수학 및 연습 2 (009-030) 중간고사

2003년 10월 18일 오후 1시 – 3시

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (30점) 곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) 곡선을 호의 길이로 재매개화하여라.

(b) 곡선의 중심을 구하여라.

(c) 곡선위의 점 $(-1, 0, 2\pi)$에서의 곡률을 구하여라.

2. (30점) 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) 원점에서 $f(x,y)$의 연속성을 조사하여라.

(b) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$를 구하여라.

(c) 원점에서 $f(x,y)$의 미분가능성을 조사하여라.

3. (20점) f는 일변수 미분가능함수로서 0을 함수값으로 갖지 않는 함수이고, $g(x,y)$는 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \ne 0\}$ 상에서 다음과 같이 정의되었다.

$$g(x,y) = xyf(\frac{x+y}{xy}).$$

이때 다음 관계식을 만족하는 D상의 함수 $G(x,y)$를 구하여라.

$$x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} = G(x,y)g(x,y).$$

4. (20점) 두 곡면 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$과 $z = x + 2y$의 교선 위의 한 점 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$에서 교선에 대한 접선의 방정식을 구하여라.

5. (20점) 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$가 아래와 같이 주어졌을 때, 점 $(1,1)$에서의 기울기벡터(gradient vector)를 구하여라.

$$f(x,y) = \int_{2xy}^{x^2+y^2} e^{t^2}\,dt.$$

6. (20점) 함수 $f(x,y) = \arctan(\frac{x-y}{1+xy})$의 원점에서의 2차 근사다항식을 구하여라.

7. (20점) 곡면 $e^x \log y + \cos(xz) + z^2 = 3$ 위의 점 $P(0, e, 1)$에서 접평면의 방정식을 구하여라.

8. (20점) 두직선 $x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z$와 $x = y - 2 = z$ 사이의 최단거리를 구하여라.

9. (20점) 원점에서 곡면 $z^2 = 3xy + 4$ 까지의 최단거리를 구하여라.