

수학 및 연습 2 중간고사

(10월 27일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하십시오.(총점 200점)

문제 1 (30점). 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하여라.

- (a) f 는 $(0, 0)$ 에서 연속인가?
- (b) $D_1f(0, 0)$ 과 $D_2f(0, 0)$ 는 존재하는가? 존재한다면 그 값은 얼마인가?
- (c) f 는 $(0, 0)$ 에서 미분가능한가?

문제 2 (20점). .

- (a) \mathbb{R}^n 의 열린 부분집합 U 에서 정의된 일급함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여, $\mathbf{grad} f(P)$ 는 점 $P \in U$ 가 속한 등위면 $S = \{X \in U \mid f(X) = f(P)\}$ 에 수직임을 보여라.
- (b) $(x, y) = (2, 1)$ 에서 $z = \frac{1}{xy}$ 의 그래프의 접평면의 방정식을 구하여라.

문제 3 (30점). 다음 질문에 답하여라.

- (a) 원점에서 $f(x, y) = \sin(x + y)e^{x+2y}$ 의 2차 근사다항식을 구하라.
- (b) (a)의 근사다항식을 이용하여 $\sin(0.02)e^{0.03}$ 의 1차 근사값을 구하고, 오차가 5×10^{-3} 이하임을 보여라.

문제 4 (20점). $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$ 일 때, $f(x, y)$ 의 모든 임계점을 구하고, 각각의 임계점이 극대점인지 극소점인지 안장점인지의 여부를 판정하여라.

문제 5 (20점). 공간 \mathbb{R}^3 에서 원뿔면 $z^2 = x^2 + y^2$ 과 평면 $2z = x + 4$ 의 교점들의 집합을 S 라 할 때, 라그랑즈 승수법을 사용하여 S 위의 점들 중 원점에서 가장 가까운 점과 가장 먼 점을 구하여라.

문제 6 (20점). 두 벡터함수 \mathbb{F}, \mathbb{G} 가

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(u, v, w) &= \left(\frac{1}{3}u - 3v + 4w, 3v - 2w, 2w \right), \\ \mathbb{G}(\rho, \varphi, \theta) &= (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \end{aligned}$$

로 주어졌을 때, $P = (3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8})$ 에서 $\mathbb{G} \circ \mathbb{F}$ 의 순간 부피팽창률을 구하여라. (참고: $\mathbb{R}_{\{u, v, w\}}^3 \xrightarrow{\mathbb{F}} \mathbb{R}_{\{\rho, \varphi, \theta\}}^3 \xrightarrow{\mathbb{G}} \mathbb{R}_{\{x, y, z\}}^3$)

문제 7 (20점). 벡터장 $\mathbb{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + y \mathbf{k}$ 이 주어져 있는 공간에 두개의 닫힌 곡선 $C_1(t), C_2(t)$ 가 놓여 있다. 개미가 곡선

$$C_1(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

을 따라 움직인 후, 또 다른 곡선

$$C_2(t) = (0, 2 - \cos t, -\sin t), \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi$$

을 따라 움직여 출발점으로 돌아왔다. 이 개미가 한 일을 구하라.

문제 8 (20점). 각원소 벡터장 $\mathbf{a}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (a) 1사분면 $U = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 위의 두 점 P 와 Q 를 잇는 일사분면 위의 일급곡선을 X 라 하자. 이 때 X 를 따르는 각원소 벡터장 \mathbf{a} 의 선적분 $\int_X \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$ 는 곡선 X 에 관계없이 일정함을 보여라.
- (b) 각원소 벡터장 \mathbf{a} 는 $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에서 잠재함수를 가지는가? 만일 잠재함수를 가지면 잠재함수를 찾고 그렇지 않으면 잠재함수가 없음을 증명하여라.

문제 9 (20점). 벡터장

$$\mathbb{F}(x, y, z) = (ye^z, xe^z + \sin z, xye^z + y \cos z + 1)$$

를 매개곡선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 을 따라 적분한 값 $\int_X \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하여라.