2014 여름계절학기 수및연2 중간고사
모범답안

[#1] $y = x^2$을 따라 원점으로 접근하면 $\rfloor$ +5

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^4)}{x^4 + x^4} = \frac{\sin x^4}{2x^4} \to \frac{1}{2} \text{ as } x \to 0$$ 이므로

$f(0,0) = 0$과 다른 값. 따라서 f는 원점에서 연속이 아니다. $\rfloor$ +10

(채점기준)
- 불연속임을 확인할 수 있는 경로를 잡은 경우 +5점
- 그 경로 상에서 실제로 극한값이 함수값과 다른것을 잘 설명한 경우 +10점
- f보다 더 큰 함수의 극한값이 0이 아닌것을 보인 경우 0점!

[#2] (a) $\nabla f(x,y,z) = \left(ze^{xz}(x^2+y^2-z) + 2xe^{xz},\ 2ye^{xz},\ xe^{xz}(x^2+y^2-z) - e^{xz} \right)$

→ 정확해야함

$\therefore \nabla f(1,-1,0) = (2,-2,1)$ +5

함수가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터 $\Rightarrow \frac{1}{3}(2,-2,1)$ +5

(b) 접평면의 법선벡터 $n = (2,-2,1)$이고 점 P를 지나므로 +5

접평면의 방정식 $\Rightarrow (x-1, y+1, z)\cdot(2,-2,1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + z = 4$ +5

(채점기준) (a) • $\nabla f(x,y,z)$를 "$\boxed{\text{정확히}}$" 구하고 이를 이용해서 $\nabla f(1,-1,0) = (2,-2,1)$을 구한 경우 +5점

• $\nabla f(1,-1,0)$ 방향의 단위벡터까지 올바르게 구하면 +5점

(b) • 접평면의 법선벡터가 기울기 벡터이고 점 P를 지난다는 것을 명시하면 (a)의 답이 잘못되더라도 +5점

• 올바른 접평면의 식을 구하면 +5점

[#3]

$$D_1 f(x,y) = 2x \cdot \frac{2}{x^2} e^{-x\cdot x^4} + \int_y^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{t} e^{-xt^2}\right) dt \quad (\because \text{라이프니츠 법칙, 연쇄법칙})$$

$$= \frac{4}{x} e^{-x^5} + \int_y^{x^2} \left(-2t e^{-xt^2}\right) dt \quad \text{—— } (*)$$

$$= \frac{4}{x} e^{-x^5} + \left[\frac{1}{x} e^{-xt^2}\right]_{t=y}^{t=x^2} = \frac{5}{x} e^{-x^5} - \frac{1}{x} e^{-xy^2} \quad +5$$

$$D_2 f(x,y) = (-1) \cdot \frac{2}{y} e^{-xy^2}$$

$$= -\frac{2}{y} e^{-xy^2} \quad +5$$

$$\therefore \nabla f(1,1) = \left(D_1 f(1,1),\ D_2 f(1,1)\right) = \left(\frac{4}{e},\ -\frac{2}{e}\right) \quad +5$$

(채점기준) • $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$, $\nabla f(1,1)$ 각각 5점씩

• $\left\{ \begin{array}{l} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{array} \right.$를 잘못구했는데 대입하는 과정에서 우연히 맞게된 경우 해당하는 부분 점수 없음.

• $D_1 f(1,1)$을 계산하는 과정에서 (*)에 대입하여 값을 구한 경우도 당연히 인정.

[#4] (a) $P=(2,0,0)$에 대하여 $f(P)=4$ 이므로

최솟값이 있다면 반드시 4 이하이다.

따라서, $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)\leq 4\}$ 라 둘때

f의 D에서의 최솟값의 존재성 여부는 $D\cap S$ 에서의 최솟값 존재여부와

같다. 그런데, $D\cap S$는 유계이고 닫힌 영역이며 f는 연속함수

이므로 최소·최대값 정리에 의해 반드시 최솟값을 가진다. +5

한편, $x+y+z=2$ 위의 $(2,-t,t)$에 대하여

$f(2,-t,t)=4+\frac{9}{4}t^4$은 $t\to\infty$일때 무한대로 발산하므로

최댓값은 없다. +5

(채점기준) ① 최솟값의 존재성을 보이는 부분에서

f의 등위면이 아닌 다른 곡면을 생각한 경우, 곡면이 충분히 크다는 언급이

없으면 3점만 부여 (곡면이 충분히 크지 않은 경우 최솟값이 그 곡면 내부에

있다고 말할 수 없음)

② 각 부분을 정확히 수학적 기호로 표현하지 않고 말로 한 경우

점수 없음. (ex ; 최댓값 없는걸 보이는 과정에서 x,y,z가 커질수록

함수값이 계속 커지므로, 원점을 포함하는 등위면이

점점 커져서 처음 평면과 닿는 순간이 있으므로 최솟값이 존재)

③ 최댓값이 없는 걸 보이는 과정에서 반드시 평면위의 구체적인 점들의

경로를 따라 최댓값이 없다는 걸 보여야 5점 부여.

④ 제약조건을 대입하여 2변수함수로 만든 후, 그 극점이 극소점임을 보여 최대값이 없음을 설명한 풀이도 정확하면 5점 인정.

[#4]-(b) (a)에 의해, D에서 f의 최솟값이 존재하고 이는 반드시 D에서 정의된 f의 극점이다

따라서 라그랑즈 승수법에 의해 그 점에서 $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$(f(x,y,z) = x^2 + 2y^4 + \frac{1}{4}z^4,\ g(x,y,z) = x+y+z-2)$

$\therefore (2x, 8y^3, z^3) = \lambda(1,1,1)$ +3

$\therefore x = \frac{\lambda}{2},\ y = \frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2},\ z = \sqrt[3]{\lambda}$

제약조건 $x+y+z=2$에 대입하면 $\frac{\lambda}{2} + \frac{3\sqrt[3]{\lambda}}{2} = 2$

$\sqrt[3]{\lambda} = t$라 두면 $t^3 + 3t - 4 = 0$

$(t-1)(t^2+t+4) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = 1$ +5

이때 f의 값은 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{4}\cdot 1^4$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$

$= \boxed{\frac{5}{8}}$ +2

(채점기준)

- 라그랑즈 승수법의 식을 제대로 적은 경우 +3점
- 계산을 하여 λ, x, y, z 값을 올바르게 구한 경우 +5점
- 구한 값을 대입하여 최솟값을 올바르게 구한 경우 +2점

[#5]

(a) $\nabla f(x,y) = (ye^x + y^2,\ e^x + 2xy) = (0,0)$을 풀면

$y(e^x+y) = 0$ 에서 $y=0$ or $y = -e^x$

① $y=0$인 경우 $e^x = 0$이므로 불가능한 경우

② $y=-e^x$인 경우 $-y+2xy = (-1+2x)y = 0$ 으로부터

$x=\frac{1}{2},\ y=-\sqrt{e}$

따라서 f의 임계점은 $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}\right)$로 유일하다 +5

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x+2y \\ e^x+2y & 2x \end{pmatrix}$$ 이므로 +3

$$f''\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right) = \begin{pmatrix} -e & -\sqrt{e} \\ -\sqrt{e} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det f''\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}\right) = -2e < 0$$

이므로 $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}\right)$는 안장점 +2

(채점기준) · 임계점을 올바르게 찾은 경우 +5점

· 임계점에 대한 올바른 헤세행렬을 찾으면 +3점

· 정확한 논리로 헤세 판정하여 안장점이라는 결론을 내리면 +2점

(행렬을 잘못 구한 경우 이부분에 대한 점수 없음)

· 헤세 판정 외에 경로를 잡아 함수값을 조사하여 안장점임을 보이는 경우 논리 및 계산이 정확해야 만점

· 임계점이 아닌 점에 대해 판정을 시도한 경우 −5점.

(b) $D_{\mathbf{v}}^2 f(p) = v_1^2 D_1^2 f(p) + 2v_1v_2 D_1D_2 f(p) + v_2^2 D_2^2 f(p)$

+5

앞서 (a)에서
$$\begin{cases} D_1^2 f(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}) = -e \\ D_1D_2 f(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}) = -\sqrt{e} \\ D_2^2 f(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}) = 1 \end{cases}$$
이므로

$$D_{\mathbf{v}}^2 f(p) = 1^2 \cdot (-e) + 2 \cdot 1 \cdot 2 (-\sqrt{e}) + 2^2 \cdot (1)$$
$$= -e - 4\sqrt{e} + 4$$

+5

(채점기준) • 이계 방향 미분의 공식을 올바르게 기술한 경우 +5점

• 공식에 따라 $D_{\mathbf{v}}^2 f(p)$를 정확히 계산한 경우 +5점.

\#6. $\log(\cos(x^2y))$

$$= \log\left(1 - \frac{1}{2!}(x^2y)^2 + \frac{1}{4!}(x^2y)^4 - + \cdots\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2!}(x^2y)^2 + \frac{1}{4!}(x^2y)^4 - + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}(x^2y)^2 + \frac{1}{4!}(x^2y)^4 + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2!}(x^2y)^2 + \cdots$$

$$\therefore\ T_6 f(x,y) = -\frac{1}{2}x^4y^2$$

(*) $o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^6\right)$ 에 대한 잘못된 표현이 있을경우 -5점

(결과에서) 6 차 보다 더 큰 차수의 항을 적었을때 -10점

답을 근사다항식 꼴로 적지 않았을때 -5점

#7. (a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+2xy\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x^2+z\right)$$ 4

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+2xy\right)=0=\frac{\partial}{\partial x}(y)$$ 3

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x^2+z\right)=1=\frac{\partial}{\partial y}(y)$$ 3

따라서 F는 닫힌 벡터장이다.

#7 (b) 벡터장 F 가 정의역 전체에서 잠재함수를 가진다면,

임의의 폐곡선 X 에 대해 $\int_X F\cdot ds = 0$ 이다.

<u>풀이 1</u> $X(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ 에 대해서 $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\int_X F\cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t + 2\sin t\cos t,\ \cos t + \cos^2 t,\ \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2 t\cos t + \cos^3 t)\, dt = 2\pi \neq 0 \quad \text{이므로}$$

잠재함수가 존재하지 않는다.

<u>풀이 2</u>

$$F(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)}_{F_1(x,y,z)} + \underbrace{(2xy,\ x^2+z,\ y)}_{F_2(x,y,z)}$$

$F_1(x,y,z)$ 는 xy 평면에서의 각원소 벡터장이고,

$F_2(x,y,z)$ 는 $\varphi(x,y,z) = x^2y + yz + C$ 를 잠재함수로 가진다

따라서 $X(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ 에 대해서 $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\int_X F\cdot ds = \int_X F_1\cdot ds + \int_X F_2\cdot ds$$

$$= 2\pi + 0 = 2\pi \neq 0 \quad \text{이다.}$$

($\int_X F_2\cdot ds = 0$ 선적분 기본정리에 의하여)

따라서, 잠재함수가 존재하지 않는다

※ 증명의 논리나 계산 결과를 명확하게 마무리 하지 않았을 경우 감점

#17. (c)

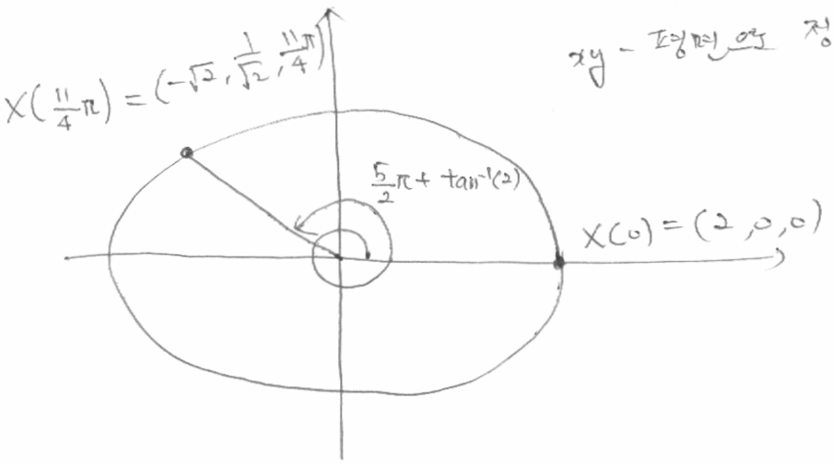
$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) + \left(2xy,\ x^2+z,\ y \right)$$

$$= \quad al \quad + \quad \tilde{F}$$

$$= \quad al \quad + \quad \nabla\left(x^2y + yz\right)$$

$$\int_{x} F \cdot ds = \int_{x} al \cdot ds + \int_{x} \nabla(x^2y+yz) \cdot ds$$

$$= \underbrace{\frac{5}{2}\pi + \tan^{-1}(2)}_{5} + \underbrace{\sqrt{2} + \frac{11}{4\sqrt{2}}\pi}_{5}$$



xy - 평면의 정사영

#8

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{pmatrix}$$ 5점

$$G'(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ e^u & 0 \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix}$$ 5점

연쇄 법칙에 의해,

$$(G \circ F)'(1,2,\pi) = G'(F(1,2,\pi)) \cdot F'(1,2,\pi)$$

$$= G'(2,0) \cdot F'(1,2,\pi)$$ 5점

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 5점

* F' 또는 G' 이 틀리면, 그 이후 계산에 대한 점수는 받을 수 없습니다.

9. (a)

곡선을 $X(t) = (t^3, t) \quad -1 \le t \le 1$

로 매개화하면,

$$\int_X F \cdot ds = \int_{-1}^{1} F(X(t)) \cdot X'(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^4, t^3 + t) \cdot (3t^2, 1)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (3t^6 + t^3 + t)\, dt$$ 5점

$$= \frac{3}{7}t^7 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{6}{7}$$ 10점

(b) F 의 잠재함수는 $\varphi = xy\cos z - yze^x + \text{const.}$ 5점

$$\int_X F \cdot ds = \varphi(1, 0, 2\pi) - \varphi(1, 0, 0)$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$ 10점

9. (c) F의 잠재함수는 $\varphi = -2\log|x| + \text{const}.$ ┘ 5점

$$\int_x F \cdot ds = \varphi(1, 0, 2\pi) - \varphi(1, 0, 0)$$

$$= -2\log\sqrt{1+4\pi^2} + 2\log 1$$

$$= -\log(1+4\pi^2)$$ ┘ 10점

(별해)

$$\int_x F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{-2}{1+t^2}(\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{2t}{1+t^2}\, dt$$ ┘ 5점

$$= -\log(1+t^2)\Big|_0^{2\pi} = -\log(1+4\pi^2)$$ ┘ 10점

(d) F의 잠재함수는 $\varphi = -\frac{1}{|x|} + \text{const}.$ ┘ 5점

$$\int_x F \cdot ds = \varphi(1, 0, 4\pi^2) - \varphi(1, 0, 0)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+16\pi^4}} + 1$$ ┘ 10점

(별해)

$$\int_x F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}(\cos t, \sin t, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 2t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2t^3}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}\, dt$$ ┘ 5점

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\Big|_0^{2\pi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^4}}$$ ┘ 10점