

수학 및 연습 2 중간고사
(2015년 10월 17일 오후 1:00-3:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [15점] 함수

$$f(x, y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}$$

가 다음 미분방정식을 만족시킴을 보이시오.

$$x^2 D_1 f(x, y) + y^2 D_2 f(x, y) = f(x, y)^2.$$

문제 2. [30점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

- (a) (10점) $D_1 f(0, 0)$ 와 $D_2 f(0, 0)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) 함수 f 가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.
- (c) (10점) 조건 $D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y)$ 를 만족시키는 (x, y) 를 모두 구하시오.

문제 3. [20점] 함수 $f(x, y, z) = ze^x \sin y$ 와 곡면 $f(x, y, z) = 1$ 위의 점 $P = \left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

- (a) (10점) 점 P 에서 함수 f 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 구하시오.
- (b) (10점) 점 P 에서 곡면 $f(x, y, z) = 1$ 에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

문제 4. [20점] 3차원 공간에서 정의된 함수

$$f(x, y, z) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sin\left(\frac{z}{2}\right)$$

를 집합 $S = \{(x, y, z) \mid x + y + z = \pi, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ 에 제한하였을 때 최댓값을 구하시오.

문제 5. [20점] 좌표평면에서 세 점 $(-2, 3), (3, 3), (-2, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 내부에서 정의된 함수 $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 6. [15점] 원점에서 함수 $f(x, y) = e^{xy} \sin y$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [20점] 함수

$$f(x, y) = \int_0^1 (\sqrt{t} - x - yt)^2 dt$$

의 임계점을 모두 구하고 그것이 극댓점인지 극솟점인지 혹은 안장점인지 판정하시오.

문제 8. [20점] 다변수 벡터함수

$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad G(u, v) = (u + 2v, -u + v)$$

와 좌표평면의 영역

$$D(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq r^2\}$$

에 대하여

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\text{Area}((G \circ F)(D(r)))}{r^2}$$

를 구하시오. (단, $\text{Area}((G \circ F)(D(r)))$ 는 $(G \circ F)(D(r))$ 의 넓이)

문제 9. [20점] 좌표평면에서, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, y)$$

와 영역 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ 의 경계를 따라 반시계 방향으로 한 바퀴 도는 곡선 X 에 대하여

$$\int_X \mathbf{F} \cdot ds$$

를 구하시오.

문제 10. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

가 \mathbb{R}^3 에서 잠재함수를 가질 필요충분조건이 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

가 대칭행렬임을 증명하고, 이 때 \mathbf{F} 의 잠재함수를 구하시오.

(b) (10점) 함수 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 이 연속함수이면, 원점이 빠진 n -공간 $\mathbb{R}^n - \{O\}$ 에서 벡터장

$$\mathbf{F}(X) = f(|X|)X$$

의 잠재함수가 존재함을 증명하시오.