<2012년 가을학기 수학 및 연습 2 중간고사 모범답안>

#1.

(a) $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(tv)}{t}$ ┘ +2점.

v=(a,b)로 표기.

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 ab\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{t^2a^2+t^2b^2}}}{t} = \lim_{t\to 0}\left(tab\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{t^2a^2+t^2b^2}}\right) = 0.$ ┘ +3점.

$\left(\because\ 0 \le \left|tab\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{t^2a^2+t^2b^2}}\right| \le |tab| \to 0 \text{ as } t\to 0\right)$

(b) (a)에 의하여 $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$ 이다.

$\lim_{v\to 0} \dfrac{|f((0,0)+v) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0)\cdot v|}{|v|} = \lim_{v\to 0}\dfrac{|f(v)|}{|v|}$ ┘ +5점.

v=(a,b)로 표기

$= \lim_{v\to 0} \dfrac{\left|ab\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots (*)$

$0 \le \dfrac{\left|ab\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \underset{(\because \text{산술-기하})}{\le} \dfrac{a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \to 0 \text{ as } v\to 0.$

이므로, 샌드위치 정리에 의해. 위의 $(*)=0$ 이 된다. $\therefore$ f는 원점에서 미분가능 ┘ +5점.

※ 채점기준 : (b)에서 산술-기하를 사용한 논증 과정이 없으면 두번째 5점을 받을 수 없음.

1 (c)

$D_1 f(0,0) = 0$ by (a)

$$D_1 f(x,y) = y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

5점

$y=x$를 따라 $(x,y)\to(0,0)$으로 가면

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$$ 이므로

진동한다.

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y)$ 는 존재하지 않고, 불연속이다.

10점

- $D_1 f(x,y)$를 잘못 구하면 0점 (계산실수 불허)
- $y=tx$를 이용한 경우, $(t\neq 0)$에 대한 언급 없으면 -2점
- 극좌표 치환의 경우, θ의 조건에 대한 언급 없으면 -2점
- 계산 실수는 무조건 -5점

#2. $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3 - x\sin y \quad (-\pi < y < \pi)$

sol) $D_1 f(x,y) = x^2 - \sin y$

$D_2 f(x,y) = -x\cos y$

$D_1 f(x,y) = D_2 f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ or $(x,y) = (1, \frac{\pi}{2})$ or $(x,y) = (-1, \frac{\pi}{2})$

각 점당 3점

다 맞으면 10 pt.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -\cos y \\ -\cos y & x\sin y \end{pmatrix}$$

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det f''(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ 안장점

$f''(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det f''(1, \frac{\pi}{2}) > 0$, $f''(1, \frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow (1, \frac{\pi}{2})$ 극소점

$f''(-1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det f''(-1, \frac{\pi}{2}) > 0$, $f''(-1, \frac{\pi}{2}) < 0 \Rightarrow (-1, \frac{\pi}{2})$ 극대점

각 3점

※ $D_1 f$, $D_2 f$ 를 틀리게 구한 경우는 0점

사소한 계산 실수 -2.

다 맞으면 총 20pt

#3. $g(x, y, z) = x^2y - z^3 + 2$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow$ $g(x, y, z)$의 0-등위면에서 $f(x, y, z)$의 최소값 구하라.

라그랑즈 승수법에 의해 극점 $p(x, y, z)$에서

$\text{grad}\, g(p) = \lambda\, \text{grad}\, f(p)$ 인 $\lambda (\neq 0)$ 가 존재

$(p \neq (0, 0, 0), \because g(0, 0, 0) = 2 \neq 0.)$

$\therefore (2xy, x^2, -3z^2) = \lambda(2x, 2y, 2z)$ 5

① $x = 0$ 인 경우.

$x^2 = 0 = 2\lambda y$. $\lambda \neq 0 \Rightarrow y = 0$.

$x^2y - z^3 + 2 = 0 \Rightarrow z^3 = 2$ $z = \sqrt[3]{2}$.

극점은 $(0, 0, \sqrt[3]{2})$ $\longrightarrow$ 극점을 구하면 5점.

② $x \neq 0$ 인 경우.

$2xy = 2\lambda x \Rightarrow y = \lambda$

$x^2 = 2\lambda y = 2\lambda^2$.

$x^2 \cdot y - z^3 + 2 = 2\lambda^3 + 2 - z^3 = 0$

$-3z^2 = 2\lambda z$.

② - i) $z \neq 0$

$-3z = 2\lambda$ $\therefore z = -\frac{2}{3}\lambda$, $z^3 = -\frac{8}{27}\lambda^3 = 2\lambda^3 + 2$

$\therefore -\frac{62}{27}\lambda^3 = 2$ $\lambda = \frac{-3}{\sqrt[3]{31}}$.

$\therefore p = (x, y, z) = (\pm\sqrt{2}\lambda, \lambda, -\frac{2}{3}\lambda) = \left(\frac{\mp 3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{31}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{31}}, \frac{2}{\sqrt[3]{31}}\right)$.

→ 극점을 구하면 5점

② - ii) $z = 0$

$2\lambda^3 + 2 = 0$ $\lambda = -1$

$\therefore p = (x, y, z) = (\pm\sqrt{2}\lambda, \lambda, 0) = (\pm\sqrt{2}, -1, 0)$

→ 극점을 구하면 5점.

$f(p) = \sqrt[3]{4}$ (①), $\sqrt[3]{31}$ (② - i), 3 (② - ii)

$\Rightarrow$ 거리 $= \sqrt{f(p)}$ 의 최소값은 $\sqrt[3]{2}$.

→ 각 경우의 극점에서 극값을 구해
최단 거리는 제대로 구하면 5점.

4. $f(x,y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$

$(1, \frac{\pi}{2})$ 에서 일차근사다항식은

$$T_1 f = f(1,\tfrac{\pi}{2}) + (x-1)D_1 f(1,\tfrac{\pi}{2}) + (y-\tfrac{\pi}{2})D_2 f(1,\tfrac{\pi}{2})$$ +5점.

$$D_1 f(x,y) = 2xy \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x^2 y} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xt)}{t}\right) dt$$ (라이프니츠법칙 연쇄법칙)

$$= 2 \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \cos(xt)\,dt$$

$$= \frac{2\sin(x^3 y)}{x} + \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y}$$

$$= \frac{2\sin(x^3 y)}{x} + \frac{\sin(x^3 y)}{x} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$= \frac{3 \cdot \sin(x^3 y)}{x} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}$$ +10점

$$D_2 f(x,y) = x^2 \cdot \frac{\sin(x^3 y)}{x^2 y} = \frac{\sin(x^3 y)}{y}$$ +5점

$f(1,\frac{\pi}{2}) = 0$

$D_1 f(1,\frac{\pi}{2}) = 2$

$D_2 f(1,\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$

$$\therefore T_1 f = 2(x-1) + \frac{2}{\pi}(y-\tfrac{\pi}{2}) = 2x + \frac{2}{\pi}y - 3$$ +5점

※ $T_1 f = f(1,\frac{\pi}{2}) + x D_1 f(1,\frac{\pi}{2}) + y D_2 f(1,\frac{\pi}{2})$ 로 풀이한 경우 -5.

#5 :

$$F'(1.2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1.2) & \frac{\partial f}{\partial y}(1.2) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1.2) & \frac{\partial g}{\partial y}(1.2) \end{pmatrix}$$ 를 구하자.

문제의 조건에서 $\frac{\partial f}{\partial x}(1.2) = 4$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1.2) = 6$ 이다. ⌋ 5점

$\frac{\partial g}{\partial x}$ & $\frac{\partial g}{\partial y}$를 계산하기 위해 $2x - y = u(x.y)$ $y^2 - 4x = v(x.y)$로 두자.

그러면 $g(x.y) = f(2x-y.\ y^2-4x) = f(u.v)$가 된다.

연쇄법칙에 의해

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x.y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u.v) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= D_1 f(u.v)\cdot 2 + D_2 f(u.v)(-4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x.y) = \frac{\partial f}{\partial y}(u.v) = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= D_1 f(u.v)(-1) + D_2 f(u.v)(2y)$$ 이다.

이때, $x=1.\ y=2$ 이므로 $u=0$, $v=0$ 이고, 이를 각각 대입하면

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1.2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0.0) = D_1 f(0.0)\cdot 2 + D_2 f(0.0)(-4) = 5\cdot 2 + 2\cdot(-4) = 2$$ ⌋ 5

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1.2) = \frac{\partial f}{\partial y}(0.0) = D_1 f(0.0)(-1) + D_2 f(0.0)\,4 = 5\cdot(-1) + 2\cdot 4 = 3$$ ⌋ 5

따라서 $$F'(1.2) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 이다.

⌋ 5.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(1.2)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1.2)$ 계산 (5점.)

2. $\frac{\partial g}{\partial x}(1.2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1.2)$ 계산 (각 5점.)

3. 야코비행렬의 정의에 맞게 $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (5점)

* 계산실수 인정 X.

* $\frac{\partial f}{\partial x}(1.2)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1.2)$ 중 하나만 틀려도 0점.

* 계산과정이 없거나, 풀이방식이 틀렸으나 우연히 맞은 경우 ($\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ 계산시) 인정 X.

#6. 풀이) 부피 팽창률은 $|\det G'|$ 이다. (+5)

연쇄법칙에 의해, $H(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$ 로 두면,

$|\det G'| = |\det(F\circ H)'| = |\det(F'(H))\cdot H'|$

$= |\det(F'(H))|\cdot|\det H'|$ (+5)

$F(x,y,z) = (x^3, x+z^2, x+y^3+z^5)$ 이므로

$$F' = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2z \\ 1 & 3y^2 & 5z^4 \end{pmatrix}, \quad \det H' = \rho^2\sin\varphi = \frac{1}{2} \text{ at } \left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$ (+5

$(\rho, \varphi, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 일 때, $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

이므로 $\det\left(F'\left(H\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = 3\times\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\times\left(0 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\times\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right)$

$= -\frac{9}{64}\sqrt{3}$

$\therefore \left|\det G'\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{9}{64}\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{128}$ (+5)

※ ① $\det G'$ 을 구한경우 (−5)

② 함수 G를 잘못이해하고 있는 경우 점수없음 (합성순서가 잘못된 경우, 구면좌표계 변환이 잘못된 경우 등)

③ $G(\rho, \varphi, \theta)$의 야코비 행렬을 연쇄법칙을 쓰지 않고 구했을 경우, 행렬이 맞으면 (+10), 행렬식의 값이 맞으면 (+10)

7. sol)

$$I_n = \int_{C_n} y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$$

$$= \int_{C_n} (y,\ 3y^3 - x,\ z) \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^1 (t^n,\ 3t^{3n} - t,\ t^{2n}) \cdot (1,\ nt^{n-1},\ 2nt^{2n-1})\,dt$$ ⌋ 5점

$$= \int_0^1 (t^n + 3n\,t^{4n-1} - nt^n + 2n\,t^{4n-1})\,dt$$

$$= \int_0^1 (5n\,t^{4n-1} - (n-1)\,t^n)\,dt$$

$$= \left[\frac{5n}{4n} t^{4n} - \frac{n-1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{5}{4} - \frac{n-1}{n+1}$$ ⊥ 10점

$$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4} - \frac{n-1}{n+1} \right) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$ ⊥ 15점

sol2)

$$\vec{F}(x,y,z) = (y,\ 3y^3 - x,\ z)$$

$$= (-y,\ 3y^3 - x,\ z) + (2y, 0, 0)$$ 에서

$\varphi(x,y,z) = -xy + 3y^4 + \frac{1}{2}z^2$ 으로 두면

$\mathrm{grad}\ \varphi(x,y,z) = (-y,\ 3y^3 - x,\ z)$ 이므로

$$I_n = \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) + \int_{C_n} (2y, 0, 0) \cdot d\vec{s}$$

$$= \left(-1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 (2t^n, 0, 0) \cdot (1,\ nt^{n-1},\ 2nt^{2n-1})\,dt$$

$$= \frac{1}{4} + \int_0^1 2t^n\,dt = \frac{1}{4} + \frac{2}{n+1}$$ ⊥ 10점

$$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{4}$$ ⊥ 15점

8-(a) $\mathbb{a}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) = (a_1, a_2, a_3)$.

$\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + e^x, \frac{x}{x^2+y^2}, 1\right) = (f_1, f_2, f_3)$

Sol) $\mathbb{a}$의 경우 : $\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x}$, $\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y}$, $\frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial z}$ 임을 보여야 한다

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

그러므로 닫힌 벡터장이다.

$\mathbb{F}$의 경우, 같은 방법으로 닫힌 벡터장 이다.

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

<채점기준>. $\mathbb{a}$, $\mathbb{F}$ 각각 5점 만점.

결론이 틀리면 계산과정이 맞아도 무조건 0점.

$\mathbb{a}$에 대하여, $\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y}$를 계산하여 보이면 +3점.

$\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x}$ (계산없어도) +1점.

$\frac{\partial a_3}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial z}$ (계산없어도) +1점.

기호가 부정확할 경우 -2점.

$\mathbb{F}$에 대해서도 마찬가지.

잠재함수의 존재성을 가정하면 답이 맞아도 0점.

8 (b) $\mathbb{G}$를 폐곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 를 따라 선적분하면,

$$\int_X \mathbb{G} \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = 2\pi \neq 0$$

$\therefore$ $\mathbb{G}$는 잠재함수가 존재하지 않는다.

($\because$ 잠재함수가 존재하면 순환도 $= 0$ 이어야 한다.) ⌋ 5점.

$$\int_X \mathbb{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t + e^{\cos t}, \cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t - \sin t \cdot e^{\cos t} + \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 - \sin t \cdot e^{\cos t}\, dt = \left[t + e^{\cos t} \right]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0$$

$\therefore$ $\mathbb{F}$도 잠재함수가 존재하지 않는다. ⌋ 5점.

($\mathbb{F} = \mathbb{G} + (e^x, 0, 1)$ 이고, $\mathbb{G}$는 잠재함수를 가지지 않고,

$(e^x, 0, 1)$는 잠재함수 $\varphi(x, y, z) = e^x + z + c$ $(c: \text{constant})$ 를 가진다.

$\therefore$ $\mathbb{F}$도 잠재함수를 가지지 않는다.)

* 폐곡선을 정확히 명시하지 않았거나, 주어진 폐곡선에 대한 적분값이 틀린경우, 0점.

* 적분계산이 틀린경우, 0점.

* 특별한 오류값이 2차원에서 계산한경우, 0점.

8(c) $\int_X \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_X \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} + \int_X (e^x, 0, 1)\cdot d\mathbf{s}$

$\int_X \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi$ (∵ $\mathbf{a}$는 각원소 벡터장이므로) ⌟ 5점.

$$\int_X (e^x, 0, 1)\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (e^{3\cos t}, 0, 1)\cdot(-3\sin t, 2\cos t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 3\sin t \cdot e^{3\cos t})\,dt$$

$$= \left[t + e^{3\cos t}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

($\int_X (e^x, 0, 1)\cdot d\mathbf{s} = 2\pi$ 임을 잠재함수를 이용해서 구한 경우도 인정.) ⌟ 10점.

* 각원소 벡터장의 적분값을 구하지 않았을 때는 무조건 0점

* $\int_X \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi$ 를 선적분의 정의에 의해 구한 경우, 인정

* $\int_X (e^x, 0, 1)\cdot d\mathbf{s}$ 의 계산과정이 틀린 경우, 인정하지 않음.

(참고)

$X(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), \theta(t))$ $(a \le t \le b)$ 일 때,

$$\int_X \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(\frac{-r\sin\theta}{r^2}, \frac{r\cos\theta}{r^2}, 0\right)\cdot\left(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta, r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta, \theta'\right) dt$$

$$= \int_a^b \theta'\,dt = \theta(b) - \theta(a)$$

이므로, $\mathbf{a}$를 선적분한 값은 원점에 대한 각도 θ의 변화량이다.

8(c) 별해.

$X(t) = (3\cos t,\ 2\sin t,\ t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$

$$\int_X \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 1 \right) \cdot ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin t}{9\cos^2 t + 4\sin^2 t},\ \frac{3\cos t}{9\cos^2 t + 4\sin^2 t},\ 1 \right) \cdot (-3\sin t,\ 2\cos t,\ 1)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{6}{9\cos^2 t + 4\sin^2 t} + 1 \right) dt$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{\frac{2}{3}\sec^2 t}{1 + \left(\frac{2}{3}\tan t\right)^2}\, dt$$

$$= 2\pi + 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{3}\sec^2 t}{1 + \left(\frac{2}{3}\tan t\right)^2}\, dt$$

$\frac{2}{3}\tan t = x$ 라 치환,

$\Rightarrow \frac{2}{3}\sec^2 t\, dt = dx$

$$= 2\pi + 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 4\pi.$$

#9.

Sol 1) $\varphi(x,y,z) = e^x \log y - y\cos z$ 로 두자. 그러면

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = e^x \log y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{e^x}{y} - \cos z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = y\sin z$$

이므로 $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\varphi$ 이고, $\mathbf{F}$는 잠재함수 φ를 가진다. ① 따라서

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \varphi\left(X\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right) - \varphi\left(X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \varphi\left(-\log\tfrac{3\pi}{2}, e^{\frac{3\pi}{2}}, \tfrac{3\pi}{4}\right) - \varphi\left(\log\tfrac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}, \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left\{e^{-\log\frac{3\pi}{2}}\log\left(e^{\frac{3\pi}{2}}\right) - e^{\frac{3\pi}{2}}\cos\tfrac{3\pi}{4}\right\}$$

$$- \left\{e^{\log\frac{\pi}{2}}\log\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) - e^{\frac{\pi}{2}}\cos\tfrac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right) \quad ② \quad ////$$

별해) $$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathbf{F}\left(\sin t\log t, e^t, \tfrac{t}{2}\right)\cdot\left(\cos t\log t + \frac{\sin t}{t}, e^t, \tfrac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ t e^{\sin t\log t}\left(\cos t\log t + \frac{\sin t}{t}\right) + e^{\sin t\log t} - \cos\tfrac{t}{2}e^t + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{t}{2}e^t \right\} dt$$

$$= \left[t e^{\sin t\log t} - e^t\cos\tfrac{t}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right) \quad ③$$

① … 잠재함수를 찾으면 +10점

② … 나머지 계산 및 답이 맞으면 +10점, 단 최종답안에서 사소한 부호 실수는 −5점.

③ … 모든 과정이 맞으면 +20점, 단 최종답안에서 사소한 부호 실수는 −5점.