수학 및 연습 2

문제 1-(a)

산술기하 평균에 의해 $x^2 + |y|^3 \geq 2\sqrt{x^2|y|^3} = 2|x||y|^{\frac{3}{2}}$

이 성립한다.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2+|y|^3} \right|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy^2|}{2|x||y|^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{|y|} = 0$$

∴ 함수 f는 원점에서 연속이다. ⌋ 10점.

- 잘못된 부등식 유도를 쓴 경우 0점.

- 특정한 곡선으로 제한시켜 계산한 경우 0점

1. (b) $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,1)) - f(0,0)}{t}$ ⌋ 5점

$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3}{t^2+|t|^3}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+|t|^3}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+|t|} = 1$ ⌋ 10점

* 채점기준

- 방향미분의 정의를 알면 5점
- 계산까지 맞으면 10점.

1 (c)

M1) f 가 원점에서 미분가능 하다면

$D_v f(0) = \nabla f(0) \cdot v$ 가 성립하여야 한다. 이때 $v=(1,1)$ 이라고 하면

1 (b)에 의하여 $D_v f(0) = 1$ 이다

한편 $D_{(1,0)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\overset{0}{t^2}}{t} = 0$

$D_{(0,1)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{0}{|t|^3}}{t} = 0$ 이므로 $\nabla f(0,0) = (0,0)$ 이다

따라서 $1 = D_v f(0) \neq \nabla f(0) \cdot (1,1) = 0$ 이므로 f는 원점에서 미분 불가능 이다.

M2) f가 원점에서 미분가능 하다면

$\nabla f(0,0)$ 이 존재하고 $f((0,0)+v) - f(0,0) - \text{grad} f(0,0) \cdot v = o(|v|)$

가 성립하여야 한다.

한편 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot v|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{xy^2}{x^2+|y|^3}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(v=(x,y))$

$y=x$ 따라 0으로 접근하면

$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{|x|^3}{x^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ 이므로 원점에서 미분 불가능이다.

※ 채점 기준

、미분 가능성의 정확한 조건을 알고 $a = \text{grad} f(0,0)$ 라는 것과 $\text{grad} f(0,0) = 0$ 이 되는 것을 꼭 나타내야 5점.

위의 내용을 보이지 않으면 0점

、그 이후 미분 불가능 함을 보일 때 계산 실수 −5점.

#2. $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$ 라고 두면 P는 $f|_{g^{-1}(0)}$의

임계점이므로 라그랑즈 승수법에 의해

$$\mathrm{grad} f(p) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\, g(p)$$
$$= \lambda \cdot (2, 4, -6)$$

5점

인 $\lambda (\neq 0 \because \mathrm{grad} f(p) \neq 0)$가 존재한다. $\mathrm{grad} f(p)$는 p에서 f의

등위면에 수직이므로 구하려는 접평면의 방정식은

$$\mathrm{grad}\, f(p) \cdot (x-1, y-1, z+3) = 0$$

10점

$\mathrm{grad} f(p)$는 $(1, 2, -3)$과 평행하므로 위 방정식은

$$x + 2y - 3z = 14$$

와 같다.

20점

※ · $f = g$ 라고 가정하는 등 라그랑즈 승수법을 이용하지 않고 우연히

답을 얻었다고 판단될 경우 0점

· $\mathrm{grad} f(p) = \mathrm{grad}\, g(p)$ 등의 부정확한 표현이나 계산 실수 5점 감점.

#3. • $D_v^2 f(P)$ 구하기.

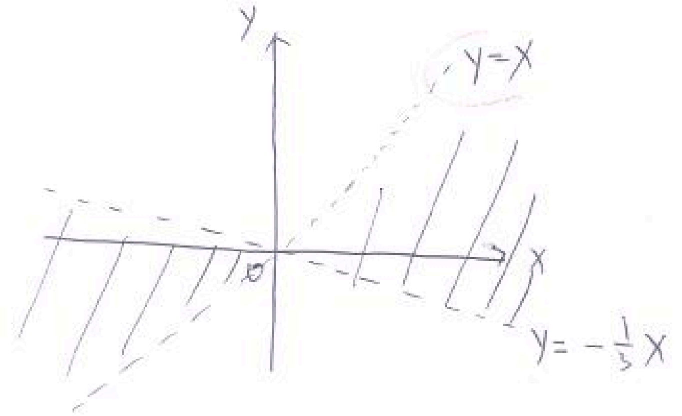
$v = (x, y)$라 하자.

$$D_v^2 f(P) = x^2 D_1^2 f(P) + 2xy D_1 D_2 f(P) + y^2 D_2^2 f(P)$$
$$= x^2 + 2xy - 3y^2$$

10점.

• $D_v^2 f(P) > 0$ 인 벡터 v의 집합 도시하기.

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = (x+3y)(x-y) > 0$$



(∵ (1,0)을 대입 ; $1^2 + 2\cdot1\cdot0 - 3\cdot0^2 = 1 > 0$ 이므로 부등식 만족)

10점.

단, 그림에서 $y=x$ 혹은 $y=-\frac{1}{3}x$ 언급안하면 2점씩 감점.

경계가 제외다는 표현 안하면 2점 감점.

$D_v^2 f(P)$ 잘못 구하고, 그림 맞게 ~~그~~그리면 그림에서 5점 감점.

인수분해 잘못하면, 그림에서 0점.

4.

Method 1.

$$T_2 f(x,y) = f(0,0) + (xD_1 + yD_2) f(0,0) + \frac{1}{2!}(xD_1 + yD_2)^2 f(0,0) \quad \cdots \quad +10$$

- $f(0,0) = 0$

  $D_1 f(0,0) = 2, \quad D_2 f(0,0) = 1$

  $D_1^2 f(0,0) = -4, \quad D_1 D_2 f(0,0) = -2, \quad D_2^2 f(0,0) = -1.$ $\quad \cdots \quad +10$

$$\therefore \quad T_2 f(x,y) = 0 + (2x+y) + \frac{1}{2}(-4x^2 - 4xy - y^2)$$

$$= 2x + y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2.$$

* 계산실수 각 -5점.

Method 2.

$$f(x,y) = (2x+y) - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + o((2x+y)^2)$$

$$= (2x+y) - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + o(x^2+y^2)$$

테일러 전개의 유일성에 의해,

$$T_2 f(x,y) = (2x+y) - \frac{1}{2}(2x+y)^2$$

$$= 2x + y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2.$$

* $o((2x+y)^2) = o(x^2+y^2)$ 언급 없으면 -5점.

"유일성" 언급이 없는 경우 -5점.

5. 「정의역 $x^2+y^2+z^2+2x=1$, $x\ge -1$ 이 유계. 닫힌집합이고 (3점)

함수 $x+y+z$ 가 연속 이므로 (2점)

최대최소 정리에 의해 최댓값과 최솟값이 존재한다. 」 ... 〈5점〉

「case1). $x>-1$ 이고 $x^2+y^2+z^2+2x=1$ 인 경우.

라그랑주 승수법에 의해 $(2x+2, 2y, 2z)=\lambda(1, 1, 1)$ 을 만족하는 λ가 존재한다. (5점)

$x=\frac{1}{2}(\lambda-2)$, $y=\frac{\lambda}{2}$, $z=\frac{\lambda}{2}$ 를 $x^2+y^2+z^2+2x=1$ 에 대입하면,

$\lambda=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 을 얻는다.

i) $\lambda=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 인 경우, $x=\frac{\sqrt{6}}{3}-1$, $y=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $z=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로

$x+y+z=\sqrt{6}-1$.

ii) $\lambda=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 인경우, $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}-1\le -1$ 이므로 문제의 조건을 만족하지 않는다. (5점) 」...〈10점〉

「case2). $x=-1$ 인 경우.

즉, $y^2+z^2=2$ 일때, $-1+y+z$ 의 최대최소를 구한다.

다시 한 번 라그랑주 승수법을 적용하면 $(2y, 2z)=\tilde{\lambda}(1, 1)$ 을 만족하는 $\tilde{\lambda}$가 존재.

$y=\frac{\tilde{\lambda}}{2}$, $z=\frac{\tilde{\lambda}}{2}$ 를 $y^2+z^2=2$ 에 대입하면,

$\tilde{\lambda}=\pm 2$ 를 얻는다.

i) $\tilde{\lambda}=2$ 인 경우, $y=1$. $z=1$ 이므로,

$-1+y+z=1$.

ii) $\tilde{\lambda}=-2$ 인 경우, $y=-1$, $z=-1$ 이므로,

$-1+y+z=-3$ 」...〈5점〉

「∴ $x+y+z$ 의 최댓값은 $\sqrt{6}-1$, 최솟값은 -3이다. 」 ... 〈5점〉

* 풀이과정이 명시되지 않으면 감점.

문제 6

풀이1)
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\right)$$
$$= r^2\sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

풀이2)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)$$
$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)$$
$$= \cos^2\theta\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$$
$$+ \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$$
$$- \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$
$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

---

* 채점 기준.

- 1계 미분이 계수까지 완벽하게 계산된 경우, 혹은 1계미분과 2계 미분 공식이 완벽하게 서술된 경우 → 5점.
- 2계 미분 공식 및 각 계수들 계산도 모두 맞으나 약간의 실수가 있는 경우 15점.
- 완벽하게 맞은 경우 25점
- 나머지 모두 0점.

문제 7. 곡선 $X(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $0 \le t \le 2\pi$ 를 따르는

벡터장 $F(x,y) = \dfrac{(x-y,\ x+y)}{x^2+y^2}$ 의 선적분 $\int_X F \cdot d\vec{s}$ 를 구하시오.

sol)

$$\int_X F \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(X(t)) \cdot X'(t)\, dt$$ ┘5점

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos 2t - \sin 2t,\ \cos 2t + \sin 2t)}{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)} \cdot (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t)\, dt$$ ┘10점

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi.$$ ┘20점.

· 계산 실수는 개수 당 (−5)점

$$F(x,y) = \frac{(x-y,\ x+y)}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{(x,\ y)}{x^2+y^2}}_{=:F_1(x,y)} + \underbrace{\frac{(-y,\ x)}{x^2+y^2}}_{=:F_2(x,y)}$$

$$\int_X F_1 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F_1(X(t)) \cdot X'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos 2t,\ \sin 2t)}{\cos^2 2t + \sin^2 2t} \cdot (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$ ┘ 10점

$F_2(x,y)$ 는 각원소 벡터장이고 $X(t)$는 원점을 양의 방향으로 두바퀴 감았으므로

$$\int_X F_2 \cdot d\vec{s} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

$$\int_X F \cdot d\vec{s} = \int_X F_1\, d\vec{s} + \int_X F_2\, d\vec{s} = 4\pi$$ ┘10점

8 - (a)

$\mathbb{F}$는 $\mathbb{R}^3$ (볼록) 전체에서 정의됨.

또한 $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z}$ 닫힌 벡터장.

∴ 푸앙카레 도움정리에 의해 잠재함수 φ 존재

φ를 구하면,

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz^2\cos x$ $\quad$ ∴ $\varphi = yz^2\sin x + h(y,z)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2\sin x + z\sinh(1+yz) = z^2\sin x + \frac{\partial h}{\partial y}$

∴ $\frac{\partial h}{\partial y} = z\sinh(1+yz)$ $\quad$ ∴ $h = \cosh(1+yz) + g(z)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz\sin x + y\sinh(1+yz) = 2yz\sin x + y\sinh(1+yz) + \frac{dg}{dz}$

∴ $\frac{dg}{dz} = 0$ $\quad$ ∴ $g = C$ (constant)

∴ $\varphi = yz^2\sin x + \cosh(1+yz) + C$

(또는 φ를 구한다음 $\mathbb{R}^3$ 전체에서 $\text{grad}\,\varphi = \mathbb{F}$ 임을 보여도 됨)

※ 잠재함수 φ를 정확히 구해야 10점

※ 잠재함수를 잘못 구하면 0점. 상수항을 안썼을 경우 5점.

#8-(b)

8-(a)에 의해 벡터장 F는 잠재함수 $\varphi(x,y,z) = 4z^2\sin x + \cosh(1+yz) + C$ (C: 상수)

를 만족하므로, 선적분의 기본정리에 의해.

$$\int_X F \cdot ds = \int_X \text{grad}\varphi \cdot ds = \varphi(X(\tfrac{\pi}{2})) - \varphi(X(0)) \quad +5$$

$$= \varphi(\tfrac{\pi}{2}, 1, -1) - \varphi(0, -1, 1)$$

$$= 1 \quad +10$$

* 8-(a) 틀리면 -5

9. 풀이 ①

$$\int_X dx = \int_X \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$= \int_X F \, ds \quad \text{where} \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)$$

$$= \left(\sin\phi\cos\theta , \rho\cos\phi\cos\theta , -\rho\sin\phi\sin\theta \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t , \cos^2 t , -\sin^2 t) \cdot (0, 1, 1) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt$$ 10점

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$ 20점

풀이 ②

$$\int_X dx = \int_X \text{grad}\, x \, ds = x(X(\tfrac{\pi}{2})) - x(X(0))$$ 10점

$$= x(1, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) - x(1, 0, 0)$$

$$= 0$$ 20점

풀이 ③

$$x(X(t)) = \sin t\cos t$$

$$\int_X dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt$$ 10점

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$ 20점 채점기준 상세설명 뒤로 ~

9. 채점 기준

- 반드시 올바른 적분범위와 피적분 함수를 x에 관한 식으로 완벽하게 나타내어야 10점을 받을 수 있음.
- 답이 옳더라도, 적분 과정의 계산이 틀린 경우 (적분 실수, 삼각함수 변환 실수 등) 에는 이후 점수를 받을 수 없음.
- 두번째 풀이의 경우 시작점과 끝점에서의 함수 x의 함수값을 제대로 구하지 못한 경우 답에 해당하는 점수를 받을 수 없음.