2014년도 수학 및 연습2 중간고사 모범답안

1. (a) ① $(x,y)\neq(0,0)$ 에서는 분모가 0이 되지 않는 유리함수이므로 연속

② $(x,y)=(0,0)$

$$\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x+y|\left|\frac{x^2+y^2}{2(x^2+y^2)}\right|$$

By 산술기하평균 $x^2+y^2\ge 2|xy|$

분모에 사용하면 −2점 감점

$$=\frac{1}{2}|x+y| \longrightarrow 0 \quad \text{as } x,y\to 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$ 이므로 원점에서 연속이다.

- 분모가 0이되는 케이스를 고려하지 않고 부등식을 쓰면 −2점감점
- 절댓값이 없으면 (산술기하평균에도) − 1점 감점
- 틀린 부등식 사용 (ex. $|xy|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)$) − 0점
- $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$로 치환해서 계산해도 맞음
- case 나눠서 계산 (ex. ① $x=0, y\neq0$, ② $x\neq0, y=0$, ③ $x\neq0, y\neq0$) − 0점

(b) $$D_1f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\frac{0}{t^2}=0 \quad \left(=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(t,0)\right)$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0 \quad \left(=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(0,t)\right)$$

- x, y 방향으로 f를 직접 미분하면 0점
- 하나만 맞으면 3점

(c) 방법 1) $D_{(1,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{t\cdot 2t^2} = 1$ 인데

(b에 의해) $D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0) = 0 \neq D_{(1,1)}f(0,0)$

이므로 f는 원점에서 미분가능하지 않다

방법 2) 함수 f가 점 p에서 미분가능하기 위해서는

$\lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{|f(p+\vec{v})-f(p)-\mathrm{grad}f(p)\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 0$ 을 만족해야 한다 (*)

$\vec{v} = (a,b)$에 대해,

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}\right|}{(a^2+b^2)^{1/2}} = \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{|a^2b+ab^2|}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

$(a=b)$일때

$\lim_{a\to 0} \frac{|2a^3|}{(2a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ 이므로 f는 원점에서 미분가능하지 않다

- b를 틀려도 정의대로 풀면 5점 (b에서 계산과정은 틀렸으나 (0,0)이 나올경우에는 10점)
- (*)를 정확히 알고있다고 인지되면 5점
- 미분가능함을 $D_v f(p) = \mathrm{grad}f(p)\cdot v$로 보이면 틀림 (정의를 모르고 있다고 판단)
- 정의에서 분모의 $\vec{v}$의 절댓값은 문맥상 판단.

문제 2. (a) $f(x,y,z) = e^x \sin y - z$ 라 두면

주어진 곡면은 $f(x,y,z)=0$ 인 등위면이다.

따라서 P에서 접평면의 법선벡터는

$\text{grad}\, f(P) = (e^x \sin y,\ e^x \cos y,\ -1)\big|_{x=P}$ +5.

$= \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{3},\ -1\right)$ 이고, +3

접평면의 방정식은 $(X-P)\cdot \text{grad}\, f(P) = 0$,

즉 $\left(x-\log 3,\ y-\frac{\pi}{6},\ z-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{3},\ -1\right)$

$= \frac{3}{2}(x-\log 3) + \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(y-\frac{\pi}{6}\right) - \left(z-\frac{3}{2}\right) = 0$ 이다. +2.

(b) 직선의 방향벡터 $(1,1,-\sqrt{2})$가

Q에서 접평면과 수직이므로, Q에서 접평면의 법선벡터와 평행이다. +5

즉, Q에서 접평면의 법선벡터 $\text{grad} f(Q) = (e^a \sin b,\ e^a \cos b,\ -1) \parallel (1,1,-\sqrt{2})$

$\Longleftrightarrow (e^a \sin b,\ e^a \cos b,\ -1) = t\cdot(1,1,-\sqrt{2})$ 이고,

따라서 $Q=(a,b,c) = \left(0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이고 +3

접평면의 방정식 $(X-Q)\cdot(1,1,-\sqrt{2}) = 0$, 이다. +2

$\left(x+y-\sqrt{2}z = \frac{\pi}{4}-1\right)$

* 접평면의 방정식을 등호없이 식으로만 적은 경우 2점 감점

ex) $\frac{3}{2}(x-\log 3) + \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(y-\frac{\pi}{6}\right) - \left(z-\frac{3}{2}\right)$: 접평면의 방정식.

* (b)에서, 방향벡터 $(1,1,-\sqrt{2})$와 법선벡터가 '같다'고 한 경우 2점 감점.

3 (a) $h(t) = f(tx, ty)$

연쇄 법칙에 의하여

$$h'(t) = \frac{\partial(tx)}{\partial t} D_1 f(tx, ty) + \frac{\partial(ty)}{\partial t} D_2 f(tx, ty)$$

$$= x D_1 f(tx, ty) + y D_2 f(tx, ty). \quad +10$$

* 표기법의 오류 −5점.

ex) $x D_1 f + y D_2 f$, $\quad x \frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial y} f(tx, ty)$ 등.

어떤 점의 대입된 값인지 분명하지 않은 경우.

− $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 로 간주. $\quad \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ 로 간주. (u, v 등의 변수를 정의할 경우).

3. (b) $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 (x f(tx,ty) + y g(tx,ty))\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (x f(tx,ty) + y g(tx,ty))\,dt \qquad \text{(라이프니츠 정리)}$$

$$= \int_0^1 (f(tx,ty) + tx D_1 f(tx,ty) + ty D_1 g(tx,ty))\,dt \quad +5$$

$$= \int_0^1 (h(t) + t h'(t))\,dt \qquad \text{(by 3. (a))}$$

$$= [t h(t)]_0^1$$

$$= h(1)$$

$$= f(x,y). \quad +3$$

마찬가지 방법으로 $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x,y) = g(x,y)$. ~~+2~~

$\therefore$ grad $\varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. $+2$

* $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x,y)$ 중 하나를 정확히 계산하면, 나머지 하나를 하지 못하더라도 8점.

4. $f(x,y)=x^2+y^2$

$g(x,y)=x^3+y^3+x+y$ 라 두자.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=4\}$ 라 두면

$(1,1)\in D$ 이고, 이 때 $f(1,1)=2$ 이다.

이제 $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\le 2\}$ 로 두면,

$D\cap S$는 비어 있지 않은 닫힌 유계집합이고,

f는 연속함수이므로 최대최소 정리에 의해

f는 $D\cap S$에서 최솟값을 가진다.

그런데 f가 D에서 만약 최솟값을 가진다면 이는

2보다 작거나 같으므로, $D\cap S$에서의 최솟값이

D에서의 최솟값과 같다. 따라서 f는 D에서

최솟값을 가진다. $\rfloor +5$ …①

한편, 임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대해서 $y^3+y=4-x^3-x$를

만족하는 y가 존재한다. 따라서 D 위에서

x^2+y^2이 무한히 커질 수 있으므로 f는 D에서

최댓값을 가지지 않는다. $\rfloor +5$ …②

이제 f가 $(x,y)\in D$에서 최솟값을 가진다면,

라그랑주 승수법에 의해

$\lambda(3x^2+1,\ 3y^2+1)=(2x,\ 2y)$

을 만족하는 실수 λ가 존재한다.

따라서 $\lambda=\dfrac{2x}{3x^2+1}=\dfrac{2y}{3y^2+1}$ 가 되어서

$2(3xy-1)(x-y)=0$ 이다.

따라서 $x=y$ 이거나 $3xy=1$ 이다. $\rfloor +5$ …③

i) $x=y$ 인 경우

: $2x^3+2x=4$ 이므로 $x=y=1$ 이 되고,

이때 $f(1,1)=2$ 이다.

ii) $3xy=1$ 인 경우

: $4=x^3+y^3+x+y=(x+y)^3-3xy(x+y)+(x+y)$

$$=(x+y)^3$$

이 되어서 $x+y=\sqrt[3]{4}$ 가 된다.

따라서 이때 $x^2+y^2=\sqrt[3]{16}-\frac{2}{3}$ 이다.

$\sqrt[3]{16}-\frac{2}{3}<2$ 이므로,

최솟값은 $\sqrt[3]{16}-\frac{2}{3}$ 이고, 최댓값은 없다. $+5$ … ④

채점기준.

- ③ 이 틀렸을 경우 ④는 0점. (①, ②와는 무관).
- ①, ②, ③ 은 각각 독립적으로 채점.
- 최댓값이 없다는 것을 한 번도 언급하지 않은 경우 ④는 0점.

5. (a) $f(x,y) = \cos x \cdot \log(1+y)$.

$D_1 f = -\sin x \log(1+y)$ $\quad D_1^2 f = -\cos x \log(1+y)$ $\quad D_1^3 f = \sin x \log(1+y)$

$D_2 f = \cos x \dfrac{1}{1+y}$ $\quad D_1 D_2 f = -\sin x \dfrac{1}{1+y}$ $\quad D_1^2 D_2 f = -\cos x \dfrac{1}{1+y}$

$D_2^2 f = \cos x \dfrac{-1}{(1+y)^2}$ $\quad D_1 D_2^2 f = \sin x \dfrac{1}{(1+y)^2}$

$D_2^3 f = \cos x \dfrac{2}{(1+y)^3}$

$\Rightarrow T_3 f(x,y) = f(0,0) + D_v f(0,0) + \frac{1}{2!} D_v^2 f(0,0) + \frac{1}{3!} D_v^3 f(0,0)$ 3점 $\quad (v = (x,y))$

$= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}(-3x^2 y + 2y^3) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 y$. 10점

별해) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ $\quad \log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$

$\cos x \cdot \log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 y + o(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3})$

테일러 전개의 유일성에 의해 5점 $\quad T_3 f(x,y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 y$. 10점

(b) $\cos 0.1 \log 1.1 \approx T_3 f(0.1, 0.1) = 0.1 - \frac{1}{2}0.1^2 + \frac{1}{3}0.1^3 - \frac{1}{2}0.1^3 = \frac{569}{6000}$. 2점.

오차 $|R_3 f(0.1, 0.1)| \le M_4 \dfrac{(0.1+0.1)^4}{4!}$ 6점

$M_4 = \max\{ |D_i D_j D_k D_l f(tx, ty)| : 1 \le i,j,k,l \le 2,\ 0 \le t \le 1 \}$

그런데 $D_1^4 f = \cos x \log(1+y)$ 이고 $|\cos x| \le 1$ $|\sin x| \le 1$ $\left|\frac{1}{(1+y)^k}\right| \le 1$ 이므로

$D_1^3 D_2 f = \sin x \cdot \dfrac{1}{1+y}$

$D_1^2 D_2^2 f = \cos x \dfrac{1}{(1+y)^2}$

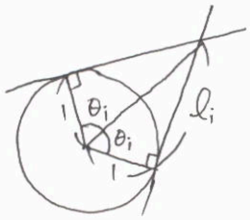
$D_1 D_2^3 f = -\sin x \dfrac{2}{(1+y)^3}$

$D_2^4 f = \cos x \dfrac{-6}{(1+y)^4}$

$M_4 = |D_2^4 f(0,0)| = 6$. 10점. $\quad$ 오차 $\le 6 \cdot \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{10}\right)^4 = 4 \times 10^{-4}$

* (a) 별해에서 유일성에 대한 언급이 없거나 식의 전개가 바르지 않으면 5점 감점.

6.



$$l_i = \tan\theta_i, \quad 1 \le i \le n$$

$$2(\theta_1 + \cdots + \theta_n) = 2\pi$$

넓이 $S = \sum_{i=1}^{n} 2 \times \frac{1}{2} \times \tan\theta_i$

$\Rightarrow f(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \tan\theta_1 + \cdots + \tan\theta_n$

$g(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \theta_1 + \cdots + \theta_n$

<u>WANT</u> $g = \pi$ 에서의 f 의 최솟값

By 라그랑즈 승수법,

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$$

즉, $(\sec^2\theta_1, \cdots, \sec^2\theta_n) = \lambda(1, 1, \cdots, 1)$

$\Rightarrow \sec^2\theta_1 = \cdots = \sec^2\theta_n$

$\Rightarrow \cos^2\theta_1 = \cdots = \cos^2\theta_n$

$\Rightarrow \theta_1 = \cdots = \theta_n \quad (\because n \geq 3)$

따라서, $\theta_1 = \cdots = \theta_n = \frac{\pi}{n}$ 일때 최솟값 $n \cdot \tan\frac{\pi}{n}$ 를 갖는다.

※ 정 n각형이 됨을 충분히 보이지 못한 경우 0점

ex) 산술 기하 이용 (양변이 함수이므로)

※ 라그랑즈 승수법 사용시,

f, g 가 적절하게 설정하지 못한 경우 0점

※ 사소한 계산 실수 -5점

※ 설명부족 or 생략 -10점.

7.

$$F'(p) = \begin{pmatrix} D_1 f(p) & D_2 f(p) \\ D_1 g(p) & D_2 g(p) \end{pmatrix}$$ +5

Let grad $f(p) = (a, b)$, grad $g(p) = (c, d)$

then $D_v f(p) = \text{grad} f(p) \cdot v = (a, b) \cdot (3, -2) = 3a - 2b = 2$

$D_w f(p) = \text{grad} f(p) \cdot w = (a, b) \cdot (-2, 1) = -2a + b = 0$

$D_v g(p) = \text{grad} g(p) \cdot v = (c, d) \cdot (3, -2) = 3c - 2d = -3$

$D_w g(p) = \text{grad} g(p) \cdot w = (c, d) \cdot (-2, 1) = -2c + d = 1$

$\therefore$ grad $f(p) = (-2, -4)$ +5, grad $g(p) = (1, 3)$ +5

or

$D_1 f(p) = -D_v f(p) - 2 D_w f(p) = -2$

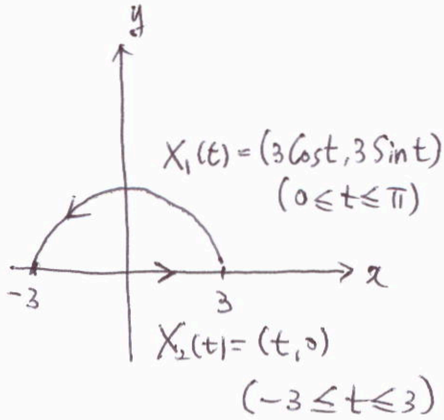
$D_1 g(p) = -D_v g(p) - 2 D_w g(p) = 1$ +5

$D_2 f(p) = -2 D_v f(p) - 3 D_w f(p) = -4$

$D_2 g(p) = -2 D_v g(p) - 3 D_w g(p) = 3$ +5

$$\therefore F'(p) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ +5, 총 20점.

[#8]



$$F(x,y) = (-y, x)$$

$$일 = \int_{X_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{X_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^{\pi} \vec{F}(X_1(t)) \cdot X_1'(t)\,dt + \int_{-3}^{3} \vec{F}(X_2(t)) \cdot X_2'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-3\sin t, 3\cos t) \cdot (-3\sin t, 3\cos t)\,dt + \int_{-3}^{3} (0, t) \cdot (1, 0)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 9\,dt + \int_{-3}^{3} 0\,dt = \boxed{9\pi}$$

(채정기준) · X_1 에서의 선적분 : 10점

→ 선적분의 정의 까지만 올바르게 쓰면 5점

(곡선의 매개화, ◦ 곡선의 향 까지 모두 정확해야 함)

(정의를 쓰지 않고 바로 대입하다 틀린 경우 이 부분점수 없음)

→ 계산을 올바르게 완료하여 9π를 얻으면 10점.

· X_2 에서의 선적분 : 5점.

→ 선적분이 0이 되는 이유를 정확히 명시해야 5점.

(ex) $\int_{-3}^{3} (0,t) \cdot (1,0)\,dt$ or $\vec{F}(X_2(t))$ 와 $X_2'(t)$가 수직이므로 ...

→ 선적분의 정의에 식을 잘못 대입한 경우 점수 없음 (답이 0으로 우연히 나왔어도)

#9.

sol 1) 선적분의 정의에 의해,

$$\int_{x} \mathbb{G}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbb{G}(\mathbf{x}(t))\cdot \mathbf{x}'(t)\,dt \quad \lrcorner\ +5$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(4\cos 3t - 2\sin 3t,\ 2\cos 3t + 4\sin 3t\right)\cdot\left(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(-24\cos 3t\sin 3t + 12\sin^2 3t + 12\cos^2 3t + 24\sin 3t\cos 3t\right) dt \quad \lrcorner\ +10$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi. \quad \lrcorner\ +5$$

* 적분계산시 계산실수한 경우는 −5점,

내적계산 과정에서 계산실수한 경우는 −15점.

sol 2) $$\mathbb{G}(x,y) = \underbrace{\frac{(-y,\ x)}{x^2+y^2}}\ +\ \underbrace{\frac{(2x,\ 2y)}{x^2+y^2}}$$

$= \mathbb{a}(x,y) + \mathbb{F}(x,y)$ 라 두면, $\lrcorner$ +5

①: $\int_{x} \mathbb{a}(x,y)\cdot d\mathbf{s} = 6\pi$ ($\because$ 각원소벡터장, 세바퀴 감으므로) 이고, $\lrcorner$ +5

②: $$\int_{x} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(4\cos 3t,\ 4\sin 3t\right)\cdot\left(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$ 이다. $\lrcorner$ +5

③: $\therefore \int_{x} \mathbb{G}\cdot d\mathbf{s} = 6\pi + 0 = 6\pi$ $\lrcorner$ +5

* 잠재함수를 사용한 경우에도 정답처리함.

* ① 또는 ②의 계산이 틀린경우, ③에서의 5점을 받을 수 없음.

10.

(a) $D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \sin\frac{1}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 \sin\frac{1}{t^2} = 0$

┘4

$D_2 f(0,0)$ 역시 마찬가지로 0.

┘8

(b) $\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{|f(a,b)-f(0,0)|}{|(a,b)|} = 0$ 임을 보이면 된다 ($\because \nabla f(0,0) = (0,0)$)

i) 만일 $a \neq 0$ 이고 $b=0$ 이면,

$$\frac{|f(a,b)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a^3 \sin\frac{1}{a^2}|}{|a|} \leq a^2 = a^2+b^2$$

ii) 만일 $a=0$ 이고 $b \neq 0$ 이면, i)과 마찬가지 방법으로

$$\frac{|f(a,b)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq b^2 = a^2+b^2$$

iii) 만일 $ab \neq 0$ 이면.

$$\frac{|f(a,b)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a^3 \sin\frac{1}{a^2} + b^3 \sin\frac{1}{b^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{|a|^3+|b|^3}{\sqrt{a^2+b^2}} = a^2 \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} + b^2 \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq a^2+b^2$$

따라서, $\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{|f(a,b)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \lim_{(a,b)\to(0,0)} (a^2+b^2) = 0$

$\therefore$ f는 원점에서 미분가능하다.

┘8

(c) $x \neq 0$ 일 때 $D_1(x,y) = 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}$ 이고

$D_1 f$는 $x \to 0$ 일 때 진동하는 함수이므로 불연속이다.

따라서, f는 일급함수가 아니다.

┘9

* 채점기준

(a) • 답만 적거나 편미분계수의 정의를 잘못 적은 경우, 0점

• 편미분계수의 정의를 올바르게 적었으나 답이 틀린 경우, 4점

(b) • $ab=0$ 의 경우를 고려하지 않았을 시, -3점

• $D_v f(0,0)=0,\ \forall v$ 또는 특정방향을 잡아 미분계수를 구한 경우, 0점

• (a)에서 $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$ 을 잘못 구하고 풀이를 그대로 전개했을 경우, 0점.