5. (20점)

원점에서 S 위의 점 사이의 거리의 제곱 함수는

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(x^2+y^2) = 2(x^2+y^2)$ 이고,

$z^2 = x^2+y^2$ 과 $2z = x+4$ 에서

$(x+4)^2 = (2z)^2 = 4(x^2+y^2)$

$3x^2 - 8x + 4y^2 = 16$

이제 $f(x,y) = 2(x^2+y^2)$, $g(x,y) = 3x^2-8x+4y^2$ 이라 두면,

등위면 $g=16$ 에서 함수 f의 최대·최소를 구하면 된다.

Lagrange 승수법에 의해 $\text{grad} f(x,y) = \lambda \, \text{grad}\, g(x,y)$

$(4x, 4y) = \lambda(6x-8, 8y)$

$\therefore \; 2\lambda y = y, \quad \lambda(3x-4) = 2x$ — 10점

i) $y \neq 0$; $\lambda = \frac{1}{2}$, $x=-4$, $z=0$, $y=0$ 에서 모순이다.

ii) $y = 0$; $x^2 = z^2$, $2z = x+4$ 으로부터 $x = 4$ or $-\frac{4}{3}$

따라서 두 극점 $(4, 0, 4)$와 $(-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$를 얻는다.

원점에서 가장 가까운 점은 $(-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$ 이고, 가장 먼 점은 $(4, 0, 4)$ 이다. — 20점

채점기준 (1) 거리함수를 그냥 x^2+y^2 으로 하거나 제한함수를 단지 평면, 원뿔면으로 한 경우는 논리적으로 불합리하므로 무조건 0점 처리. 정사영한 것 혹은 두 식 $z^2 = x^2+y^2$, $2z = x+4$ 의 적당한 합·차로 제한한 경우가 "매우" 많지만, 대부분 부적절한 논리를 사용하였음.

(2) 라그랑주 승수법 사용하지 않은 풀이는 무조건 0점 처리

(3) 결과를 낼 때 사소한 계산 실수가 있으면 5점 감점

(별해) $\text{grad} f(x,y,z) = \lambda_1 \, \text{grad}\, g(x,y,z) + \lambda_2 \, \text{grad}\, h(x,y,z)$ 로 놓고 풀 수도 있음.

여기서 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $h(x,y,z) = x-2z+4$