

수학 및 연습 2 중간고사
(2012년 10월 20일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (25점). 다음과 같이 정의된 함수 f 에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (5점) 벡터 \mathbf{v} 에 대해 함수 f 의 $(0, 0)$ 에서의 \mathbf{v} -방향 미분계수를 구하시오.
- (b) (10점) 함수 f 는 $(0, 0)$ 에서 미분가능하지 아닌지 판별하고 그 이유를 밝히시오.
- (c) (10점) 함수 $D_1 f$ 는 $(0, 0)$ 에서 불연속임을 보이시오.

문제 2 (20점). 다음 함수의 극대점, 극소점과 안장점을 구하시오.

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x \sin y \quad (-\pi < y < \pi)$$

문제 3 (25점). 원점에서 곡면 $z^3 = x^2 y + 2$ 까지의 최단거리를 구하시오.

문제 4 (25점). $x > 0, y > 0$ 인 영역에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2 y} \frac{\sin(xt)}{t} dt$$

에 대하여 $(1, \frac{\pi}{2})$ 에서 $f(x, y)$ 의 일차 근사다항식을 구하시오.

문제 5 (20점). 일급함수 $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

- (i) 모든 점 (x, y) 에 대하여 $g(x, y) = f(2x - y, y^2 - 4x)$ 이다.
- (ii) 다음 표는 점과 그 점에서의 함수값을 각각 나타낸다.

점	f	g	$D_1 f$	$D_2 f$
$(0, 0)$	2	2	5	2
$(1, 2)$	1	2	4	6

이 때, 점 $(1, 2)$ 에서 함수 F 의 야코비 행렬을 구하시오.

문제 6 (20점). 직교좌표계로 표현된 함수 $F(x, y, z) = (x^3, x + z^2, x + y^3 + z^5)$ 를 구면좌표계로 치환하여 나타낸 것을 $G(\rho, \varphi, \theta)$ 라 할 때, 점 $(\rho, \varphi, \theta) = (1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 에서 G 의 순간 부피 팽창률을 구하시오.

문제 7 (15점). 자연수 n 에 대하여 곡선 $c_n(t) = (t, t^n, t^{2n})$ ($0 \leq t \leq 1$) 을 생각하자. 다음과 같이 정의된 I_n 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ 을 구하시오.

$$I_n = \int_{c_n} y dx + (3y^3 - x) dy + z dz$$

문제 8 (30점). z -축을 제외한 3 차원 좌표공간에서 정의된 벡터장들

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right), \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + e^x, \frac{x}{x^2 + y^2}, 1 \right)$$

과 곡선 $X(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 두 벡터장 \mathbf{a}, \mathbf{F} 는 닫힌 벡터장인지 아닌지 판별하고 그 이유를 밝히시오.
- (b) (10점) 두 벡터장 \mathbf{a}, \mathbf{F} 는 잠재함수를 가지는지 아닌지 판별하고 그 이유를 밝히시오.
- (c) (10점) 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

문제 9 (20점). 다음 벡터장 \mathbf{F} 와 곡선 X 에 대해 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오. (단, $y > 0$.)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \log y, \frac{e^x}{y} - \cos z, y \sin z), \quad X(t) = (\sin t \log t, e^t, \frac{t}{2}) \quad (\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2})$$