• 2008년
하계 계절학기
「수학 및 연습 2」

1. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. $\frac{dr}{dt} = 3$, $\frac{dh}{dt} = 5$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}$$ 10점

$$= \frac{2}{3}\pi r h\cdot 3 + \frac{1}{3}\pi r^2\cdot 5$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot 3\cdot 5\cdot 3 + \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 5$$

$$= 1125\pi$$

20점

2. (1) $\nabla G = (2xy,\ x^2 + ze^y,\ e^y + 2z)$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2xy \Rightarrow G(x,y,z) = x^2 y + g(y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + ze^y$$

$$\Rightarrow g = ze^y + h(z) \quad (\Leftrightarrow G = x^2 y + ze^y + h(z))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial z} = e^y + h'(z) = e^y + 2z$$

$$\Rightarrow \cancel{G=}\ h(z) = z^2 + C$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = x^2 y + z e^y + z^2 + C$$ 10

(2) $$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & ze^y & e^y \\ 0 & e^y & 2 \end{pmatrix}$$ 5

$$F'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 10

3. $x^4+y^2 \geq 2\sqrt{x^4y^2} = 2|x^2y|$ ⌋ 5점

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2y}{x^4+y^2}\sqrt{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$ ⌋ 20점

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\therefore$ 원점에서 연속.

4. $V(x, y) = 50 + ax^2 - by^2$

1) $\operatorname{grad} V(x, y) = (2ax, -2by)$ $\therefore \operatorname{grad} V(1, -2) = (2a, 4b)$ 5점

$\therefore (2a, 4b) \parallel (-2, 16)$ i.e. $(a, 2b) = t(-1, 8)$ for some $t \in \mathbb{R}$.

$\therefore a = -t, \quad b = 4t \Rightarrow b = -4a$ 10점

2) $V(1, -2) = 50 + a - 4b = 33$ $\therefore a = -1, \ b = 4$ 2점

and $\operatorname{grad} V(1, -2) = (-2, 16)$

$\therefore$ 가장 빨리 감소하는 방향 (단위벡터) $= \dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 16^2}}(2, -16)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{65}}(1, -8)$

$\quad \parallel \ \mathbf{v}$ 6점

이 때의 변화율 $D_{\mathbf{v}}V(1, -2)$ 는

$D_{\mathbf{v}}V(1, -2) = \operatorname{grad} V(1, -2) \cdot \mathbf{v} = (-2, 16) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{65}}(1, -8)$

$= -2\sqrt{65}$ 10점.

<채점기준>

- 각 단계에서 계산실수 시 -2 점
- 변화율 $D_{\mathbf{v}}V(1, -2)$ 는 안 구하거나 부호를 고려하지 않으면 점수없음.

5.

$$w = f(x-y,\ y-x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = D_1 f(x-y,\ y-x)\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial x} + D_2 f(x-y,\ y-x)\frac{\partial(y-x)}{\partial x}$$

$$= D_1 f(x-y,\ y-x) + D_2 f(x-y,\ y-x)\cdot(-1)$$ 10점

$$\frac{\partial w}{\partial y} = D_1 f(x-y,\ y-x)\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial y} + D_2 f(x-y,\ y-x)\cdot\frac{\partial(y-x)}{\partial y}$$

$$= D_1 f(x-y,\ y-x)\cdot(-1) + D_2 f(x-y,\ y-x)\cdot 1$$ 20점

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

< 채점 기준 >

- 연쇄법칙 개념 모르면 0 점
  (논리에 맞지 않는 식, 엉뚱한 표기 등).

6. (1) $X(t) = (t^3, 2t^2)$, $0 \le t \le 1$ 로 매개화하면

$$\int_X \mathbb{F} \cdot ds = \int_0^1 (t^6, 4t^4) \cdot (3t^2, 4t)\, dt \quad 5$$

$$= \int_0^1 (3t^8 + 16t^5)\, dt$$

$$= 3. \quad 10$$

(2) $$\int_X xy\,dx + xy^3\,dy = \int_{-1}^{2} t^2 dt + \int_1^5 2t^3 dt \quad 5$$

$$= 315 \quad 10$$

(3) $$\int_X \mathbb{G} \cdot ds = 2\pi \operatorname{wind}(X) \quad 5$$

$$= \frac{7}{2}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{19}{6}\pi \quad 10$$

(4) 정의역 $\mathbb{R}^2$는 열린 볼록 집합이고 $\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+1)$ 이므로

$\mathbb{F}$는 잠재함수를 가진다. 5

곡선 X가 폐곡선이므로

$$\int_X \mathbb{F} \cdot ds = 0. \quad 10$$

7. $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2$
$g(x,y,z) = z-2x^2-3y^2$ 이라 하자.

(x_0,y_0,z_0)를 $g=0$ 인 점들중 f의 극점이라 하자.

그러면 라그랑즈 승수법에 의해

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (2x_0,\ 2y_0,\ 2(z_0-1))$$
$$= \lambda(-4x_0, -6y_0, 1) = \lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0) \quad \cdots \mathrm{I}$$

i) $\lambda = -\frac{1}{2}$ 일때 $(x_0,y_0,z_0) = (\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, 0, \frac{3}{4})$ $\cdots$ II

ii) $\lambda = -\frac{1}{3}$ 일때 $(x_0,y_0,z_0) = (0, \pm\sqrt{\frac{5}{18}}, \frac{5}{6})$ $\cdots$ III

iii) $\lambda \neq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ 일때 $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ $\cdots$ IV

이 점들중 f값을 최소로 하는 점은 $(0, \pm\sqrt{\frac{5}{18}}, \frac{5}{6})$이고

그 값은 $\frac{11}{36}$ 이다.

따라서 구하는 최단거리는 $\boxed{\frac{\sqrt{11}}{6}}$ $\cdots$ V

＊채점기준

I - 10점

II, III, IV - 각 3점

V - 1점

8. 방법 I) $e^x = 1 + x + o(x)$ $\cdots$ I

$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ $\cdots$ II 이므로

$$e^x \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + xy - \frac{xy^2}{2} + o(y^2) + x\,o(y^2) + y\,o(x) - \frac{y^2}{2}o(x) + o(x)o(y^2)$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + xy + o(x^2+y^2) \quad \cdots \text{III}$$

따라서 $\underline{\text{테일러 전개의 유일성}}_{\text{IV}}$에 의하여 f의 2차 근사다항식은

$$\boxed{y - \frac{y^2}{2} + xy}$$

방법 II) $D_1 f = e^x \log(1+y)$ $\qquad D_1^2 f = e^x \log(1+y)$

$D_2 f = \dfrac{e^x}{1+y}$ $\qquad D_1D_2 f = D_2D_1 f = \dfrac{e^x}{1+y}$ I

$\qquad D_2^2 f = -\dfrac{e^x}{(1+y)}$

이고

$$T_2 f(x,y) = f(0,0) + \operatorname{grad} f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2!}\left[D_1^2 f(0,0)x^2 + 2D_1D_2 f(0,0)xy + D_2^2 f(0,0)y^2\right] \quad \text{II}$$

$$\therefore\ T_2 f(x,y) = \boxed{y + xy - \frac{y^2}{2}}$$

* 채점 기준

방법 I) I, II 각 5점

III - 5점

IV - 5점

방법 II) I - 각 2점

II - 10점

(방법 II)에서 II 단계 사소한 실수 -2점)

9. $D_1 f = 3x^2 - 6y + 6$

$D_2 f = 2y - 6x + 3$ 으로 부터 임계점을 구하면 $\underline{(1, \frac{3}{2}), (5, \frac{27}{2})}$ ... I

한편 헤세 행렬은 $f''(x,y) = \begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

헤세 판정법에 의해

$\det f''(1, \frac{3}{2}) = \det \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow \underline{(1, \frac{3}{2})}$: 안장점 ... II

$f''(5, \frac{27}{2}) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \underline{(5, \frac{27}{2})}$: 극소점 ... III

★ 채점기준

I - 각 5점

II, III - 각 5점