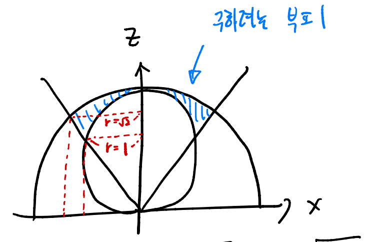
문제 1번 답안 및 채점기준

문제 1. [20점] 삼차원 좌표공간의 세 영역

$$R_1 = \{(x,\, y,\, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4\},$$
$$R_2 = \{(x,\, y,\, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \ge 1\},$$
$$R_3 = \left\{(x,\, y,\, z) \,\middle|\, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

에 대하여 $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$의 부피를 구하시오.



(옆에서 보기)

풀이1 원기둥 좌표계로 치환하면 (r, θ, z)

$$\begin{cases} R_1 = \{ |z| \le \sqrt{4-r^2} \} \\ R_2 = \{ |z-1| \ge \sqrt{1-r^2} \} \\ R_3 = \{ z \ge r \} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 1 \text{ 에서 } & 1+\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2} \\ 1 \le r \le \sqrt{2} \text{ 에서 } & r \le z \le \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{적분범위 : 10점}}$
적분범위부터 틀리면 0점

$$\text{부피} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\left[\int_0^1 r\sqrt{4-r^2} - r\sqrt{1-r^2} - r\, dr + \int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{4-r^2} - r^2\, dr\right]$$

$$= \frac{13}{3}\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$$ $\boxed{\text{계산 : 10점}}$ (합 20점)

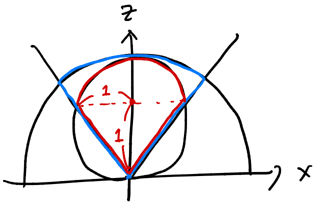
풀이2 구면좌표계로 치환하면 (ρ, θ, ϕ)

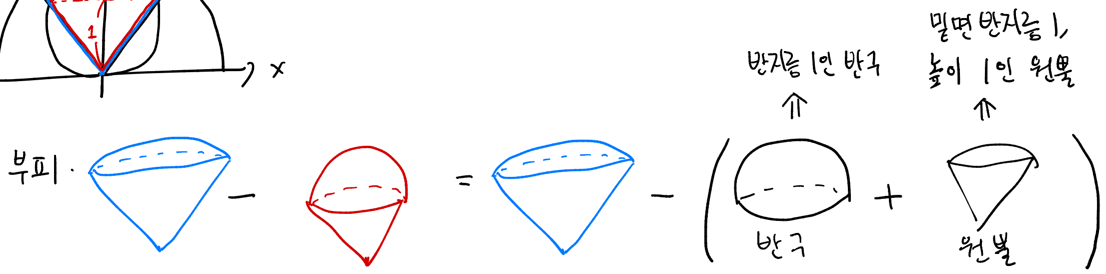
$$\begin{cases} R_1 = \{ 0 \le \rho \le 2 \} \\ R_2 = \{ \rho^2 - 2\rho\cos\phi \ge 0 \} = \{ \rho \ge 2\cos\phi \} \\ R_3 = \{ \rho\cos\phi \ge \rho\sin\phi \} = \{ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4} \} \end{cases}$$

$\boxed{\text{적분범위 : 10점}}$
적분범위부터 틀리면 0점

$$\Rightarrow \text{부피} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\cos\phi}^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \frac{13}{3}\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi \,//$$ $\boxed{\text{계산 : 10점}}$ (합 20점)

풀이3





$\boxed{\text{적분범위 : 10점}}$
적분범위부터 틀리면 0점

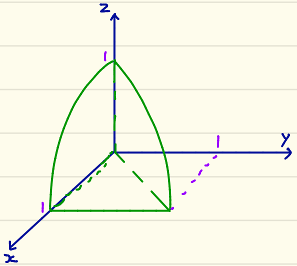
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta - \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{13}{3}\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$ $\boxed{\text{계산 : 10점}}$ (합 20점)

* 채점기준 : - 그림만 그린 경우 부분 점수 없음
- 계산 중 경미한 실수는 계산점수 5점 감점
ex) 적분 계산은 맞는데 마지막에 더하기 빼기 실수한 것

2.



공간 상의 영역 $0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le 1-x^2$은 영역 $0\le z\le 1, 0\le x\le \sqrt{1-z}, 0\le y\le x$와 같다. 푸비니 정리에 의해,

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{1-x^2} 4e^{(1-z)^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^x 4e^{(1-z)^2}\,dy\,dx\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}} 4xe^{(1-z)^2}\,dx\,dz$$

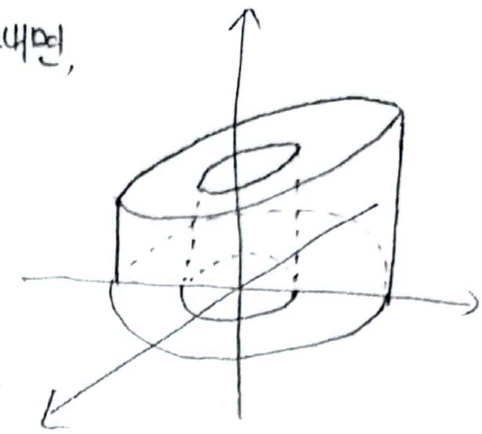
$$= \int_0^1 2(1-z)e^{(1-z)^2}\,dz$$

$$= \left[-e^{(1-z)^2}\right]_0^1 = e-1$$ 이다.

<채점 기준>

- 푸비니 정리를 사용함 - 5점 (언급만 하고 사용하지 않은 경우 점수 인정 X)
- 적분 구간을 올바르게 바꾼 경우 - 5점
- 답 e-1 - 5점

#3. 영역 R을 원기둥 좌표계로 나타내면,



$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \\ 0 \le z \le r(\cos\theta + \sin\theta) + 5 \end{cases}$$

이다. $dxdydz = r\,dzdrd\theta$ 이므로

$$\iiint_R (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{r(\cos\theta+\sin\theta)+5} r^2 \cdot r\,dzdrd\theta = \frac{75}{2}\pi$$

※ 영역을 잘 나타냈으면 +5점

야코비 행렬식을 고려하여 피적분함수를 잘 나타냈으면 +5점

답이 맞으면 +5점

※ 원기둥 좌표계가 아닌 경우 :

영역을 잘 나타냈으면 +5점

문제 4. [20점] 좌표평면에서 시작점이 $(\pi, 0)$이고 끝점이 $(0, 6\pi)$인 선분을 따라 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (\cos x \sin y, xy + \sin x \cos y)$의 선적분을 구하시오.

풀이1). $\mathbb{F}_1(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$

$\mathbb{F}_2(x,y) = (0, xy)$

라 놓으면, $\mathbb{F}(x,y) = \mathbb{F}_1(x,y) + \mathbb{F}_2(x,y)$ 이다.

$\mathbb{F}_1$은 잠재함수 $\varphi(x,y) = \sin x \sin y$를 갖는 보존장임에 주목하자.

주어진 선분을 $\gamma(t) = (1-t)(\pi, 0) + t(0, 6\pi)$, $t \in [0,1]$로 매개화하자.

+5 (잠재함수를 맞게 구했을시).

그러면 선적분은

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \mathbb{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_\gamma \mathbb{F}_2 \cdot d\vec{s}$$

선적분의 기본정리. +5

$$= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) + \int_0^1 (0, 6t(1-t)\pi^2)\cdot(-\pi, 6\pi)\,dt$$

+5 (선적분, 구한까지 맞아야함).

$$= 6\pi^3 \int_0^1 6t(1-t)\,dt$$

$$= 6\pi^3$$

+5(정답)

풀이2) $\gamma(t) = (\pi - t, 6t)$, $0 \le t \le \pi$로 매개화하자.

그러면

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^\pi (\cos(\pi-t)\sin 6t, (\pi-t)\cdot 6t + \sin(\pi-t)\cos 6t)\cdot(-1, 6)\,dt$$

+10

$$= \int_0^\pi \cos t \sin 6t + 36t(\pi - t) + 6\sin t \cos 6t \, dt$$

+5

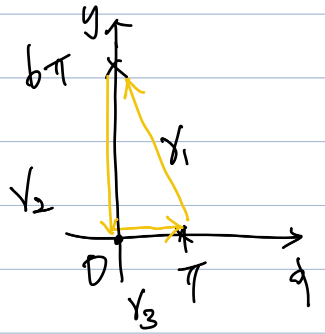
$$= \overbrace{\left(\sin t \sin 6t \Big|_{t=0}^{\pi}\right)}^{0} + 36\int_0^\pi t(\pi - t)\,dt$$

(정리를 모두 다 할시)

$$= 6\pi^3$$

+5 (정답).

풀이3)



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$를 합친 경로를 γ라 하자.

그린정리에 의해.

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\vec{s} = \iint_\Delta \text{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2 = \iint_\Delta y\, dV_2$$ +5. (그린정리를 사용했으면).

$$= \int_0^\pi \int_0^{6(\pi-x)} y\, dy\, dx \quad \left(= \int_0^{6\pi}\int_0^{\pi-\frac{y}{6}} y\, dx\, dy \right)$$ +5.

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\cdot 36(\pi-x)^2\, dx$$

$$= \int_0^\pi 18x^2\, dx = 6\pi^3$$

(★) $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{\gamma_2} \mathbb{F}\cdot d\vec{s}}^{\,0} + \cancel{\int_{\gamma_3} \mathbb{F}\cdot d\vec{s}}^{\,0}$

γ_2, γ_3를 고려한 선적분식이 있을 경우 (계산결과가 0이 아니어도 됨.)

$= \int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\vec{s}$)

이므로 정답은 $6\pi^3$.

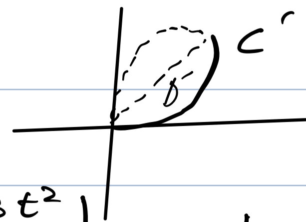
(위 내용이 모두 맞으면 감점하지 말으면 +10점.
(★)를 고려하지 않으면 +5점만 부여.)

- div. $\mathbb{F}\cdot\vec{n}$을 구한 경우 부분점수 없음.

5. (a).

주어진 곡선과 영역은 $x=y$ 에 대칭이기 때문에 $\{x \geq y\}$ 에서만 구해주고 2배를 해주면 된다.

$C' = C \cap \{x \geq y\}$



C'

이때 $X(t) = \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right)$ $0 \leq t \leq 1$ 으로 매개된다.

D' 넓이 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2(t)\, d\theta$ 극좌표에서 곡선 내부 넓이 공식

$\Rightarrow r(t) = \frac{3t}{t^3+1}\sqrt{t^2+1}$ $\qquad \tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = t$

$r^2 = \frac{9t^2(t^2+1)}{(t^3+1)^2}$ $\qquad \theta = \arctan(t)$

$$d\theta = \frac{1}{t^2+1}dt$$

$\Rightarrow D'$ 넓이 $= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{9t^2}{(t^3+1)^2}(t^2+1)\frac{1}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{9t^2}{(t^3+1)^2}dt$

$u = t^3+1$ 치환

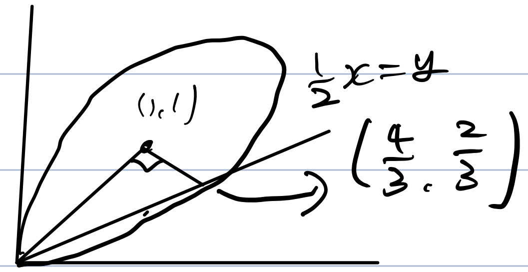
$= \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{3}{u^2}du = -\frac{1}{2}\frac{3}{u}\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}+3\right] = \frac{3}{4}$

D 넓이 $= 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

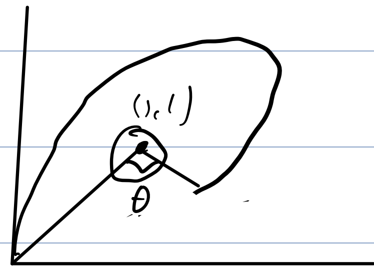
C' 과 $x=y$ 로 이루어진 폐곡선 위에서 그린정리 적용해도 된다.

* 닫히지 않은 구간에 대한 매개화는 정의된 바가 없으나 데카르트 곡선이 극 좌표 매개에서 잘 새개되고 D의 넓이가 극 좌표로 계산은 어려우나 잘 정의되기 때문에 D 넓이 $= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x(t)\frac{dy}{dt}dt$ 를 인정함.

(b)



$C'' = C \cap \{y \geq \frac{1}{2}x\}$:



$\mathbb{F}(x,y)$ 가 2차원 입체각 벡터장 $A(x,y)$ 의 평행이동임으로

flux 의 절대값은 곡선의 $(1,1)$ 에서의 시야각 양이다.

$\left[\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right) - (1,1)\right] \cdot [-1, -1] = 0$ 전체 2π에서 빠진부분인 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 만큼 빼준다.

$\Rightarrow \int_{C''} \mathbb{F} \cdot \vec{n}\, ds = \frac{3}{2}\pi$

채점기준

a) (10) 1. 면적은 = $\int_C \square$, 혹은 1변수 적분으로 나타냄. (3점)

2. C 를 알맞게 매개함 (3점) (범위 중요, 증명시험지에 필수)

3. 적분값 (4점)

치환에 경우 범위 + Jacobian 맞았을 때 (6점) 값 (4점)

b) (15) 1. Flux 정의 : $\int_C \mathbb{F} \cdot \vec{n}\, ds$ 혹은 "시야각" 분명히 보이지 않았을 경우 점수 X (5점)

2. 입체각 벡터장의 평행이동임을 명시하거나 실제 적분이 곡선의 시점과 종점의 각 차이임을 보임 (5점)

3. 답 (5점)

$\boxed{6\text{번}}$ 곡면 S 는 $X(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$; $r \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 로 매개화할 수 있다.

+4 ($X(x,y) = (x, y, 1-x^2-y^2)$ 으로 매개화한 경우도 +4).

$$X_r = (\cos\theta, \sin\theta, -2r)$$
$$X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \longrightarrow |N| = |X_r \times X_\theta| = \sqrt{|X_r|^2|X_\theta|^2 - (X_r \cdot X_\theta)^2} = \sqrt{(1+4r^2)r^2} = r\sqrt{1+4r^2}$$

$$\therefore \iint_S z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} (1-r^2)\,r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

+8 (외적의 크기를 사용하여 적분식을 잘 구한 경우에만.)

$1+4r^2 = t$ 로 치환 $\rightsquigarrow$ $8r\,dr = dt$, $r^2 = \frac{t-1}{4}$ $\quad 1 - \frac{t-1}{4} = \frac{5-t}{4}$

$$\iint_S z\,dS = \frac{2\pi}{8} \cdot \int_1^4 \frac{5-t}{4} \cdot \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{16}\int_1^4 \left(5\sqrt{t} - t^{\frac{3}{2}}\right) dt$$

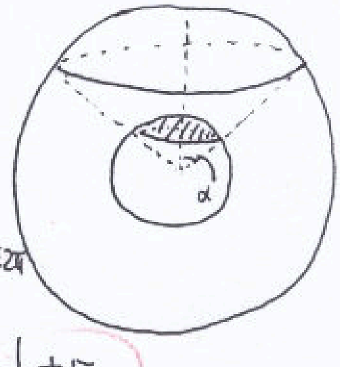
$$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{10}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \frac{\pi}{16}\left(\frac{10}{3}\cdot 7 - \frac{2}{5}\cdot 31\right) = \frac{\pi}{\cancel{16}_{4}} \cdot \left(\frac{\cancel{164}^{41}}{15}\right) = \frac{41}{60}\pi.$$

+8
부분점수 없음.

#7

sol 1) 입체각 벡터장 $\mathbb{A}$가 곡면 S를 빠져나가는 flux는 S를 단위구에 사영시킨 부분의 넓이와 같다.

($\mathbb{n}\cdot\mathbb{k}\geq 0$ 이므로 부호도 같다) +5 (*1)



따라서 단위구면 $(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, $0\leq\varphi\leq\alpha$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

(이 때 α는 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ 이고 $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ 인 각) 의 넓이를 구하면 +5

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi}{2}$ 이다. +5

(*) 아르키메데스의 원리를 이용해 설명해도 풀이가 맞으면 만점.

(*1) flux가 −입체각이라고 적은 경우 (*1)은 0점.

sol 2) 주어진 곡면을 매개화하여 $X(\varphi,\theta) = (4\sin\varphi\cos\theta, 4\sin\varphi\sin\theta, 4\cos\varphi)$ $0\leq\varphi\leq\alpha$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

(α는 sol 1 과 동일)로 나타낸다. +5

$X_\varphi = (4\cos\varphi\cos\theta, 4\cos\varphi\sin\theta, -4\sin\varphi)$ $X_\theta = (-4\sin\varphi\sin\theta, 4\sin\varphi\cos\theta, 0)$

$X_\varphi \times X_\theta = (16\sin^2\varphi\cos\theta, 16\sin^2\varphi\sin\theta, 16\sin\varphi\cos\varphi)$ $\mathbb{A} = \frac{1}{16}(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$

($\mathbb{n}\cdot\mathbb{k}\geq 0$ 의 방향이므로)

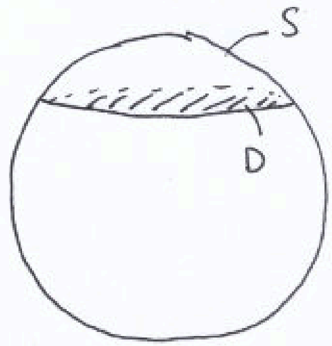
따라서 $\iint_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi}{2}$ +5

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}(\sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi)\, d\varphi\, d\theta$ +5 (*1)

(*1) 적분식을 이중적분 형식으로 완벽하게 바꾼 경우 5점. (적분 범위 등 부분점수 X)

(*) $(x, y, \sqrt{16-x^2-y^2})$ 로 매개화한 경우에도 채점기준은 동일.

sol 3) $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 7,\ z=3\}$ 이라 하자. $(\mathbb{n} = (0,0,-1))$



$\Rightarrow$ 발산정리에 의해 $0 = \iiint_{\mathrm{int}(S \cup D)} \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, dV$

$$= \iint_S \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} + \iint_D \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$$

$+5$

D 위의 점을 $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 3)$ 으로 매개화하면 $(0 \le r \le \sqrt{7},\ 0 \le \theta \le 2\pi)$

$X_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $\quad X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$ $\quad X_r \times X_\theta = (0,0,r)$

(부호가 n과 반대이므로) $\quad \mathbb{A} = \dfrac{1}{(r^2+9)^{3/2}}(r\cos\theta, r\sin\theta, 3)$

$$\iint_D \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7}} -3 \cdot \frac{r}{(r^2+9)^{3/2}}\, dr\, d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$+5$ (*1)

$\therefore \iint_S \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다. $+5$

(*1) 적분식을 이중적분 형식으로 제대로 바꿀 경우 5점.

(*) D에서의 n의 부호를 반대로 생각한 경우 (*1)의 5점을 부여하지 않음. (최종점수 5/15점)

#8.

발산 정리에 의하여

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot dS = \iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\cdot dV_3$$

$\operatorname{div}\mathbb{F} = 3(x^2+y^2+z^2)$

8점

$$= \iiint_R (3x^2+3y^2+3z^2)\, dV_3$$

① $$= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\pi} 3r^2\cdot r^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

8점

② $$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\frac{z}{\sqrt{3}}} 3(r^2+z^2)\, r\, dr\, dz\, d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} 3(r^2+z^2)\, r\, dr\, dz\, d\theta$$

③ $$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} 3(r^2+z^2)\, r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{3\pi}{5}(2-\sqrt{3})$$

4점

$\boxed{\text{문제 9}}$. 주어진 적분은 입체각 벡터장 $\mathbb{A} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ 과 영역 $D: -1 \le x, z \le 1,\ y=1$ 에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dz = \int_D \mathbb{A}\cdot d\mathbf{S}.$$

10

이는 D의 입체각이 됨을 관찰하자. 원점을 중심으로 하고 한 면이 D인 정육면체의 입체각이 4π 이므로, 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$4\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi. \qquad \square$$

15

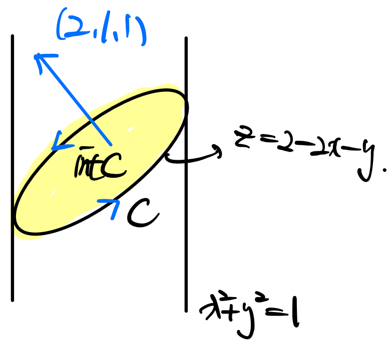
* 주어진 적분을 입체각 벡터장 ($\mathbb{A}$) 또는 입체각으로 잘 해석한 풀이에 10점.

* 단순 치환적분 계산으로 풀이한 경우에는 계산을 통하여 답까지 도출하지 못하면 부분점수 없음.

10. $\mathbb{F} = (yze^{xyz} + \sin x + xyz,\ xze^{xyz} + \cos y + xyz,\ xye^{xyz} + \sin^2 z + xyz)$

라고 두면

$\mathrm{curl}\,\mathbb{F} = (xz - xy,\ xy - yz,\ yz - xz)$ 이다 ┘ +10점



스토크스 정리에 의해,

$$\int_C \mathbb{F}\cdot ds = \iint_{\mathrm{int}C} \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot dS$$

$$= \iint_{\mathrm{int}C} (xz - xy,\ xy - yz,\ yz - xz)\cdot dS$$

여기서 intC 의 향은 (2,1,1) 방향이므로 구하는 식은 +5점

$$= \iint_{\mathrm{int}C} (xz - xy,\ xy - yz,\ yz - xz)\cdot \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}\, dS$$

$$= \iint_{\mathrm{int}C} (xz - xy)\frac{dS}{\sqrt{6}} = \iint_{\mathrm{int}C} (xz - xy)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{int}C} x(2 - 2x - 2y)\,dx\,dy.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r\cos\theta - 2r^2\cos^2\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$ ┘ +10점.

* 채점기준

① 스토크스 정리를 사용하기 위해 curl F 를 올바르게 계산시 +10점.

(스토크스 정리를 서술했더라도 curl F 의 계산이 없으면 점수를 부여하지 않음.)

② 향을 맞게 구했다고 판단되면 +5점.

③ 이후 계산의 오류가 없이 답을 도출하면 +10점,

(향이 틀린 경우, 점수 X).

(별해).

$F_1 = (yze^{xyz} + \sin x,\ xze^{xyz} + \cos y,\ xye^{xyz} + \sin^2 z)$

$F_2 = xyz(1,1,1)$ 이라 두면,

$F = F_1 + F_2$ 이다.

여기서, $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} - \cos x + \sin y + \dfrac{2z - \sin 2z}{4}$ 라 두면,

$\mathrm{grad}\,\varphi = F_1$ 이므로, 선적분의 기본정리에 의해

$\int_C F_1 \cdot ds = 0$ 이다. 따라서,

+10점

$\int_C F \cdot ds = \int_C F_2 \cdot ds = \int_C xyz\,dx + xyz\,dy + xyz\,dz.$

$z = 2 - 2x - y$ 이므로 $dz = -2dx - dy$ 를 활용하면,

$\int_C F \cdot ds = \int_C -xyz\,dx$ 이고 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2 - 2x - y$ 이므로

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t (2 - 2\cos t - \sin t)(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin^3 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\cos^2 t \sin^2 t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

+15점.

* 채점기준

① 선적분의 기본정리를 활용하여 계산을 간단히 하면 +10점.

② 이후 계산오류 없으면 +15점 (부분점수 X).