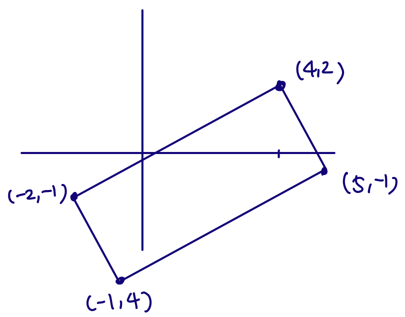
문제 1. [20점] 좌표평면에서 네 점 $(4,2), (5,-1), (-2,-1), (-1,-4)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형 D에 대하여 다음을 구하시오.

$$\iint_D \frac{(x-2y+1)^2}{(3x+y+8)^2} dxdy$$



$$\begin{cases} u = x-2y+1 \\ v = 3x+y+8 \end{cases}$$ 로 치환 (+10)

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{x-2y+1}{3x+y+8}\right)^2 dxdy = \int_1^{22}\int_1^{8} \frac{u^2}{v^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \int_1^{22}\int_1^{8} \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{1}{7} \quad du\,dv$$

$$= \frac{511}{22}$$ (+10)

문제 2. [20점] 원점이 빠진 좌표평면에서 정의된 벡터장

$$F(x,y) = \left(\arctan\frac{x}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\arctan\frac{y}{x}\right)\mathbf{j}$$

가 영역

$$D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ \frac{1}{\sqrt{3}}x \le y \le \sqrt{3}x\}$$

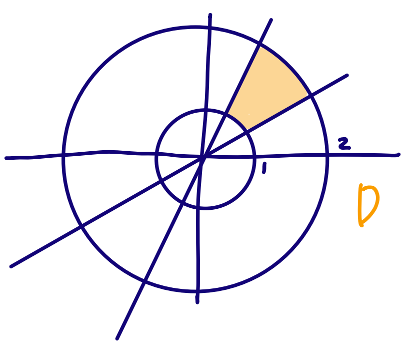
의 경계를 빠져나가는 양(flux)을 구하시오.

$$\operatorname{div} F = \frac{1/y}{1+(x/y)^2} + \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad (+5)$$

$$\Rightarrow \text{flux} = \int_{\partial D} F\cdot n \, ds$$

$$= \iint_D \operatorname{div} F \, dV_2 \quad (+5)$$

$$= \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} \, dx\, dy$$



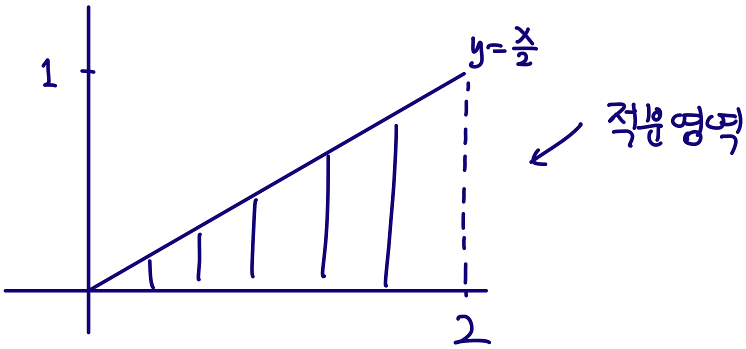
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^2 \frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2} \, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^2 (\cos\theta+\sin\theta) \, dr\, d\theta$$

$$= \sqrt{3} - 1 \quad (+10)$$

문제 3. [20점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2}\,dxdy$$



푸비니정리 적용

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{x/2} e^{x^2}\,dy\,dx$$

(+10)

(범위 잘못구하면 0점)

$$= \int_0^2 \frac{x}{2} e^{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{4} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

(+10)

2022학년도 여름학기 수학 2 기말고사 문제 4,5,6 모범답안 및 채점기준

[문제 4] 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(y^3, -xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

의 회전함수는 $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ 이다. 이때 $(0,0) \in D$ 이므로 그린 정리를 적용하기 위해 충분히 작은 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 원판 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < \varepsilon^2\} \subset D$ 을 제외한 영역 $E = D \setminus \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \varepsilon^2\}$ 에서 그린 정리를 적용하면,

$$\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_E \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dV_2 = 0$$

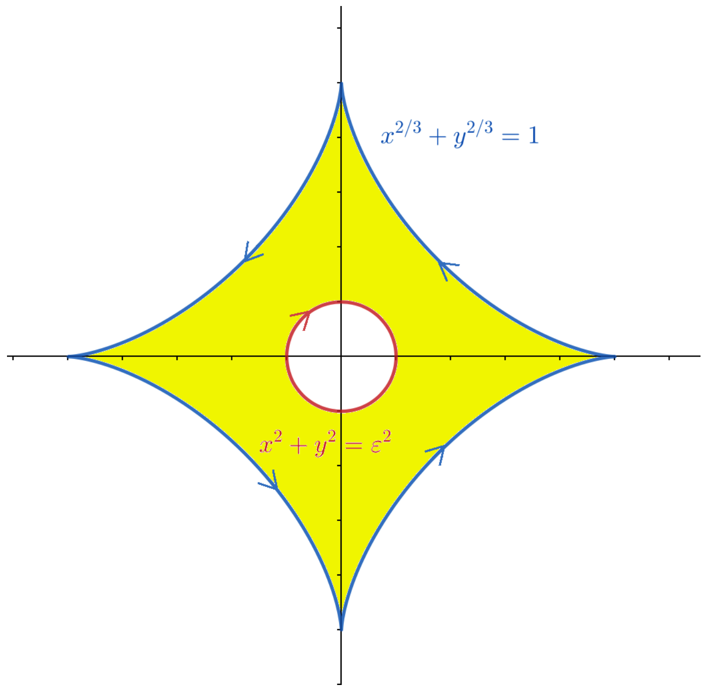
이다. 한편 ∂E 의 경계는 곡선 C 와 원

$$C_\varepsilon : X(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

의 합이므로 경계의 향을 고려하면

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(X(t)) \cdot X'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^4 t - \cos^2 t \sin^2 t)\, dt \\ &= -\pi\end{aligned}$$

를 얻는다.



[채점기준]

1. 영역 D 내부에 원점을 중심으로 하는 작은 원을 제외한 영역에서 그린 정리를 적용한 경우 10점
2. 원의 향을 고려하여 매개화를 하고, 미분형식의 선적분을 일변수함수의 정적분으로 표현한 경우 5점
3. 답을 구하면 5점

[문제 5] 곡면 X 의 편미분을 구하면

$$X_u = (-(2+\sin v)\sin u, (2+\sin v)\cos u, 1)$$
$$X_v = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, -\sin v)$$

이므로

$$X_u(\pi, 0) = (0, -2, 1), \qquad X_v(\pi, 0) = (-1, 0, 0)$$

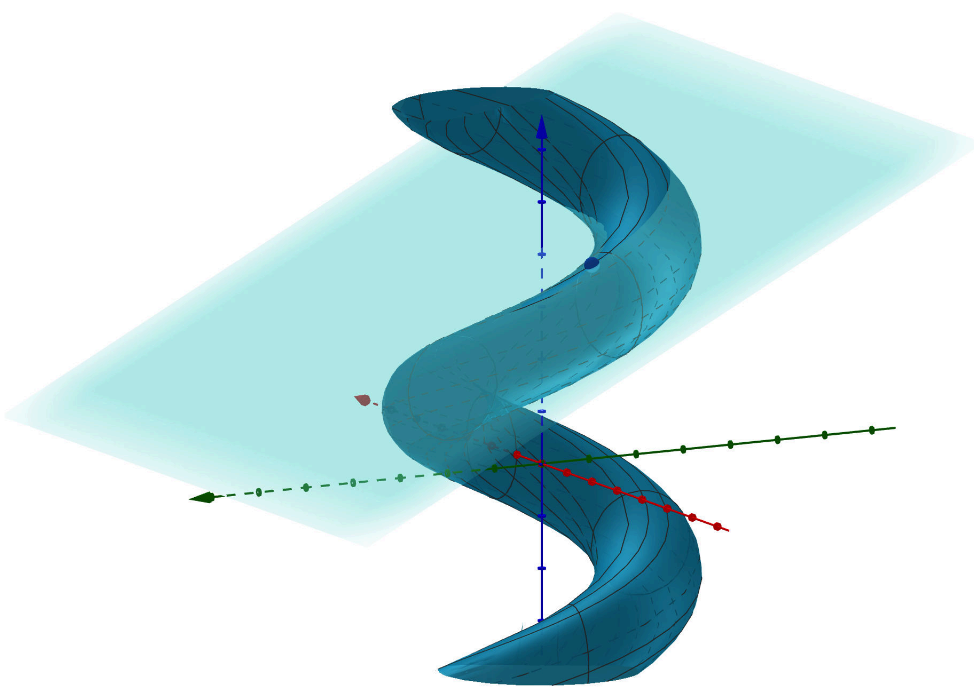
이고

$$(X_u \times X_v)(\pi, 0) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, -1, -2)$$

임을 안다. 따라서 구하는 접평면의 방정식은

$$(X_u \times X_v)(\pi, 0) \cdot ((x, y, z) - X(\pi, 0)) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y + 2z = 2(\pi + 1)$$

이다.



[채점기준]

1. $(X_u \times X_v)(\pi, 0) = (0, -1, -2)$ 을 구하면 5점
2. 공식 $(X_u \times X_v)(\pi, 0) \cdot ((x, y, z) - X(\pi, 0)) = 0$ 을 안다고 판단될 경우 10점
3. 접평면의 방정식을 구하면 5점

[문제 6] 곡면 S 의 매개화는

$$X(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2-1}\right), \quad D : 1 \le x^2+y^2 \le 2$$

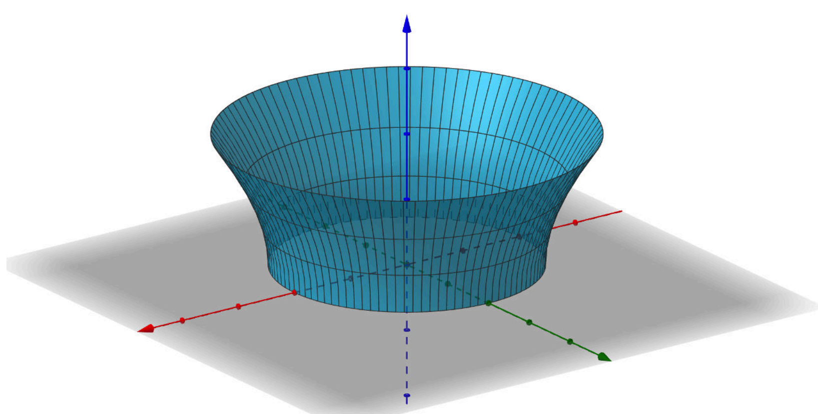
이고, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ 이라 두면 면적소는

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)^2 + 1}\, dx\, dy \\ &= \frac{\sqrt{2x^2+2y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dx\, dy \end{aligned}$$

이다. 따라서 곡면 S 의 질량 m 은

$$\begin{aligned} m &= \iint_X \mu\, dS \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2-1} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+2y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2-1}\, dr\, d\theta \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)\pi \end{aligned}$$

이다.



[**채점기준**]

1. 곡면의 질량의 정의를 알면 5점
2. 매개화, 면적소, 답을 구하면 각각 5점 총 15점

7번 모범답안

발산 정리에 의해,

$$\begin{align}
\iint_R \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathrm{int}R} \mathrm{div}\mathbf{F}\ dV \tag{1}\\
&= \iiint_{\mathrm{int}R} 3dV \tag{2}\\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}\int_r^1 3rdzdrd\theta \tag{3}\\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}(3r-3r^2)drd\theta \tag{4}\\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-\sin^3\theta\right)d\theta \tag{5}\\
&= \frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3} \tag{6}
\end{align}$$

7번 채점기준

1. 수식 (1) 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
2. 수식 (2) 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
3. 수식 (3) 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
4. 답을 잘 구하면 5점.

8번 모범답안

곡면 S'를 $x^2+y^2=1$, $z=0$이라고 정의하고, 곡면 S'의 향을 $(0,0,1)$로 정의하자. 발산 정리에 의해,

$$\iiint_{\mathrm{int}(S\cup S')} \mathrm{div}\mathbf{F}\ dV = \iint_{S\cup S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \tag{7}$$

가 성립한다. 문제에서 주어진 적분의 값을 구하기 위해 나머지 적분의 값을 계산하면,

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathrm{int}(S\cup S')} \mathrm{div}\mathbf{F}\ dV &= \iiint_{\mathrm{int}(S\cup S')} \mathrm{div}3dV\\ &= 3\cdot \mathrm{Vol}(\mathrm{int}(S\cup S'))\\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1\cdot 1\cdot 3\\ &= 6\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S'} (e^y, e^x, 5)\cdot(0,0,1)dS\\ &= \iint_{S'} 5dS\\ &= 5\cdot\mathrm{Area}(S')\\ &= 5\pi\end{aligned}$$

이므로 구하고자 하는 답은 11π이다.

8번 채점기준

1. 수식 (7) 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
2. $\iiint_{\mathrm{int}(S\cup S')} \mathrm{div}\mathbf{F}\ dV = 3\cdot\mathrm{Vol}(\mathrm{int}(S\cup S'))$ 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
3. $\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 5\cdot\mathrm{Area}(S')$ 또는 그에 상당하는 수식을 서술하면 5점.
4. 답을 잘 구하면 5점.
5. 적분의 부호가 틀렸을 경우 1번, 4번 기준에서 모두 틀린 것으로 간주함.

문제 9.

벡터장 F는 z축을 제외한 영역에서 잘 정의된다.

$x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 일때,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{curl}(hF) &= \mathrm{grad}\,h \times F + h \cdot \mathrm{curl}\,F \\
&= \mathrm{grad}\,h \times F \quad (\because \mathrm{curl}\,F = 0) \\
&= \frac{(-xz, -yz, x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \times \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0\right) \\
&= \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (\text{입체각 벡터장})
\end{aligned}
$$

따라서, $S_\varepsilon = S \cap \{z \leq 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ 라 하면,

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{curl}(hF) \cdot dS &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} \mathrm{curl}(hF) \cdot dS \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot dS \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi(1-\varepsilon) \quad (\because \text{아르키메데스 원리}) \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

- F의 정의역을 고려하지 않은 경우 10점 감점

문제 10.

주어진 곡면 S는 $X(x,y) = (x, y, 1-3x-2y)$ $(x \geq 0, y \geq 0, 1-3x-2y \geq 0)$
로 매개화 가능하며,

$$X_x = (1, 0, -3)$$
$$X_y = (0, 1, -2)$$
$$X_x \times X_y = (3, 2, 1)$$ 을 얻는다.

$\mathrm{curl} F(x,y,z) = (x-y, -y, 1)$ 이므로, 스토크스 정리에 의해

$$\int_C F \cdot ds = \int_S (\mathrm{curl} F) \cdot dS = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1-2y}{3}} (x-y, -y, 1) \cdot (3, 2, 1)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1-2y}{3}} (3x-5y+1)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}\left(\frac{1-2y}{3}\right)^2 - (5y-1) \cdot \frac{1-2y}{3}\, dy$$

$$= 1/24$$

- 스토크스 정리를 적용한 경우 +5
- curlF 를 잘 계산한 경우 +5
- 곡면의 매개화를 잘 한 경우 +5
- 면적분을 잘 계산한 경우 +5

- 스토크스 정리를 사용하지 않은 경우 잘못된 과정이 있으면 부분점수 없음.