

# 수학 및 연습 2 중간고사

2005년 10월 22일 13시 - 15시

학번: \_\_\_\_\_ 이름: \_\_\_\_\_

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (30점) 함수  $f(x, y)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a)  $(0, 0)$ 에서  $f(x, y)$ 는 연속인가?
  - (b)  $D_1f(0, 0)$ 와  $D_2f(0, 0)$ 이 존재하면 그 값을 구하여라.
  - (c)  $(0, 0)$ 에서  $f(x, y)$ 는 미분가능한가?
2. (20점) 곡면  $z = 8 - 3xy + 2y^2$  위의 점  $P$ 에서의 접평면이 직선  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = z-1$ 과 수직이 될 때  $P$ 를 구하고, 이 때 접평면의 방정식을 구하여라.
3. (30점)
- (a)  $(0.98)^{1.01}$ 의 2차 근사값을 구하여라.
  - (b) 원점에서 함수  $f(x, y) = e^x \sin(x^2 + y^2)$ 의 3차 근사 다항식을 구하여라.
4. (20점) 함수  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 15$ 의 극대점, 극소점, 안장점이 있으면 모두 구하여라.
5. (20점) 원점에서 곡면  $z^3 = x^2y + 2$ 까지의 최단거리를 구하여라.
6. (30점) 사상  $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$ 와 점  $P_0 = (\pi, 1)$ 이 주어져 있다.  $P_{k+1} = F(P_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )이라 하자.
- (a) 야코비 행렬  $F'(P_k)$ 를 구하여라.
  - (b)  $F^k = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ 개}}$ 라 하자. 이 때  $F^k$ 의  $P_0$ 에서의 야코비 행렬  $(F^k)'(P_0)$ 를 구하여라.
7. (30점) 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz + yz, xy + \frac{1}{2}y^2 - \sin z)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
- (a) 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z)$ 의 잠재함수를 구하여라.
  - (b) 곡선  $\mathbf{X}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 선적분  $\int_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하여라.
8. (20점) 어떤 사람이 아래 그림에 나타나 있는 산길을 자전거를 타고 올라간다. 그 사람의 수직 이동 속도가 일정하다. 자전거에 가하는 힘은 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z)$ 로 주어진다고 가정하자. 이 사람이 한바퀴를 돌아 산 정상에 다다랐을 때 한 일의 양은 얼마인가? (모델의 현실성은 고려하지 않기로 하자. 힌트: 곡선의 식을 먼저 구하여라.)

