바퀴 도는 타원} \\ ab<0 \quad \text{〃} \quad \text{시계} \quad \text{〃} \end{cases}$$

이므로, 각원소 벡터장 $\vec{a}$ 의 선적분 값은

$$\int_X \vec{a}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} 2\pi & (ab>0) \\ -2\pi & (ab<0) \end{cases} \quad \text{— ②}$$

∴ ① 과 ② 로 부터

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{ab} & (ab>0) \\ \dfrac{2\pi}{-ab} & (ab<0) \end{cases} = \boxed{\frac{2\pi}{|ab|}} \quad ▨$$

※ 채점 기준

◦ ② 계산시 경우를 나누지 않고 $\int_X \vec{a} \cdot d\vec{S} = 2\pi$ 로 한 경우

(수학적으로 올바르지 않으면) 5점

◦ 위의 계산에 의해 답이 $\frac{2\pi}{ab}$ 가 나온 경우, 답점수 3점

◦ 계산 하는 과정에 오류가 있는 경우, 답이 맞더라도 답 점수 0점

위 이외에 ex) $\vec{a}$ 의 잠재함수를 잡아서 풀이한 경우

(경우를 나누지 않고)

11번.

첫번째 풀이 : $\varphi(x,y,z) = \log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 이라 하면

$\nabla\varphi = G$ 이므로 φ는 G의 잠재함수이다 (10점)

선적분의 기본정리에 의하여

$$\int_X G\cdot ds = \varphi(X(1)) - \varphi(X(0)) = \log 2 \quad (15점)$$

두번째 풀이 : $$\int_X G\cdot ds = \int_0^1 G(X(t))\cdot X'(t)\,dt \quad (5점)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t, -\sqrt{2}t, \sqrt{2}t)}{(1-t)^2+2t^2+2t^2}\cdot(-1,-\sqrt{2},\sqrt{2})\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{5t-1}{5t^2-2t+1}\,dt \quad (7점)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log|5t^2-2t+1|\right]_0^1 = \log 2 \quad (15점)$$