수학 및 연습 2 중간고사

2004년 10월 23일 오후 1시 – 3시

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. 함수 $f(x,y)$가 다음과 같이 주어져있다.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^2}} & ,\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) (10점) f가 원점에서 연속인지 판단하여라.

(b) (10점) $D_1f(0,0)$와 $D_2f(0,0)$가 존재하면 그 값을 구하여라.

(c) (10점) 원점에서 f의 미분가능성을 판단하여라.
(힌트: $|\, xy \,| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$)

2. **(a)** (10점) 미분가능한 함수 $f(x,y,z)$가 모든 실수 x,y,z에 대하여 $f(x,y,z)=f(x,-y,z)$를 만족할 때, $D_2f(0,0,0)$의 값을 구하여라.

(b) (15점) (a)의 조건을 만족하는 함수 f에 대하여 $D_{(1,1,1)}f(0,0,0)=1$, $D_{(1,2,3)}f(0,0,0)=2$일 때, 원점에서 f가 가장 빨리 증가하는 방향을 구하여라.
(힌트: 실수 a, b와 벡터 v, w에 대하여 $D_{av+bw}f(P)=aD_vf(P)+bD_wf(P)$가 성립한다.)

3. (20점) 곡면 $\dfrac{x^3}{2^3}+\dfrac{y^3}{3^3}-\dfrac{z^3}{4^3}=1$ 위의 점 $(2,3,4)$에서 접평면의 방정식을 구하여라.

4. **(a)** (10점) 원점에서 $f(x,y)=e^{-x}\cos y$의 2차 근사 다항식을 구하여라.

(b) (10점) $e^{-0.01}\cos(0.02)$의 2차 근사값을 구하고 오차가 $\dfrac{1}{3!}(0.03)^3$이하임을 보여라.

5. 함수 $f(x,y)=a(x-1)^4+b(y-1)^4-4ab(x-1)(y-1),\ ab\neq 0$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) (15점) $a=\frac{1}{2}, b=8$ 일 때 극대점, 극소점, 안장점을 구하여라.

(b) (10점) f가 오직 하나의 임계점을 갖도록 하는 a,b의 조건을 구하여라.

6. (20점) 점 $(0,0,3)$에서 곡면 $z=2x^2+3y^2$에 이르는 거리를 구하여라.

7. 실린더변환 $F(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $(r\geq 0, 0\leq\theta<2\pi)$와 구면변환 $G(\rho,\phi,\theta)=(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$, $(\rho\geq 0, 0\leq\phi\leq\pi, 0\leq\theta<2\pi)$를 생각하자.

(a) (10점) 변환 $F^{-1}\circ G$를 (ρ,ϕ,θ)의 함수로 나타내어라.

(b) (10점)변환 $F^{-1}\circ G$의 순간부피변화율을 구하여라.

8. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz, xz+z, xy+y+1)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) (10점) 벡터장 $\mathbf{F}$의 잠재함수를 모두 구하여라.

(b) (10점) 곡선 $X(t)=(\cos t,\sin t,t),\ 0\leq t\leq\pi$에 대하여 선적분 $\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$를 계산하여라.

9. **(a)** (10점) X가 곡선 $x=y^3$위의 $(-1,-1)$에서 $(1,1)$까지의 부분일 때 $\int_X y^2dx+xdy$를 구하여라.

(b) (10점) 미분형식 $y^2dx+xdy$는 완전 형식이 아님을 보여라.
(즉, $\mathbf{F}(x,y)=(y^2,x)$가 잠재함수를 가지지 않음을 보여라.)