

수학 및 연습 2 중간고사

(2014년 7월 10일 오후 7:00-9:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (15점). 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

은 원점에서 연속이 아님을 보이시오.

문제 2 (20점). 함수 $f(x, y, z) = e^{xz}(x^2 + y^2 - z)$ 와 점 $P = (1, -1, 0)$ 에 대하여 물음에 답하시오.

(a) (10점) 점 P 에서 함수 f 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터 \mathbf{v} 를 구하시오.

(b) (10점) 곡면 $e^{xz}(x^2 + y^2 - z) = 2$ 의 점 P 에서 접평면의 방정식을 구하시오.

문제 3 (15점). 함수

$$f(x, y) = \int_y^{x^2} \frac{2}{t} e^{-xt^2} dt$$

에 대하여 $\text{grad}f(1, 1)$ 을 구하시오.

문제 4 (20점). 집합 $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^4 + \frac{1}{4}z^4$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 정의역 D 에서 f 의 최솟값이 존재함을 보이고, 최댓값은 존재하지 않음을 보이시오.

(b) (10점) 정의역 D 에서 f 의 최솟값을 구하시오.

문제 5 (20점). 함수 $f(x, y) = ye^x + xy^2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) f 의 임계점을 모두 구하고, 그 임계점들이 극댓점인지, 극솟점인지 또는 안장점인지 판별하시오.

(b) (10점) $\mathbf{v} = (1, 2)$ 이고 $P = (\frac{1}{2}, -\sqrt{e})$ 일 때 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$ 를 구하시오.

문제 6 (20점). 원점에서 함수 $f(x, y) = \log(\cos(x^2 y))$ 의 6차 근사다항식을 구하시오.

(Hint : $x = 0$ 에서 로그함수의 테일러 전개 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ 를 이용하시오.)

문제 7 (30점). 곡선

$$X(t) = (2 \cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq \frac{11\pi}{4}$$

와 z -축을 제외한 3 차원 좌표공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + 2xy, \frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 + z, y \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터장 \mathbf{F} 는 닫힌 벡터장임을 보이시오.

(b) (10점) 벡터장 \mathbf{F} 는 정의역 전체에서 잠재함수를 가지는지 판별하고 그 이유를 밝히시오.

(c) (10점) 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 8 (20점). 함수 $F(x, y, z) = (x^2 y, \sin z)$ 와 $G(u, v) = (uv^2, e^u, \cos v)$ 에 대하여 $(G \circ F)'(1, 2, \pi)$ 를 구하시오.

문제 9 (40점). 주어진 벡터장 \mathbf{F} 와 곡선 X 에 대하여, 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

(a) (10점) $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x + y)$, X 는 곡선 $x = y^3$ 위의 $(-1, -1)$ 에서 $(1, 1)$ 까지.

(b) (10점) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -(xy \sin z + ye^x))$, $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(c) (10점) $\mathbf{F}(X) = -\frac{2X}{|X|^2}$, $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(d) (10점) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $X(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)