1. (a)

i) $$D_1 f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow D_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ii) $$D_2 f(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow D_2 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

iii) $$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |D_1 f(x,y) - D_1 f(0,0)| &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right| \\ &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0. \end{aligned}$$

iv) $$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |D_2 f(x,y) - D_2 f(0,0)| &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right| \\ &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| = 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ iii), iv) 에 의해, 원점에서 $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$ 는 연속.

* 채점기준.

- i) 과 ii) 을 정확히 구한 경우 +7점. (단, $D_1 f(0,0)$ 등의 계산과정이 없거나, 계산실수 한 경우 0점.)
- iii) 을 구한 경우 +4점. (단, 부등식 과정이 정확하지 않은 경우 0점)
  iv 를 구한 경우 +4점. (또한, i), ii) 에서 함수를 잘못 구한 경우, 0점).

1. (b) 문제(a)에 의해, f가 일급함수 이므로 f는 미분가능. ... (*)

또는, 정의를 이용한 경우, ... (**)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{grad} f(0)\cdot(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy(x^2-y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

$$\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy(x^2+y^2)}{\sqrt{2xy}\,(x^2+y^2)} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} \right| = 0.$$

★ 채점기준.

- (*)를 이용하여 풀이한 경우, 1(a)의 풀이가 정확한 경우에만 +10점.
- (**)를 이용한 경우, 부등식이 명확하게 정리된 경우에만 +10점.

2. (1) 먼저 원점에서 발사된 빛이 곡면에 닿는 점 P를 구한다. 이 때 점 P는

$$P = (0, 0, 0) + t(2, 2, -1) = (2t, 2t, -t) \qquad (t > 0)$$

로 주어진다. 한편 P는 곡면 위의 점이므로,

$$1 = 2(2t)(2t) + (2t)(-t) + (-t)(2t) = 4t^2$$

이고 $t = \frac{1}{2}$ 이다. ($t > 0$ 이므로) 따라서 $P = (1, 1, -\frac{1}{2})$ 이다. 5

한편 점 P 에서 곡면에 수직인 벡터는 $f(x, y, z) = 2xy + yz + zx$ 일 때

$$\vec{N} = \text{grad} f(1, 1, -\tfrac{1}{2}) = (2y+z,\ 2x+z,\ y+x)\Big|_{(1,1,-\frac{1}{2})} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 2\right)$$

이므로 접평면의 방정식은

$$\frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) + 2\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$$ 이다. ■ 10

여기까지 제대로 구하면 10점.

※ 채점기준

1) P 점을 제대로 구하면 5점.

2) 접평면의 방정식까지 제대로 구하면 10점.

(2) 빛이 반사되어 나가는 방향은

$$\vec{v}^* = \vec{v} - 2\frac{\vec{v}\cdot\vec{N}}{\vec{N}\cdot\vec{N}}\vec{N} = (2, 2, -1) - 2\,\frac{3+3-2}{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+4}\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 2\right)$$ 3

$$= \left(\frac{10}{17}, \frac{10}{17}, \frac{-49}{17}\right)$$ 5

∴ 직선의 방정식은 $(1, 1, -\frac{1}{2})$ 을 지나고 $\vec{v}^*$ 방향의 직선이므로

$$\frac{x-1}{10} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+\frac{1}{2}}{-49}$$ 이다. ■ 10.

※ 채점기준

1) 직선의 방정식은 벡터방정식 $(1, 1, -\frac{1}{2}) + t(10, 10, -49)$ 라 해도 맞게 함.

2) $\vec{v}^*$의 식을 알고 있으면 3점, $\vec{v}^*$을 맞게 구하면 5점.

3) 직선의 방정식까지 맞게 구하면 10점.

3 (a) 원점에서 $f(x,y) = \log(x+e^y)$ 의 2차 근사 다항식을 구하시오.

(sol) 원점에서의 2차 근사 다항식은

$$T_2 f(x,y) = f(0,0) + D_1 f(0,0)\,x + D_2 f(0,0)\,y + \frac{1}{2!}\left(D_1^2 f(0,0)\,x^2 + 2 D_1 D_2 f(0,0)\,xy + D_2^2 f(0,0)\,y^2 \right) \quad (*)$$

5점

$$D_1 f(x,y) = \frac{1}{x+e^y} \qquad D_2 f(x,y) = \frac{e^y}{x+e^y}$$

$$D_1^2 f(x,y) = -\frac{1}{(x+e^y)^2} \qquad D_1 D_2 f(x,y) = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$$

$$D_2^2 f(x,y) = \frac{e^y(x+e^y) - e^{2y}}{(x+e^y)^2} = \frac{x \cdot e^y}{(x+e^y)^2}$$

따라서

$$T_2 f(x,y) = x + y + \frac{1}{2}(-x^2 - 2xy)$$

$$= x + y - \frac{1}{2}x^2 - xy$$

5점

- (*) 식의 언급 없이 계산 실수 한 경우

<u>부분 점수를 받을 수 없습니다</u>

3. (b)

(a) 에 의해, $T_1 f(0.01,\ 0.01) = 0.02$ ⌋ 2점

테일러 정리에 의해

$$|R_1 f| \le M_2 \frac{(|v_1|+|v_2|)^2}{2} = M_2 \frac{(0.01+0.01)^2}{2} = M_2 \times (2\times 10^{-4})$$ ⌋ 4점

여기서 $M_2 = \sup\{|D_i D_j f((0,0)+t(0.01,\ 0.01))| : 1 \le i,j \le 2,\ 0 \le t \le 1\}$.

$y \ge 0$ 이므로 $e^y \ge 1$ 가 되어

$$|D_1^2 f(x,y)| = \frac{1}{(x+e^y)^2} \le \frac{e^y}{(x+e^y)^2} = |D_1 D_2 f(x,y)|.$$

$0 \le x \le 0.01$ 이므로 $x \le 1$ 이 되어

$$|D_2^2 f(x,y)| = \frac{x \cdot e^y}{(x+e^y)^2} \le \frac{e^y}{(x+e^y)^2} = |D_1 D_2 f(x,y)|.$$

그런데

$$|D_1 D_2 f(x,y)| = \frac{e^y}{(x+e^y)^2} \underset{(\because x \ge 0)}{\le} \frac{e^y}{(e^y)^2} = \frac{1}{e^y} \underset{(y \ge 1)}{\le} 1$$

이므로

$|D_1^2 f(x,y)|,\ |D_1 D_2 f(x,y)|,\ |D_2^2 f(x,y)|$ 는 1보다 작다. 즉 $M_2 \le 1$.

이 되어 $(\text{오차}) \le M_2 \times (2\times 10^{-4}) \le 2\times 10^{-4}$ ⌋ 4점

* 단, 정확한 정당화 없이 $|D_i D_j f(x,y)| \le 1$ 를 언급한 경우, 4점을 받을 수 없음.

4. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$

$\text{grad } f(x,y) = (3y - 2xy - y^2,\ 3x - x^2 - 2xy)$ 4점

(x,y) 임계점 $\iff (3y - 2xy - y^2,\ 3x - x^2 - 2xy) = (0,0)$

$$\begin{cases} y(3 - 2x - y) = 0 \\ x(3 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

i) $x = 0 \Rightarrow y(3 - y) = 0 \quad y = 3 \text{ or } 0$

ii) $x \neq 0 \Rightarrow 3 - x - 2y = 0, \quad x = -2y + 3$

$y(3y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad x = 3$

$y = 1, \quad x = 1$

$\therefore$ 임계점 : $(0,0), (0,3)\ (3,0)\ (1,1)$ 4점

헤세행렬
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det f''(0,0) < 0$ 안장점

$$f''(0,3) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det f''(0,3) < 0$ 안장점

$$f''(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det f''(3,0) < 0$ 안장점

$$f''(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det f''(1,1) > 0$

$a_{11} < 0$ 극대점.

$(0,0), (0,3), (3,0)$: 안장점

$(1,1)$: 극대점

답이 맞는 것 1개당 3점 (총 12점)

5번. 모범답안

타원이 유계이고 닫힌집합, 주어진 함수 f가 연속이므로

최대 최솟값 정리에 의해, 최댓값과 최솟값이 존재한다.

먼저, f의 임계점을 구해보면,

$$\nabla f = (2-y,\ 2-x) = 0 \Rightarrow y=2,\ x=2$$

$(2,2)$는 타원위에 있지 않으므로 고려하지 않아도 된다.

$g(x,y) = x^2+xy+y^2$ 으로 두고,

f를 타원위에 한 정한 함수의 극점을 $P=(x,y)$라 두면, 라그랑즈 승수법에 의해,

$\nabla f = \lambda \nabla g$ 을 만족하는 $\lambda \in \mathbb{R}$가 존재한다.

$$(2-y,\ 2-x) = \lambda(2x+y,\ x+2y)$$

⌋ 5점

연립하면, $2-y = \lambda(2x+y) \quad \cdots(1)$

$2-x = \lambda(x+2y) \quad \cdots(2)$

$(1)-(2)$: $x-y = \lambda(x-y) \Rightarrow \lambda=1$ or $x=y$

i) $\lambda=1$ 일때, $x+y=1$. ⌋ 10점

$x+y=1$과 타원 $x^2+xy+y^2=3$을 연립하면, $(x,y)=(2,-1),(-1,2)$

ii) $x=y$ 일때,

$x=y$와 $x^2+xy+y^2=3$을 연립하면, $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$

⌋ 15점

각 점에서 $f(x,y)$의 값을 계산하면,

$f(2,-1) = 4 \qquad f(1,1)=3$

$f(-1,2) = 4 \qquad f(-1,-1)=-5$

∴ 최댓값은 4, 최솟값은 -5. ⌋ 20점

6. $F(x,y) = \left(\int_1^2 \frac{1}{t} e^{-xt^2} dt + xy ,\ \int_1^\pi \frac{\sin ty}{t} dt + y \right)$

$f_1 = \int_1^2 \frac{1}{t} e^{-xt^2} dt + xy$, $f_2 = \int_1^\pi \frac{\sin ty}{t} dt + y$ 라 하면

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^2 \frac{1}{t} e^{-xt^2} dt + xy\right)$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{t} e^{-xt^2}\right) dt + y \quad (\because \text{라이프니츠 정리})$$

$$= \int_1^2 -te^{-xt^2} dt + y$$

$$= \frac{1}{2x}\left(e^{-4x} - e^{-x}\right) + y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_1^2 \frac{1}{t} e^{-xt^2} dt + xy\right) = x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^\pi \frac{\sin ty}{t} dt + y\right) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_1^\pi \frac{\sin ty}{t} dt + y\right)$$

$$= \int_1^\pi \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin ty}{t}\right) dt + 1$$

$$= \int_1^\pi \cos ty \, dt + 1$$

$$= \frac{1}{y}\left(\sin \pi y - \sin y\right) + 1$$

$$\therefore F'(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-4} - e^{-1}) + 1 & 1 \\ 0 & 1 - \sin 1 \end{pmatrix}$$

채점기준 1) $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$ 각 4점

2) $F'(1,1)$ 을 정확히 구하기 4점

3) $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$ 에서 각각 y, 1 항 없으면 각각 −1점

4) 야코비 행렬의 정의를 이계미분계수로 잘못 알면 0점처리

7. 연쇄법칙에 의해

$(F\circ G)'(0,0) = F'(G(0,0))\cdot G'(0,0) = F'(0,1)\cdot G'(0,0)$ ⌟10점 …①

$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 2y \\ y & x+3 \end{pmatrix}$ 에서 $F'(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$을 얻는다. ⌟5점 …②

$\therefore \det\left((F\circ G)'(0,0)\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = -10$ 이다. ⌟5점 …③

〈채점 기준〉

① 에서 $(F\circ G)'(0,0) = G'(0,0)\cdot F'(0,1)$ 으로 쓴 경우 5점.

② 에서 $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+1 & y \\ 2y & x+3 \end{pmatrix}$ 으로 쓴 경우 점수 없음.

#8. (a)

$\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = (F_1, F_2)$ 가 닫힌 벡터장

$\underset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\therefore \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ 이므로 벡터장 $\mathbb{F}$ 는 닫힌 벡터장이다.

* 잠재함수의 존재성을 (가정하여 / 증명하여) 닫힌 벡터장을 보인 경우 0점.

* 닫힌 벡터장의 [정의를 정확히 모른다고 판단되는 경우 / 정의가 없는 경우] 0점.

* 닫힌 벡터장의 정의는 (맞았으나 / 정확히 알고 있다고 판단되나)

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ 의 계산이 (없는 경우 / 틀린 경우) 5점.

#8.(b) U에서 정의된

폐곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ 를 생각하자.

$$\oint_X \mathbb{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi. \quad +10$$ (* 계산과정 없으면 −5)

만약 $\mathbb{F}$가 잠재함수를 갖는다면, 임의의 폐곡선에 대해

선적분 값이 0 이어야 한다.

$\therefore$ $2\pi \neq 0$ 이므로 $\mathbb{F}$는 잠재함수를 $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 에서 갖지 않는다. +5

#8.(c) 모범답안 1) ① (a)에서 $\mathbb{F}$가 닫힌 벡터장임을 안다. +5

② $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ 은 열린 볼록집합 +5

$\Rightarrow$ 푸앵카레 정리에 의해,

$\mathbb{F}$는 V에서 잠재함수를 갖는다.

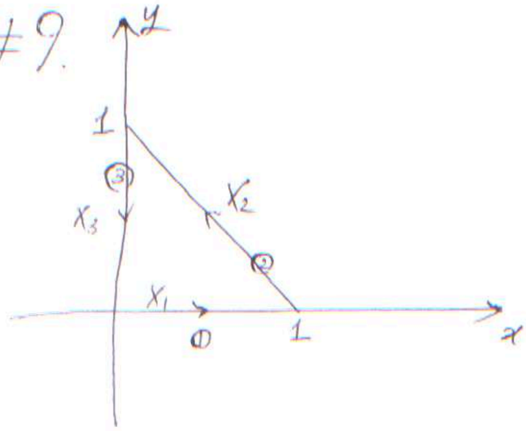
모범답안 2) $\varphi(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ 라고 하자.

그러면 φ는 V에서 잘정의된 함수이다. +5

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \mathbb{F}$$

이므로, $\mathbb{F}$는 V에서 잠재함수 φ를 갖는다. +5

#9.



(*. 출제자의 의도는 별해에 가깝지만, 대부분 학생들이 직접 계산을 시도함.)

삼각형을 다음과 같이 세 부분으로 나누어 매개화하자.

$$\begin{cases} X_1(t) = (t, 0) & 0 \le t \le 1 \\ X_2(t) = (1-t, t) & 0 \le t \le 1 \\ X_3(t) = (0, 1-t) & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$X = X_1 + X_2 + X_3$ 라 두면 $\int_X F \cdot ds = \int_{X_1} F \cdot ds + \int_{X_2} F \cdot ds + \int_{X_3} F \cdot ds$

① $\int_{X_1} F \cdot ds = \int_0^1 (te^{t^2}, t^2) \cdot (1, 0)\, dt = \int_0^1 te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2}(e-1)$

② $\int_{X_2} F \cdot ds = \int_0^1 \left((1-t) \cdot e^{(1-t)^2+t^2} + 3(1-t)t,\ te^{(1-t)^2+t^2} + (1-t)^2\right) \cdot (-1, 1)\, dt$

$= \int_0^1 (-1+2t) \cdot e^{(1-t)^2+t^2}\, dt + \int_0^1 4t^2 - 5t + 1\, dt$

$= 0 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{6}$

③ $\int_{X_3} F \cdot ds = \int_0^1 (0, (1-t)e^{(1-t)^2}) \cdot (0, -1)\, dt = \int_0^1 (t-1)e^{(t-1)^2} dt = \frac{1}{2}(1-e)$

$\therefore \int_X F \cdot ds = ① + ② + ③ = -\frac{1}{6}$

별해) $F(x,y) = (xe^{x^2+y^2} + 2xy,\ ye^{x^2+y^2} + x^2) + (xy, 0)$ 이고 앞쪽 부분은 잠재함수를 갖는다. 따라서 $F' = (xy, 0)$ 에 대해 위 과정을 계산하면 $-\frac{1}{6}$ 을 얻는다.

채점기준)
- 매개화를 바르게 하고 선적분의 정의를 알면 5점.
- ①, ②, ③ 중 적어도 하나가 완벽히 맞으면 10점.
- 별해의 경우 F'에 대해 위와 같은 기준을 적용함.