# 수학 및 연습 2 중간고사

(2010년 10월 16일 오후 1:00-3:00)

| 학번: | 이름: |
|---|---|

**모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)**

**문제 1** (25점)**.** 아래와 같이 주어진 함수 $f$ 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) (15점) 원점에서 편도함수 $D_1f(x,y)$ , $D_2f(x,y)$ 의 연속성을 조사하시오.

(b) (10점) 원점에서 함수 $f$ 의 미분가능성을 조사하시오.

**문제 2** (20점)**.** 원점에서 $\mathbf{v}=(2,2,-1)$ 방향으로 발사된 빛과 곡면 $2xy+yz+zx=1$ 이 주어져 있다.

(a) (10점) 발사된 빛이 곡면과 닿는 점에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

(b) (10점) 이때 빛이 접평면에서 반사되어 나가는 직선의 방정식을 구하시오.

**문제 3** (20점)**.** 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 원점에서 $f(x,y)=\log(x+e^y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) (10점) (a) 의 결과를 이용하여, $\log(0.01+e^{0.01})$ 의 일차근삿값을 구하고, 오차가 $2\times10^{-4}$ 이하임을 보이시오.

**문제 4** (20점)**.** 다음 함수 $f$ 의 모든 임계점을 찾고 극대점, 극소점, 안장점으로 구분하시오.

$$f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$$

**문제 5** (20점)**.** 타원 $x^2+xy+y^2=3$ 위의 점 $(x,y)$ 에 대하여 함수 $f(x,y)=2x+2y-xy$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

**문제 6** (20점)**.** 함수 $F(x,y)=\left(\int_1^2 \frac{1}{t}e^{-xt^2}dt+xy, \int_1^\pi \frac{\sin ty}{t}dt+y\right)$ 에 대하여 점 $(1,1)$ 에서의 야코비 행렬을 구하시오.

**문제 7** (20점)**.** 일급함수 $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 가 $G(0,0)=(0,1)$ , $G'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ 를 만족한다. 이때 함수 $F(x,y)=(x^2+y^2+x, xy+3y)$ 에 대하여, 원점 $(0,0)$ 에서 $F\circ G$ 의 야코비 행렬식을 구하시오.

**문제 8** (35점)**.** $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 에 포함된 열린 집합에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터장 $\mathbf{F}$ 가 닫힌 벡터장임을 보이시오.

(b) (15점) 열린 집합 $U=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 에서 벡터장 $\mathbf{F}$ 의 잠재함수가 존재하지 않음을 보이시오.

(c) (10점) 열린 집합 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0\}$ 에서 벡터장 $\mathbf{F}$ 의 잠재함수가 존재함을 보이시오.

**문제 9** (20점)**.** 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y)=(xe^{x^2+y^2}+3xy,\, ye^{x^2+y^2}+x^2)$$

를 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형을 따라 반시계 방향으로 선적분한 값을 구하시오.