수학 및 연습 2 중간고사

(2009년 10월 17일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (30점). 아래와 같이 주어진 함수 f 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+|y|^3} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (10점) 원점에서 f 의 연속성을 판정하시오.

(b) (10점) $\mathbf{v} = (1,1)$ 일 때 $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ 를 구하시오.

(c) (10점) 원점에서 f 의 미분가능성을 판정하시오.

문제 2 (20점). 공간에서 구면 $S : x^2+y^2+z^2 = 14$ 을 포함하는 열린 집합에 정의된 미분가능한 함수 f 를 S 에 제한시켰을 때, $P = (1,2,-3)$ 에서 최대값을 가진다고 하자. 이 때 점 P에서 그 점을 지나는 f의 등위면에 접하는 평면의 방정식을 구하시오. (단, $\mathrm{grad} f(P) \neq (0,0,0)$ 이다.)

문제 3 (20점). 이급함수 $z = f(x,y)$ 의 헤세 행렬이 어떤 점 P 에서 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 로 주어졌을 때, 그 점에서 f 의 이계 방향미분계수 $D_{\mathbf{v}}{}^2 f(P)$ 를 구하시오. 또한 $D_{\mathbf{v}}{}^2 f(P) > 0$ 가 되는 벡터 $\mathbf{v}$의 집합을 좌표평면 위에 도시하시오.

문제 4 (20점). 원점에서 함수 $f(x,y) = \log(2x+y+1)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 5 (25점). $x^2+y^2+z^2+2x = 1$ 이고 $x \geq -1$ 일 때 $x+y+z$ 의 최대값과 최소값이 존재함을 설명하고, 그 값을 각각 구하시오.

문제 6 (25점). 평면에서 직교좌표를 사용했을 때 라플라스 방정식은

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

으로 주어진다. 이를 극좌표를 이용하여 나타내면

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

이 됨을 보이시오.

문제 7 (20점). 곡선 $X(t) = (\cos(2t), \sin(2t))\,(0 \leq t \leq 2\pi)$ 를 따르는 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ 의 선적분 $\displaystyle\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 8 (20점). 다음 벡터장에 대하여 물음에 답하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^2\cos x, z^2\sin x + z\sinh(1+yz), 2yz\sin x + y\sinh(1+yz))$$

(a) (10점) $\mathbf{F}$ 의 잠재함수가 존재하면 모두 구하시오.

(b) (10점) 곡선 $X(t) = (t, -\cos(2t), 1-2\sin t)\,(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

문제 9 (20점). 곡선 $X(t) = (\rho(t), \phi(t), \theta(t)) := (1, t, t),\ 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ 와 함수 $x(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\cos\theta$ 에 대하여 $\int_X dx$ 의 값을 구하시오.