

수학 및 연습 2 중간고사
(2008년 10월 18일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (25점). 방정식

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$$

로 주어지는 타원면 위의 점 (a, b, c) 에서 타원면에 접하는 접평면이 원점 $(0, 0, 0)$ 을 포함하도록 하는 점 (a, b, c) 들은 한 평면 위에 있음을 보여라.

문제 2 (25점). 이급 함수 f 가

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y) \quad \forall t, x, y \in \mathbb{R}$$

를 만족하면

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left[x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right]$$

임을 보여라. 또한 위 등식을 만족하는 0 아닌 함수 f 의 예를 들어라.

문제 3 (25점). 주어진 영역이 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 일 때 $xy + yz + zx$ 의 최댓값과 최솟값을 구하라.

문제 4 (각 15점). 다음 함수

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

에 대하여 다음 물음에 답하라.

- (a) 이 함수의 임계점을 모두 구하고, 각각의 임계점이 극대점인지 극소점인지 안장점인지 판정하라.
- (b) 원점에서 이 함수의 삼차 테일러 다항식을 구하여라.

문제 5 (25점). 함수 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 선형사상이고, 그 야코비 행렬식이 $\det F'(0, 0) = 2$ 를 만족한다고 한다. 함수 $G(x, y) = (x^2, x^2 - y^2)$ 에 대하여 야코비 행렬식 $\det(F \circ G)'(1, 1)$ 의 값을 구하라.

문제 6 (25점). 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xe^{x^2+y^3} + z \cos y, 3y^2e^{x^2+y^3} - xz \sin y, x \cos y)$$

를 매개곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 를 따라 적분한 값 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하라.

문제 7 (각 15점). 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

- (a) 영역 $\{(x, y) : x > 0\}$ 에서 \mathbf{F} 의 잠재함수가 존재하면 잠재함수를 구하고, 존재하지 않으면 그 이유를 쓰라.
- (b) 영역 $\{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$ 에서 \mathbf{F} 의 잠재함수가 존재하면 잠재함수를 구하고, 존재하지 않으면 그 이유를 쓰라.
- (c) 곡선 $X(t) = (\cos t, e^t \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$ 에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하라.