#8 (a)

(Sol 1)

볼록 집합인 1사분면 내에서 닫힌 벡터장인 각원소 벡터장은 뿌앙카레 보조정리에 의해서 잠재함수를 가진다.

$X : [a, b] \longrightarrow U$ 를 곡선의 매개화라고 하고 a의 한
$t \longmapsto X(t)$

잠재함수를 φ라 하자. 그러면

$$(*) \cdots \int_X a \cdot ds = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi(X(t)) \cdot X'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(X(t))\, dt$$

$$= \varphi(X(b)) - \varphi(X(a))$$ 이므로 곡선의 경로와는 무관하게 끝점의 위치에만 의존하게 된다.

(Sol 2)

각원소 벡터장 $a(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ 는 $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$를 잠재함수로 가진다. 따라서 (*)에 의해 선적분 값은 경로에 무관하게 일정한 값을 가진다.

(Sol 3)

$X : [a, b] \longrightarrow U$
$t \longmapsto (r(t)\cos\theta(t),\ r(t)\sin\theta(t))$ 를 임의의 곡선이라고 하자.

그러면

$$\int_X a \cdot ds = \int_a^b \frac{1}{r(t)^2}(-r(t)\sin\theta(t), r(t)\cos\theta(t)) \cdot \{ r'(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) + r(t)\theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))\} dt$$

$$= \int_a^b \theta'(t)\, dt = \theta(b) - \theta(a)$$ 이므로

곡선의 경로와는 무관하게 양 끝점의 편각의 차로 일정하다.

* 채점기준.

Sol 1) U가 볼록집합, a가 닫힌벡터장임을 언급하지 못한 경우 각각 감점 -3. 두개다 못하면 0점.

Sol 2). 정확한 잠재함수를 제시해야 점수 인정.

Sol 3) 곡선의 매개화가 잘못되었거나 적분 계산이 틀린 경우 무조건 0점.