2015년도 2학기 수학 및 연습 II 중간고사 모범답안.

1. $$f(x,y) = \frac{xy}{xy-y+2x}$$

- $$D_1 f(x,y) = \frac{y\cdot(xy-y+2x) - xy\cdot(y+2)}{(xy-y+2x)^2}$$

$$= \frac{-y^2}{(xy-y+2x)^2}$$ 5점

- $$D_2 f(x,y) = \frac{x(xy-y+2x) - xy\cdot(x-1)}{(xy-y+2x)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{(xy-y+2x)^2}$$ 5점.

$$x^2 D_1 f(x,y) + y^2 D_2 f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(xy-y+2x)^2}$$

$$= f(x,y)^2 \quad \square$$ 5점.

* ($f(x,y)$의 분모, 분자를 xy로 나누어
$\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}$ 의 형태를 미분한 경우, 정의역이 바뀌므로 -5점.

2(a)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \quad (\text{각 5점})$$

* 풀이 과정이 틀렸거나 답만 작성한 경우 0점

2(b)

「 $\lim_{v\to 0} \frac{|f(v)-f(0)-a\cdot v|}{|v|} = 0$ 인 a가 존재하면 미분가능하다. 」 (3점)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x,y)-f(0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \lim_{(x,y)\to 0} \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \le \lim_{(x,y)\to 0} \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to 0} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0. \quad \left(\because \text{산술기하}: |xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ |x^2-y^2| \le |x^2+y^2|\right)$$

따라서 미분가능하다. 」 (10점)

* 부등식이 틀렸거나 풀이 과정에 오류가 있을 경우 (3점)만 인정

2(c)

$(x,y)\neq(0,0)$ 인 경우 분모가 0이 아닌 유리함수이므로

이급함수이며, 따라서 $D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y)$ 이다. (3점)

$(x,y)=(0,0)$ 인 경우,

$$D_1D_2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{x^3y - xy^3}{y(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$D_2D_1 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \lim_{x\to 0} \frac{x^3y - xy^3}{x(x^2+y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1. \quad (7\text{점})$$

따라서 $D_1D_2 f(0,0) \neq D_2D_1 f(0,0)$. * 한쪽만 맞은 경우 3점

$\therefore \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

* $(x,y)\neq(0,0)$ 임을 명시하지 않고 계산하거나 이급함수임을 적지 않으면 점수 없음

#3. (a) grad$f$ 방향이 가장 빨리 증가하는 방향이다.

grad$f$ = $(ze^x \sin y,\ ze^x \cos y,\ e^x \sin y)$ 이므로, 5

grad$f(P) = (1, 0, 1)$ 이고 이 방향의 단위벡터 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$가 원하는 벡터이다. 10

(b) 구하고자 하는 접평면의 법선벡터는 grad$f(P)$이다.

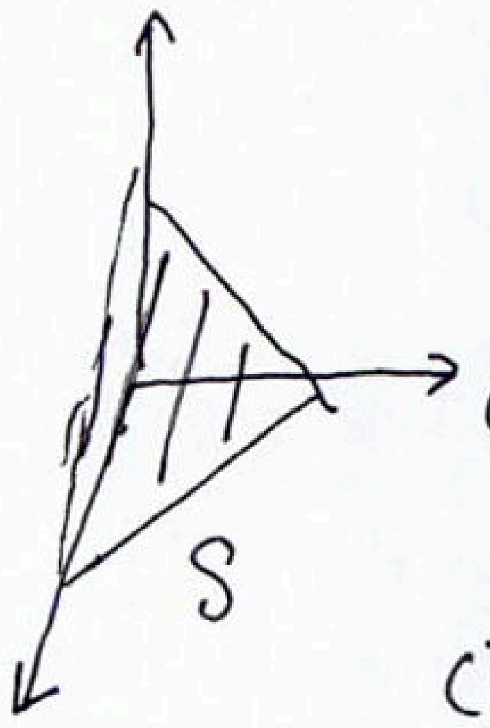
따라서 접평면의 방정식은 grad$f(P) \cdot (X-P) = 0$. 5 − (*).

$P = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$을 대입하여 정리하면 $x + z = 1$ 이다. 10.

:

(*) 식의 내용을 쓰지 않은 상태에서 답만 쓴 경우, 답이 틀리면 0점..
grad $f(P) \cdot (X-P) = 1$ 혹은 $(1,0,1) \cdot (x-1,\ y,\ z-1) = 0$ 등의
잘못된 식을 사용한 경우 0점.

#4.



S는 유계 닫힌 집합이므로 연속함수 f는 최대값을 가진다. ┘5

(i) S의 경계에서 (x, y, z 중 하나라도 0인 경우) $f(x,y,z)=0$ ┘5

(ii) $g(x,y,z) = x+y+z$ 로 두자.

이제 f가 S의 내부 $\{(x,y,z) \mid x+y+z=\pi,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

에서 극값 $f(P)$를 가지면, 라그랑즈 승수법에 의해

$$\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P) = \lambda(1,1,1)$$

인 λ가 존재한다. 따라서

$$\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = 2\lambda$$

에서 $xyz \neq 0$ 이므로

$$x=y=z=\frac{\pi}{3}, \quad f(x,y,z)=\frac{1}{8}$$ ┘5

(iii) 최대값은 내부의 극값과 경계값중 가장 큰 값이므로

답은 $\frac{1}{8}$ ┘5

* 라그랑즈를 먼저 쓰는경우 극점 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ — 3점.

$$\left.\begin{array}{l}(\pi,0,0)\\(0,\pi,0)\\(0,0,\pi)\end{array}\right\} - 2점.$$

경계값이 0 임을 보임 - 5점.

* 극점을 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 만 구했어도 경계값이 0 임을 보였으면 - 10점.

* 최대값이 $\frac{1}{8}$ 임을 보였을 경우 — 5점

#5.

먼저, 주어진 영역이 유계, 닫힌 집합이고 f가 연속함수이므로

최대·최소 정리에 의해서 최댓값, 최솟값이 존재한다.

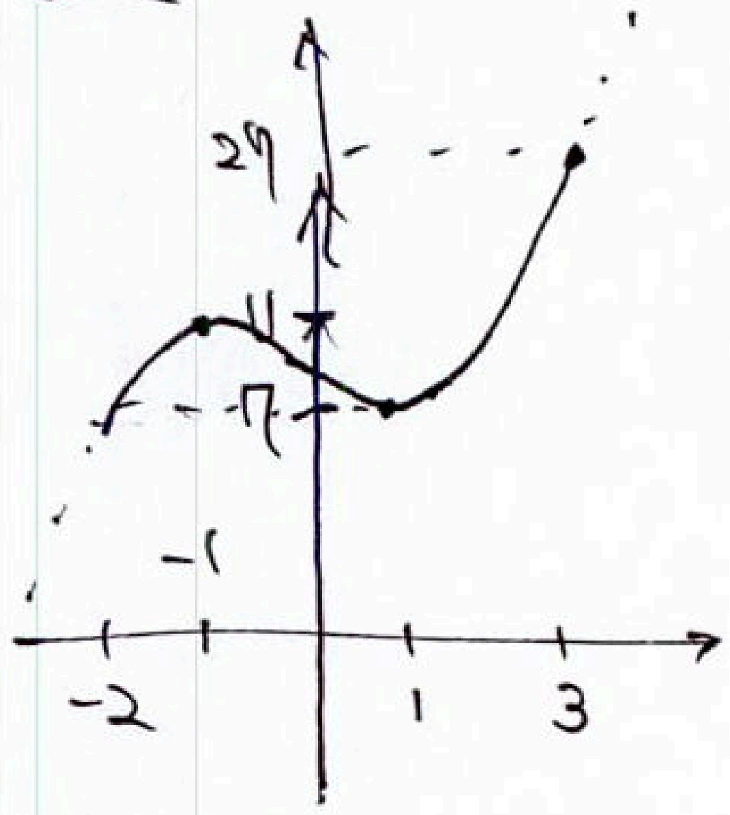
i) 내부에서 최대/최소를 갖는 경우.

임계점만 확인하면 충분하다.

$\text{grad} f(x,y) = (3x^2-3, -3y^2+12) = (0,0)$ 인 점은

$(x,y) = (\pm1, \pm2)$ 이고 영역의 내부에 있는 점은 $(-1,2), (1,2)$ 뿐.

이 때 $f(-1,2) = 18$, $f(1,2) = 14$.



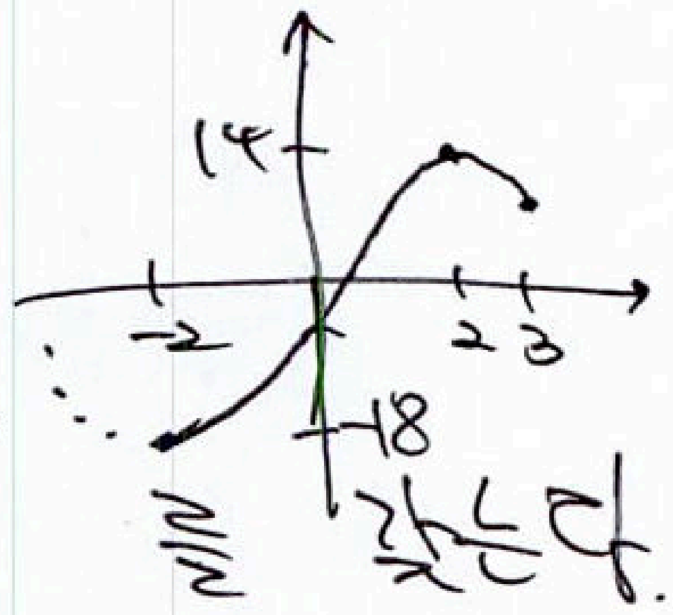
ii) 경계에서 최대/최소를 갖는 경우

① $y=3$, $-2 \le x \le 3$.

$f(x,3) = x^3 - 3x + 9$ 인데 $-2 \le x \le 3$ 일 때

그래프가 다음과 같고 최댓값 : 27 최솟값 : 7 를 갖는다.

② $x=-2$, $-2 \le y \le 3$



$f(-2,y) = -y^3 + 12y - 2$ 인데 $-2 \le y \le 3$ 일 때

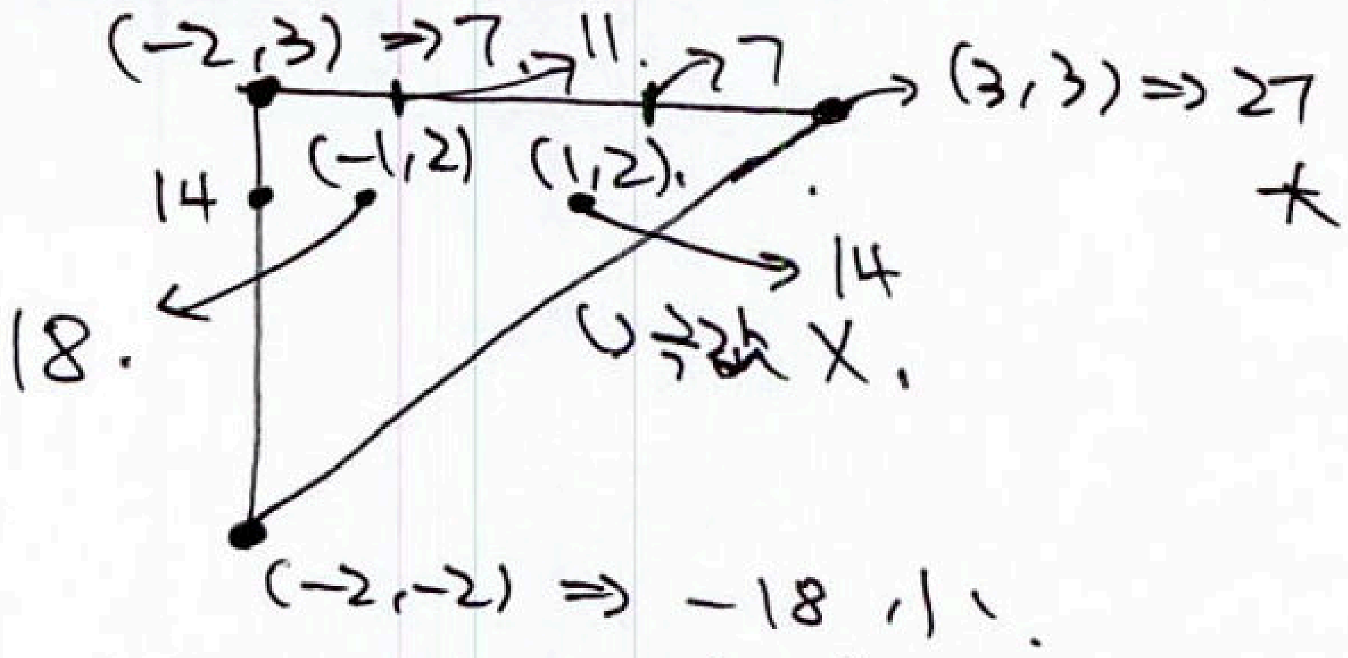
그래프가 다음과 같고 최댓값 : 14 최솟값 : -18 를 갖는다.

③ $-x+y=0$, $-2 \le x \le 3$.

$f(x,x) = 9x$ 이고 $-18 \le f(x,x) \le 27$.

i), ii)를 종합하면 최솟값은 -18, 최댓값은 27이다.

5번



i) 최대·최소 존재에 관한 설명. (2점).

(최대·최소 정리 언급 또는 유계인 닫힌 집합 언급).

↳ 0점 또는 2점. (연속 함수라는 언급 없어도 OK.)

ii). 위 삼각형의 내부에서의 극값을 구하기. (6점)

임계점 4개 모두 구한 뒤, ((−1,2), (1,2), (−1,2), (−1,−2))

⇒ (−1, 2) 와 (1, 2) 가 주어진 영역 안의 점들이라는 것을 명시.

(그렇지 않으면 0점)

그리고 $f((-1,2))$ 와 $f((1,2))$ 값 모두 구해야 함. (각각 3점씩).

(하지만, $f((1,2))$ 가 안장점이라는 사실을 유도했다면, $f(1,2)$ 값 안 구해도 맞다고 인정).

((12점)).

iii). 3경우로 나누어 경계에서의 최대, 최소 구하기. ($x=y$, $x=-2$, $y=3$ 각각 4점).

⇒ 각 경계에서 극값 뿐만 아닌, 선분의 끝점 구해서 최대, 최소 구해야 함! (최대, 최소 각각 2점씩).

↳ 그렇지 않을 경우, 해당 경계 구하는 점수 무조건 0점.

→ 풀이 방법 : 1). 라그랑주로 구할 때, 극값 구하고, 꼭지점 값 구해야 함.

2). (t,t), $(t, 3)$, $(-2, t)$ 써서 구할 때, 1)과 같이 극값 뿐만 아닌 최대 & 최소 구해야 함.

2015. 10. 17 수일연2 중간고사.

#6 모범답안.

(Sol 1) $e^{xy} = 1 + xy + o(xy)$, $\sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + o(y^4)$ 이므로 +5

$f(x,y) = e^{xy}\sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + xy^2 + o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$ +5

$\Rightarrow$ 테일러 전개의 유일성에 의해 $T_3 f(x,y) = y - \frac{1}{3!}y^3 + xy^2$ +5

* '테일러 전개의 유일성' 언급 X or $o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$을 다른식으로 쓴 경우 5점 감점
* 답을 정리하는 과정에서 계산이 틀린경우 5점 감점.
* $o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$ 부분을 '나머지항이 4차 이상이므로'와 같이 표기해도 인정.
* $T_3 f(x,y)$를 $f(x,y)$와 같이 잘못 표기한 경우 5점 감점.

(Sol 2) $T_3 f(x,y) = f(0,0) + D_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{2!} D^2_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{3!} D^3_{(x,y)} f(0,0)$

혹은

$= f(0,0) + (x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0)) + \frac{1}{2!}(x^2 D_1^2 f(0,0) + 2xy D_1 D_2 f(0,0) + y^2 D_2^2 f(0,0))$

$+ \frac{1}{3!}(x^3 D_1^3 f(0,0) + 3x^2 y D_1^2 D_2 f(0,0) + 3xy^2 D_1 D_2^2 f(0,0) + y^3 D_2^3 f(0,0))$

을 쓴 경우 +5.

$T_3 f(x,y) = y + xy^2 - \frac{1}{6}y^3$ 까지 잘 구한 경우 +10

* $T_3 f(x,y)$를 $f(x,y)$와 같이 잘못 표기한 경우 5점 감점.

7. $f(x,y) = \int_0^1 (\sqrt{t} - x - yt)^2\,dt$.

라이프니츠 정리에 의해,

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \int_0^1 2(x+yt-\sqrt{t})\,dt = 2x+y-\frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \int_0^1 2t(x+yt-\sqrt{t})\,dt = x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{5}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x+y-\frac{4}{3},\ x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{5}\right) \qquad (+5\text{ 점})$$

임계점은 $\nabla f = 0$ 인 점이므로,

$$\begin{cases} 2x+y = \frac{4}{3} \\ x+\frac{2}{3}y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

를 풀면 $(x,y) = \left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 하나가 나온다. (+5점)

이제 $\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 에서 f의 헤세 행렬을 계산하면

$$f''\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ 이다. (+5 점)

$\det(f''(p)) = \frac{1}{3} > 0$ 이고 $(f''(p))_{(1,1)} = 2 > 0$ 이므로, 헤세 판정법에 의해

$\left(\frac{4}{15}, \frac{4}{5}\right)$ 는 극솟점이다. (+5점)

◎ ∇f, f'', 그리고 임계점 각각에 대해, 방법에 문제가 없고 답이 올바르면 각 5점.

◎ 임계점 혹은 f'' 이 틀렸다면 극대/극소/안장 판정에 대해 부분점수 없음

8번 모범 답안

$$F' = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F' = e^{2x} \qquad \det G' = 3$$

$$\det(G'\circ F') = \det G' \cdot \det F' = 3e^{2x}.$$

자코비안 행렬식 계산 : 5점

$\lim_{r\to 0} \frac{Area((G\circ F)(D(r)))}{\pi r^2}$ 은 넓이의 순간 변화율이고, (1,0) 에서의 $G\circ F$ 의 자코비안 행렬식의 절대값과 같다.

자코비안 행렬식과 넓이 변화율의 관계 서술 10점
(π를 뺀 경우 -5점)

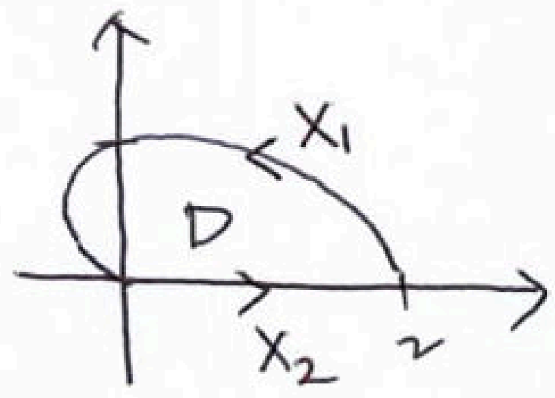
그러므로
$$\lim_{r\to 0} \frac{Area((G\circ F)(D(r)))}{r^2} = \lim_{r\to 0} \pi \cdot \frac{Area((G\circ F)(D(r)))}{\pi r^2}$$

$$= \pi \cdot 3e^{2x}\Big|_{x=1}$$

$$= 3\pi e^2$$

$x=1$ 대입한 후
정답 도출 : 5점

9번 주어진영역 D는



풀이1

$$\int_{\partial D} F\cdot d\vec{s} = \int_{X_1} F\cdot d\vec{s} + \int_{X_2} F\cdot d\vec{s}$$

- X_1의 매개화 $X_1(\theta) = (1+\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ $0\le\theta\le\pi$ 5점

$$\int_{X_1} F\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} \left((1+\cos\theta)^2, (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\right)\cdot\left(-\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta, \cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\left(-(1+\cos\theta)(1+2\cos\theta) + \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} -2(1+\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta$$

$t = 1+\cos\theta$

$dt = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \int_2^0 2t^2\, dt$$

$$= -\frac{16}{3}$$

10점

- X_2의 매개화 $X_2(t) = (t, 0)$ $0\le t\le 2$

$$\int_{X_2} F\cdot d\vec{s} = \int_0^2 (t^2, 0)\cdot(1, 0)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

5점

$$\therefore \int_{\partial D} F\cdot d\vec{s} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

이 이외 부분점수 없음

9번 풀이2 잠재함수 이용한 풀이

$F_1(x,y)=(x^2,y)$, $F_2(x,y)=(y^2,0)$ 이라고 하면, F_1은 잠재함수 $\varphi(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2$을

갖고, ∂D가 폐곡선이므로 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_{\partial D} F_1\cdot d\vec{s}=0$$

5점

이제, $\partial D = X_1 \cup X_2$ 이고

$X_1(\theta)=(1+\cos\theta)(\cos\theta,\sin\theta) \quad 0\le\theta\le\pi$

5점

$$\int_{X_1} F_2\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi}\left(\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2,\ 0\right)\cdot\left(-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta,\ \cdot\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}-\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\,d\theta$$

$\cos\theta=t$

$\downarrow$ $-\sin\theta\,d\theta=dt$

$$=\int_1^{-1}(1-t^2)(1+t)^2(1+2t)\,dt$$

$$=-\frac{8}{3}$$

5점

$X_2(t)=(t,0) \quad 0\le t\le 2$

$$\int_{X_2}F_2\cdot d\vec{s}=\int_0^2(0,0)\cdot(1,0)\,dt=0$$

5점

$$\therefore \int_{\partial D}F\cdot d\vec{s}=\int_{\partial D}F_1\cdot d\vec{s}+\int_{\partial D}F_2\cdot d\vec{s} = 0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$$

잠재함수를 갖게 F를 다르게 쪼개도 됨.

이 이외 부분점수 없음

$\boxed{10}$

(a) ($\Rightarrow$) F가 일급이므로 잠재함수를 가지려면 닫힌벡터장이어야 한다.

따라서 $\begin{cases} D_1F_2 = D_2F_1 \\ D_1F_3 = D_3F_1 \\ D_2F_3 = D_3F_2 \end{cases}$ 로부터 $\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{cases}$ 이므로

A는 대칭행렬이어야 한다.

($\Leftarrow$) A가 대칭행렬이므로 $\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{cases}$ 로부터 $\begin{cases} D_1F_2 = D_2F_1 \\ D_1F_3 = D_3F_1 \\ D_2F_3 = D_3F_2 \end{cases}$ 이므로

F는 일급닫힌벡터장이다. 한 편, $\mathbb{R}^3$은 열린 볼록집합이므로

푸앵카레 도움정리에 의해 F는 잠재함수를 가진다. ┘ +6점.

$\mathrm{grad}\,\varphi(x) = F(x)$ 라 하면,

$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x\ \ y\ \ z)\cdot A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C$ 또는 $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + \frac{1}{2}a_{22}y^2 + \frac{1}{2}a_{33}z^2$
$+ a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx$ ┘ +4점.

(b) 양수 a를 하나 고정하고 $\varphi(x) = \int_a^{|x|} sf(s)ds$ 로 정의하자.

그러면 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = |x|f(|x|)\cdot\frac{x_i}{|x|} = f(|x|)\cdot x_i$ ($|x| \neq 0$일 때), $i = 1, \cdots, n$

따라서 φ가 F의 잠재함수이다.

┘ +10점.

- (a)에서 필요충분조건을 다 보이지 않은 경우 부분점수 없음.
- (b)에서 $\mathbb{R}^3$나 $\mathbb{R}^2$에 대해서만 증명한 경우 5점 감점.