

수학 및 연습 2 중간고사

2006년 10월 21일 13시 – 15시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 미분가능한 이변수 함수 f 에 대하여 삼변수 함수 g 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x, y, z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

다음 식이 성립함을 보이시오.

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = 3g.$$

2. (각 10점) 함수 $f(x, y) = e^x \cos y - x$ 에 대한 다음 질문에 답하시오.

- (a) f 의 임계점을 모두 구하시오.
- (b) (a)에서 구한 임계점이 극대, 극소, 혹은 안장점인지 판정하시오.
- (c) 원점에서 f 의 2차 테일러 다항식을 구하시오.

3. (20점) 꼭지점이 $(1, 2), (1, -2), (-1, -2)$ 인 삼각형 모양의 영역 (경계포함) D 에서 함수 $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$ 의 최대값과 최소값을 구하시오.

4. (20점) 두 변의 길이가 각각 x, y 인 직사각형을 밑면으로 하고 높이가 z 인, 윗 면이 없는 상자를 만들려고 한다. 상자의 부피를 일정하게 4로 할 때 이 상자의 표면적을 최소로 하는 x, y, z 값을 구하시오.

5. 공간의 점 $(1, 1, 1)$ 에서 곡면 $z = x \cos y - ye^x$ 모양의 거울을 향하여 빛이 $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$ 의 방향으로 진행하고 있다.

- (a) 빛이 거울과 만나는 점의 좌표를 구하시오. (10점)
- (b) (a)에서 구한 점에서 거울에 접하는 평면의 방정식을 구하시오. (20점)
- (c) 빛이 거울에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오. (20점)

6. (각 20점) 다음 문제에 답하시오.

- (a) $F = (f_1, f_2)$ 는 평면에서 정의된 기울기 벡터장이다. 새로운 벡터장 G 를

$$G(x, y) = F\left(x - 2y, -\frac{1}{2}x + y\right)$$

로 정의하자. 모든 (x, y) 에 대하여 $D_1 f_1(x, y) \neq \frac{1}{4} D_2 f_2(x, y)$ 이면 G 는 기울기 벡터장이 아님을 보이시오.

- (b) F 의 잠재함수를 φ 라 할 때, 직선 $X(t) = (2t, -t)$, $(0 \leq t \leq 1)$ 을 따라서 벡터장 G 가 한 일이 $\frac{1}{2} [\varphi(4, -2) - \varphi(0, 0)]$ 임을 보이시오.

7. (20점) 3차원 공간에서 정의된 벡터장

$$F(x, y, z) = (e^{yz}, xze^{yz} + z \cos y, xye^{yz} + \sin y)$$

가 직선 $X(t) = (t, t, 1 - t)$ ($0 \leq t \leq 1$)를 따라 한 일을 구하시오.