

**수학 및 연습 2 중간고사**  
(2013년 10월 19일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 좌표평면에서 정의된 함수  $f(x, y)$  에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (5점)  $f(x, y)$  가 원점에서 연속인지를 판정하시오.
- (b) (5점)  $D_1 f(0, 0)$  와  $D_2 f(0, 0)$  을 구하시오.
- (c) (10점) 원점에서  $f(x, y)$  의 미분가능성을 판정하시오.

문제 2 (20점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 미분가능한 함수  $f$  가 점  $P$  에서  $(1, 1, -1)$  방향으로 가장 빨리 증가하고 그 때의 방향 변화율은  $2\sqrt{2}$  이다. 점  $P$  에서 함수  $f$  의  $(1, 1, 0)$ -방향미분계수를 구하시오.
- (b) (10점) 타원면  $g(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$  과 그 위의 점  $P = (1, 1, 1)$  이 있다. 이 타원면 바깥의 어떤 점에서 점  $P$  를 향하여 단위벡터  $\mathbf{v}$  방향으로 발사된 빛이 타원면에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를  $\mathbf{v}^*$  라 하자. 벡터  $\mathbf{v}$  와 벡터  $\mathbf{v}^*$  가 서로 수직일 때,

$$D_{\mathbf{v}^*} g(P) - D_{\mathbf{v}} g(P)$$

의 값을 구하시오.

문제 3 (15점). 평면에서 정의된 이급 함수  $f(x, y)$  와 정의역의 원소  $P$  에 대해

$$f''(P) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

이라고 한다.  $\mathbf{v} = (a, b)$ ,  $\mathbf{w} = (c, d)$  일 때,  $D_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{w}} f(P)$  를  $a, b, c, d$  에 관한 식으로 나타내시오.

문제 4 (25점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 원점에서 함수  $f(x, y) = \cos x \sin y$  의 3차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (15점) (a)를 이용하여  $\cos 0.02 \sin 0.01$  의 3차 근사값을 구하고, 오차가  $4 \times 10^{-8}$  이하임을 보이시오.

문제 5 (25점). 서로 다른 세 점  $A, B, C$  가  $xy$ -평면에 주어져 있다. 삼각형  $ABC$  를 밑면으로 하고  $xy$ -평면에 있지 않은 점  $P$  를 꼭지점으로 하는 삼각뿔  $P - ABC$  에 대하여  $P$  가 이 삼각뿔의 부피가 일정하도록 움직인다. 이 때, 삼각뿔  $P - ABC$  의 옆면의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 꼭지점이 존재한다. 그 점을  $\bar{P}$  라고 할 때  $\bar{P}$  의  $xy$ -평면으로의 수선의 발  $Q$  가 밑면 삼각형  $ABC$  의 내심이 됨을 증명하시오.

힌트) 점  $Q$  에서 밑면 삼각형의 변까지의 길이를 각각  $u_1, u_2, u_3$  라 두고  $u_1 = u_2 = u_3$  임을 보이면 된다.

문제 6 (15점). 함수  $f(x, y) = y \sin x + xy^2 - y^2$  의 안장점 중,  $x$  축 위에 있는 점들을 모두 구하시오.

문제 7 (20점).

$$u = x^3 - e^z \sin y, \quad v = y^3 - e^z \cos x, \quad w = z^3 - xy - 3y,$$

$$x = t^2 + r^2, \quad y = \arctan s + tr, \quad z = t + r + s.$$

일 때,  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(t, r, s)}(0, 0, 0)$  의 값을 구하시오.

문제 8 (20점). 극좌표계로 주어진 평면의 영역  $D$  는

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

로 주어진다. 영역  $D$  의 경계를 반시계방향으로 매개화한 곡선을  $X(t)$  라고 할 때,

$$\int_X y dx - x dy$$

의 값을 구하시오.

문제 9 (20점). 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^z \cos(xy) + 2x, xe^z \cos(xy) - z \sin y, e^z \sin(xy) + \cos y)$$

의 곡선  $X(t) = (\cos t, \sin t, t), (0 \leq t \leq 2\pi)$  를 따르는 일의 양을 구하시오.

문제 10 (20점). 각원소 벡터장  $\mathbf{a} = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  를 다음 곡선을 따라 적분한 값  $\int_X \mathbf{a} \cdot ds$  를 구하시오. (그래프의 개형을 그리고 답만 쓰시오.)

(a) (10점)  $X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) (10점)  $X(t) = (t \cos t, t \sin t) + (2\pi, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$