<2011년도 제 2학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안>

1. (a) f의 그래프 $\{(x,y,f(x,y)) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x,y,x^3-3xy^2) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

은 함수 $g(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 - z$ 의 0-등위면이다.

<u>등위면 위의 점 $(1,-1,-2)$ 에서의 접평면은 $\operatorname{grad} g(1,-1,-2)$ 에 수직이고</u>, $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (3x^2-3y^2, -6xy, -1)$
(*)

$\Rightarrow \operatorname{grad} g(1,-1,-2) = (0,6,-1)$ 이므로. ⌟ 5점 … ①

접평면의 방정식은

$\operatorname{grad}(1,-1,-2) \cdot (x-1, y+1, z+2) = 0.$

$\Rightarrow (0,6,-1)\cdot(x-1, y+1, z+2) = 0.$

$\Rightarrow \underline{6y - z + 4 = 0.}$ // ⌟ 5점 … ②

채점기준.) • 밑줄 친 (*)에 대해 정확히 언급했으나,
계산이 맞지 않는 사람은 3점.

• ① 이 틀리면 ②의 점수를 받을 수 없음.

1. (b)

<u>Sol 1</u>

$$\text{grad} f(x,y) = (3x^2-3y^2,\ -6xy)$$

$$\therefore\ \text{grad} f(1,-1) = (0,6)$$

f 는 미분가능하므로 $D_{\mathbf{v}} f(1,-1) = \text{grad} f(p) \cdot \mathbf{v}$ 가 성립한다.

따라서,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(p) &= D_{(x,y)} f(1,-1) \\ &= \text{grad} f(1,-1) \cdot (x,y) \\ &= (0,6)\cdot(x,y) \\ &= 6y \end{aligned}$$

<u>Sol 2</u>

$$\begin{aligned} & D_{\mathbf{v}} f(p) \\ &= D_{(x,y)} f(1,-1) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f\big((1,-1)+t(x,y)\big) - f(1,-1)\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(3t^2x^2 + t^3x^3 + 6ty - 3t^2y^2 + 6t^2xy - 3t^3xy^2\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(3tx^2 + t^2x^3 + 6y - 3ty^2 + 6txy - 3t^2xy^2\right) \\ &= 6y \end{aligned}$$

* 답이 틀리면 0 점 (부분점수 없음)

1. (c)

Sol

$$D_{\mathbf{v}}f(p) = \operatorname{grad} f(p) \cdot \mathbf{v}$$

$$= |\operatorname{grad} f(p)|\,|\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$$

이므로 $\cos\theta = 1$, 즉 $\theta = 0$ 일 때 최대이다.

따라서 $\mathbf{w} = \dfrac{\operatorname{grad} f(1,-1)}{|\operatorname{grad} f(1,-1)|} = (0,1)$

$$\therefore D_{\mathbf{w}}f(1,-1) = \operatorname{grad} f(1,-1) \cdot (0,1)$$

$$= 6.$$

* 채점기준.

1. $\mathbf{w}$ 가 틀리면 0 점
2. $\mathbf{w}$ 가 맞고 변화율이 틀리면 3 점.
3. $\mathbf{w}$ 를 구하지 않고 변화율을 구하는 과정과 답이 정확한 경우 2 점.

#2. (a). $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^2 x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$v = (1,1)$ 일때 $D_v f(0,0)$를 구하시오.

sol) $D_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t}$ ⌋ 5점

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{t\sin^2 t}{t^2+t^2}\right)$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin^2 t}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$ ⌋ 5점.

* 채점기준. $v \cdot \nabla f(0,0)$, $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(tv) - f(0,0)}{\sqrt{2}t}$,

$\dfrac{t\sin^2 t}{t^2+t^2}$를 t로 미분하여 0을 대입하는 등의 풀이는 모두 0점.

2.(b) $\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}\right|$

방법 ① $\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y\sin^2 x}{x^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

② $\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y\sin^2 x}{2xy}\right|$ (산술·기하 평균 부등식) $= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin x}{2}\right| = 0$.

③ $\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{yx^2}{2xy}\right|$ (산술·기하 평균 부등식 & $\sin^2 x \le x^2$) $= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x}{2}\right| = 0$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

$\therefore$ f는 (0,0) 에서 연속.

* 불연속이라고 쓰면 0점.

답이 맞아도 논리가 전혀 성립하지 않으면 0점.

절대값을 쓰지 않는 등의 사소한 실수는 −3점.

2(c)

i) $D_{(1,0)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$ ┘ +2

$D_{(0,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$ ┘ +2

$\therefore \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$

ii) (a) 에서 $\mathbb{V} = (1,1)$ 에 대해

$D_{\mathbb{V}} f(0,0) = \frac{1}{2}$ 이나 $\operatorname{grad} f(0,0) \circ \mathbb{V} = 0$

이므로 $D_{\mathbb{V}} f(0,0) \neq \operatorname{grad} f(0,0) \circ \mathbb{V}$

$\therefore$ f는 $(0,0)$ 에서 미분불가. ┘ +6

※ ① i) 에서 각각 2점씩 총 4점

② ii) 는 맞으나, 만일 (a) 의 풀이 or 답이 틀리면 3점 감점.

※ 정의를 이용한경우,

① 전체적으로 논리가 맞으면 만점.

② gradient 는 위와 동일하게 점수부여 (풀이과정 필요)

③ 정의만 맞고 풀이에 문제가 있을 경우 (위의 ② 내용 포함) 3점만 부여.

※ 위에 언급한 이외의 내용은 풀이가 모두 맞을 경우 만점, 그렇지 않으면 0점.

3.

$G(t,y) = \int e^{-t^2 y}\,dt$ 라 하자. $\frac{\partial G}{\partial t}(t,y) = e^{-t^2 y}$ 이다.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_1^{xy} e^{-t^2 y}\,dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(G(xy,y) - G(1,y)\right)$$

$$= \frac{\partial G}{\partial y}(xy,y) + \frac{\partial G}{\partial t}(xy,y)\cdot x - \frac{\partial G}{\partial y}(1,y)$$

$$= \int_1^{xy} -t^2 e^{-t^2 y}\,dt + e^{-(xy)^2 y}x$$

10점.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} -t^2 e^{-t^2 y}\,dt + e^{-(xy)^2 y}x \right)$$

$g(t,y) = \int -t^2 e^{-t^2 y}\,dt$ 라 하자 $\frac{\partial g}{\partial t} = -t^2 e^{-t^2 y}$ 이다.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(xy,y) - g(1,y)\right) + x(-2xy^3)e^{-x^2y^3} + e^{-x^2y^3}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t}(xy,y)\cdot y - 2x^2y^3 e^{-x^2y^3} + e^{-x^2y^3}$$

$$= -(xy)^2 e^{-x^2y^3}\cdot y - 2x^2y^3 e^{-x^2y^3} + e^{-x^2y^3}$$

$$= (-3x^2y^3 + 1)e^{-x^2y^3}$$

15점

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1,1) = (-3+1)e^{-1} = -2e^{-1}$$

20점.

별해)) 편미분 교환법칙에 의해 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cdot e^{-x^2y^3}$$

10점

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = e^{-x^2y^3}(1-3x^2y^3)$$

15점

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{-2}{e}.$$

20점.

#4. Let $f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$

$g(x,y,z) = \cancel{xy}\ xy+yz-1$. $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z)=0\}$

단 $\nabla g(x,y,z) = (y,\ x+z,\ y) \neq 0$ on S (이유 $y=0 \Rightarrow$ 모순)

$\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ 라그랑즈 승수법 (만약 $\nabla g = \lambda \nabla f$ 로 쓰려면 $\nabla f \neq 0$ 임을 check)

$\Rightarrow \begin{cases} (2x,\ 4y,\ 2z) = \lambda(y,\ x+z,\ y) \\ xy+yz=1 \end{cases}$ 만족하는 (x,y,z).

⌐10

$\Rightarrow \lambda = \pm 2$ ($\nabla g = \lambda \nabla f$ 인 경우. $\lambda = \pm\frac{1}{2}$)

⌐15

$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow (x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$ 최소값 2

$\lambda = -2 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ 모순.

$\therefore$ 최소값 2

⌐20 * 사소한 계산실수 -2pt

* 계산실수. (∇g, ∇f 계산 틀리면 -5pt)

(λ 틀려서 답 틀리면 -10pt)

($\lambda = -2$ 인 경우 「$x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$? $\Rightarrow$ 최소 -2」

라고 한 경우 -5pt)

* ~~조사한 과정~~. $\lambda = 2$ 만 하고 $\lambda = -2$ 인 거 ~~check~~ 모순안보이면 -5pt

' 산술기하. / 2변수함수로 풀이할 수도 있음

5 (a) $\text{grad}\, f(x,y) = (3x^2+3y,\ 3x-3y^2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+3y=0 \\ 3x-3y^2=0 \Rightarrow x=y^2 \end{cases}$$ 대입

$3y^4+3y = 0 \Rightarrow y(y^3+1)=0 \quad \therefore y=0,\ -1$

$\therefore$ 임계점은 $(x,y) = (0,0)\ ,\ (1,-1)$ — 4점

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

$\det f''(0,0)\ \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$

$\therefore (0,0)$ 은 안장점 — 3점

$f''(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 이고 $6>0$ $\det f''(1,1) = 27 > 0$

$\therefore (1,-1)$ 은 극소점 — 3점

임계점 구하는 계산과정 틀리면 −2점

$f''(x,y)$ 틀리면 헤세 판정법 부분점수 없음

5 (b)

$$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$$

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 + 3y, \quad D_2 f(x,y) = 3x - 3y^2$$

$$D_{11} f(x,y) = 6x, \quad D_{12} f(x,y) = 3, \quad D_{22} f(x,y) = -6y$$

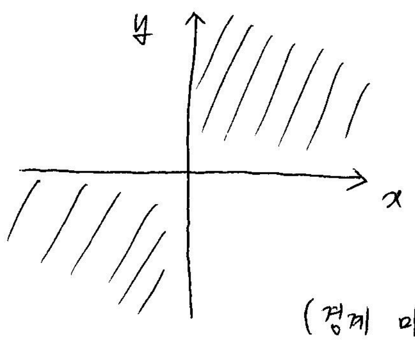
$$\Rightarrow \quad D_v^2 f(0,0) = (x^2 D_{11} f(0,0) + 2xy D_{12} f(0,0) + y^2 D_{22} f(0,0))$$

$$= 6xy$$

— ① 5점

$D_v^2 f(0,0) > 0$ 을 만족시키는 v의 집합

$\Leftrightarrow \quad xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,\ y > 0$ or $x < 0,\ y < 0$



(경계 미포함) — ② 5점

$\boxed{\text{채점기준}}$

(1) $D_v^2 f(0,0)$ 제대로 구하면 5점 (①)

(2) 좌표평면에 영역을 맞게 도시하면 5점 (②)

* 계산 실수나 영역을 잘못도시하면 부분점수 없음

* ② 가 맞아도 ① 이 틀리면 0점.

(단, D_{11}, D_{12}, D_{22} 를 맞게 계산하였고 $D_v^2 f$ 에 대한 식이 맞았으나 계산실수를 한 경우는 정답인정 (5점)).

6번 모범답안

(1) 이차근사다항식 (10점)

[풀이 1]

$f(0,0)=0$, $D_1 f(x,y) = \cos x \sin y$, $D_2 f(x,y) = \sin x \cos y$

$D_1^2 f(x,y) = -\sin x \sin y$, $D_1 D_2 f(x,y) = \cos x \cos y$, $D_2^2 f(x,y) = -\sin x \sin y$

$$T_2 f(x,y) = f(0,0) + x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0) + \frac{1}{2}\left(x^2 D_1^2 f(0,0) + 2xy D_1 D_2 f(0,0) + y^2 D_2^2 f(0,0)\right)$$

$$= xy$$

[풀이 2]

$\sin x = x + o(x^2)$, $\sin y = y + o(y^2)$ 이므로

$\sin x \sin y = xy + o(x^2+y^2)$ ·········· $(*)$

근사다항식의 유일성에 의해, $T_2 f(x,y) = xy$

(2) 오차의 한계 (10점)

$$M_3 = \sup\{\,|D_i D_j D_k f((0,0)+(x,y))| \;\; 1 \le i,j,k \le 2,\; |x| \le 0.1,\; |y| \le 0.1\,\}$$

이때, $D_1^3 f(x,y) = D_1 D_2^2 f(x,y) = -\cos x \sin y$,

$D_1^2 D_2 f(x,y) = D_2^3 f(x,y) = -\sin x \cos y$ 이므로, $M_3 \le 1$.

$$|R_2 f((0,0),(x,y))| \le \frac{M_3}{3!}(|x|+|y|)^3 \le \frac{1}{6}(0.2)^3 < 0.002 .$$

* 채점기준

(1) [풀이 2]에서 $(*)$식을 정확하게 쓰지 않은 경우 점수없음.

$(*)$식까지 정확하게 적었지만, 근사다항식의 유일성을 언급하지 않은 경우 5점 감점

(2) 오차의 한계를 구하는 식을 정확하게 적용하지 않은 경우,
(즉, $|R_2 f((0,0),(v_1,v_2))| \le \frac{M_3}{3!}(|v_1|+|v_2|)^3$)
M_3의 정의를 쓰지 않거나 틀리게 쓴 경우
} 점수없음

M_3의 상한을 구하는 과정에서 실수가 있는 경우
(ex. $M_3 = 1$, $M_3 = 0.1$ 등은 틀린 풀이)
M_3의 상한을 구하는 과정에서 설명이 부족한 경우
} 5점감점

7. $F(x,y) = (e^x \sin xy,\ e^x \cos xy) = (f_1, f_2)$

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x \cdot (\sin xy + y\cos xy) & x e^x \cos xy \\ e^x \cdot (\cos xy - y \sin xy) & -x e^x \sin xy \end{pmatrix}$$

$\det F' = -x \cdot e^{2x}$

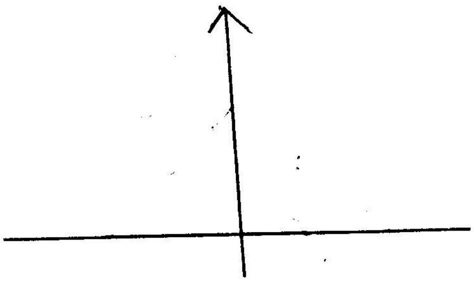
-5

· 야코비행렬 F'의 정의를 모르는 경우 0점.

· 야코비행렬 F'을 구하는 과정에서 사소한 계산실수시 5점.

· 야코비행렬 F'이 틀렸으면 행렬식이 맞더라도 점수 없음.

#8.



Let $X_1(t) = (t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1$

$X_2(t) = (1-t, t) \quad 0 \leq t \leq 1$

$X_3(t) = (-t, 1-t) \quad 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow \quad X = X_1 + X_2 + X_3$

I) $\int_{X_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} \mathbb{F}(X_1(t)) \cdot X_1'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (1, -\sin\pi t)\cdot(1,0)\,dt$

$= \int_{-1}^{1} dt = 2$

II) $\int_{X_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (e^t, -\sin\pi(1-t))\cdot(-1,1)\,dt = \int_0^1 (-e^t - \sin\pi(1-t))\,dt$

$= \int_0^1 (\sin\pi(t-1) - e^t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos\pi(t-1) - e^t \Big]_0^1$

$= 1 - \frac{2}{\pi} - e$

III) $\int_{X_3} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (e^{1-t}, -\sin\pi(-t))\cdot(-1,-1)\,dt = \int_0^1 (-e^{1-t} - \sin\pi t)\,dt$

$= 1 - \frac{2}{\pi} - e$

$\therefore \int_X \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{X_1} + \int_{X_2} + \int_{X_3} = 2 + (1 - \frac{2}{\pi} - e) + (1 - \frac{2}{\pi} - e) = 4 - 2e - \frac{4}{\pi}$

* 채점기준 *

① 곡선매개화를 제대로 하면 5점 (하나라도 틀리면 0점)

② 각 매개화에 대한 적분값에 대해 5점

③ 조각적 일급곡선의 선적분을 이해하고, 답이 맞으면 5점

#9. (a) . $\varphi_A(x,y) = y^2 \arctan x$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

이라 하자.

$$\operatorname{grad} \varphi_A = \left(\frac{y^2}{1+x^2} , 2y \arctan x \right) = A(x,y)$$

이므로 A는 잠재함수가 존재한다.

┘10점.

$X(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ 폐곡선 위에서

$a(x,y)$를 선적분하면,

$\int_X a \cdot ds = 2\pi \neq 0$ 이므로 선적분의 기본정리에 의하여

a는 잠재함수가 존재하지 않는다.

┘ 10점.

※ $A(x,y)$를 $\mathbb{R}^2$ 에서 정의된 벡터장으로 보고 푸앵카레 도움정리를 사용한 경우만 10점. i.e. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 에서 사용한 경우는 0점.

(b) A는 잠재함수가 존재하므로 선적분의 기본정리에 의하여

$$\int_X A \cdot ds = \underbrace{\varphi_A(Q) - \varphi_A(P)}_{2점} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$ ┘5점.

각원소벡터장 a의 선적분 값은 원점에서 바라본 각의 변화량과 같으므로

$$\int_X a \cdot ds = \frac{11}{4}\pi .$$

┘ 5점.