

수학 및 연습 2 중간고사
(2011년 10월 22일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 함수 $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ 와 점 $P = (1, -1)$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) f 의 그래프 상의 점 $(1, -1, -2)$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (5점) 벡터 $\mathbf{v} = (x, y)$ 에 대하여 $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하시오.
- (c) (5점) 점 P 에서 함수값이 가장 빨리 증가하는 방향 \mathbf{w} 를 구하고, 그 방향으로의 변화율을 구하시오. (단, \mathbf{w} 는 단위벡터이다.)

문제 2 (30점). 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin^2 x}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $\mathbf{v} = (1, 1)$ 일때 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) 함수 f 가 $(0, 0)$ 에서 연속인지 판정하시오.
- (c) (10점) 함수 f 가 $(0, 0)$ 에서 미분가능하지 않음을 보이시오.

문제 3 (20점). $F(x, y) = \int_1^{xy} e^{-t^2 y} dt$ 라 할 때, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1, 1)$ 를 구하시오.

문제 4 (20점). $xy + yz = 1$ 일 때, $x^2 + 2y^2 + z^2$ 의 최솟값이 존재한다. 그 값을 구하시오.

문제 5 (20점). 함수 $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) f 의 극대점, 극소점과 안장점을 구하시오.
- (b) (10점) 벡터 $\mathbf{v} = (x, y)$ 에 대하여 이계방향미분계수 $D_{\mathbf{v}}^2 f(0, 0)$ 를 구하고, $D_{\mathbf{v}}^2 f(0, 0) > 0$ 을 만족시키는 \mathbf{v} 의 집합을 좌표평면 위에 도시하시오.

문제 6 (20점). 원점에서 함수 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 의 이차 근사다항식을 찾고, $|x| \leq 0.1, |y| \leq 0.1$ 인 범위에서 이차근사값의 오차의 한계가 0.002 보다 작음을 보이시오.

문제 7 (15점). 함수 $F(x, y) = (e^x \sin xy, e^x \cos xy)$ 의 야코비 행렬과 야코비 행렬식을 구하시오.

문제 8 (25점). 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^y, -\sin \pi x)$$

를 꼭지점이 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ 으로 이루어진 삼각형을 따라 시계반대방향으로 돌 때 선적분값을 구하시오.

문제 9 (30점). $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{A}(x, y) = \left(\frac{y^2}{1 + x^2}, 2y \arctan x \right), \quad \mathbf{a}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (20점) 이 벡터장들이 잠재함수를 가지는 지 조사하시오.
- (b) (10점) 점 $P = (1, 0)$ 에서 점 $Q = (-1, 1)$ 까지 다음 그림과 같은 곡선을 따라, 위의 벡터장을 적분한 값들을 구하시오.

