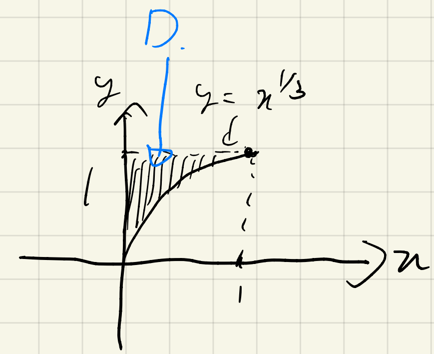
#1. $\int_0^1 \int_{x^{1/3}}^1 \sqrt{1+y^4}\, dy\, dx$



put $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in [0,1],\ \ x^{\frac{1}{3}} \leq y \leq 1 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \in [0,1],\ \ 0 \leq x \leq y^3 \}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{x^{1/3}}^1 \sqrt{1+y^4}\, dy\, dx = \iint_D \sqrt{1+y^4}\, dS = \int_0^1 \int_0^{y^3} \sqrt{1+y^4}\, dx\, dy$$

+15

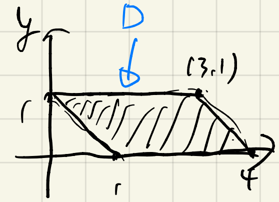
$\therefore$ by Fubini theorem.

$$= \int_0^1 y^3 \sqrt{1+y^4}\, dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{6} \quad \square$$

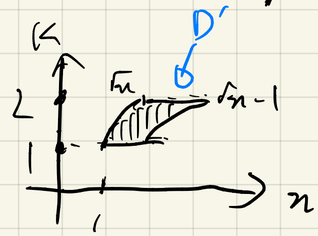
+5.

- 푸비니 정리 적용시, 적분 영역을 잘못 바꾸었으면 15점중 5점 감점. 이외의 부분점수 없음.
- 서술상 미흡한 부분이나 논리적인 gap이 있을 경우 추가 감점 있을 수 있음.

#2. $\int_0^1\int_{1-y}^{4-y} y\, e^{\sqrt{x+y}}\, dx\, dy$. Denote $f(x,y) = y\, e^{\sqrt{x+y}}$

put $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ y\in[0,1],\ 1-y\le x\le 4-y\}$ ($=$ 

)

$D' = \{(x,k)\in\mathbb{R}^2 ;\ k\in[1,2],\ k^2-1\le x\le k^2\}$ ($=$ 

)

and $\Phi : D' \to D : (x,k) \mapsto (x, k^2-x)$. (i.e., $x+y=k^2$) +10

$$\Rightarrow \int_0^1\int_{1-y}^{4-y} y\, e^{\sqrt{x+y}}\, dx\, dy = \iint_D f\, dS = \iint_{\Phi(D')} f\, dS = \iint_{D'} (f\circ\Phi)\cdot|\mathrm{Jac}\,\Phi|\, dS$$

by Fubini's theorem. by change of variable formula.

Note that $(f\circ\Phi)(x,k) = (k^2-x)\, e^k$ and $|\mathrm{Jac}\,\Phi| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 2k\end{matrix}\right| = 2k$. $\cdots$ (*) +5

$$\Rightarrow \iint_{D'} (f\circ\Phi)\cdot|\mathrm{Jac}\,\Phi|\, dS = \int_1^2\int_{k^2-1}^{k^2} (k^2-x)\, e^k \cdot 2k\, dx\, dk = \int_1^2 \left(2k^3 e^k - \left(k^4 - (k^2-1)^2\right) e^k\cdot k\right) dx$$

by Fubini theorem and (*)

$$= \int_1^2 k e^k\, dx = (k-1)e^k\Big|_{k=1}^{k=2} = e^2$$ +5.

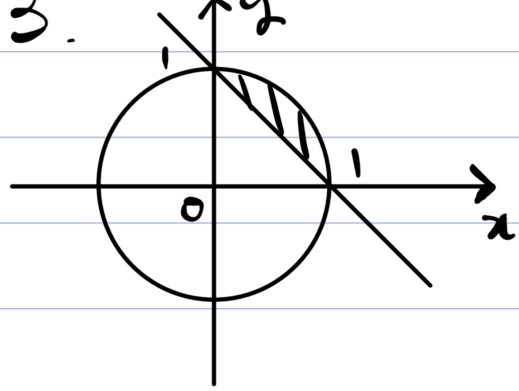
- 다른 치환, 혹은 반대 방향의 치환을 사용했어도 계산과 과정이 맞다면 대응되는 점수 인정.

- 치환하지 않고 $\int y e^{\sqrt{x+y}} dx = 2y(\sqrt{x+y}-1)e^{\sqrt{x+y}}$ 임을 이용해 풀었을 경우 계산실수가 없었다면 만점 부여.

- 명시된것 이외의 부분점수 없음.

- 서술상 미흡한 부분이나 논리적인 오류이 있을경우 추가 감점 있을 수 있음.

3.



영역의 넓이 $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(적분으로 구할 필요는 없음) : +5점

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x\left[\sqrt{1-x^2} - 1 - x\right] dx$$

$$= 1/6$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3(\pi-2)}$$

: 이처럼 $\bar{x}$ 나 $\bar{y}$를 잘 구하면 +10점

대칭성이나 직접계산을 통해

$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{3(\pi-2)}, \frac{2}{3(\pi-2)}\right)$를 얻음 : +5점

문제 4

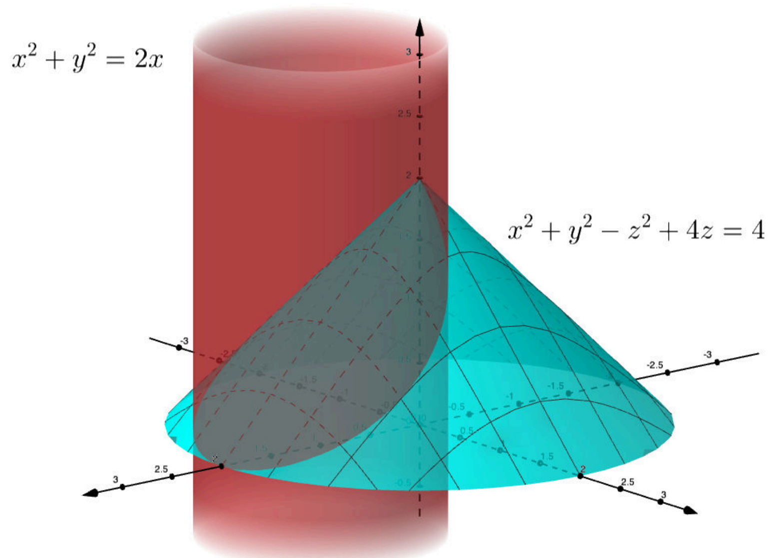
$$R = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2+4z \le 4,\ 0 \le z \le 2,\ x^2+y^2-2x \le 0\}$$

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2x \le 0\}$$

라 하면, 원기둥 좌표계 치환에 의해 구하는 부피는

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(R) &= \iiint_R 1\, dV_3 = \iint_D \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dV_2 \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{2-r} r\, dz\, dr d\theta = 2\pi - \frac{32}{9}\end{aligned}$$

이다.

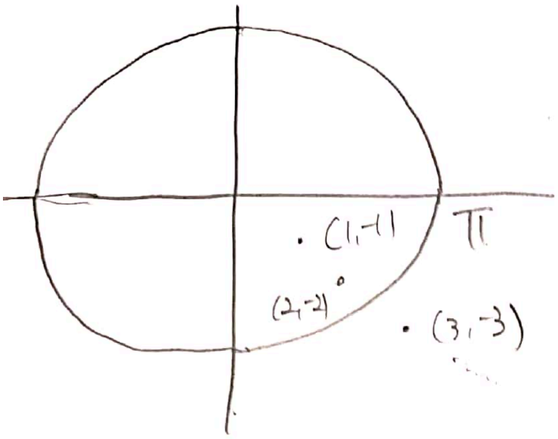


- 채점기준

- 원기둥 좌표계 치환을 이용하여 r, θ, z의 범위를 정확히 구하면 + 10점
- 올바른 범위를 이용하여 부피를 구하는 적분식을 정확히 구하면 + 5점
- 답을 정확히 구하면 + 10점
- 범위를 잘못 구했으나 잘못된 범위를 이용하여 부피 구하는 적분식을 정확히 명시한 경우 부분점수 5점, 이하 계산은 점수 없음

5.

$F_k(x,y)$는 $(k,-k)$를 중심으로 하는 각원소 벡터장에 $-$를 곱한 것과 같다.



$2\sqrt{2} < \pi < 3\sqrt{2}$

$k \geq 3$인 F_k는 S의 내부에서 잘 정의가 된다

$\mathrm{rot}\, F_k = 0$이므로 그린정리에 의해

$$\int_S F_k \cdot ds = \iint_{\mathrm{int}\, S} \mathrm{rot}\, F_k \, dV_2 = 0.$$

$k=1,2$ 일때는 F_k가 S의 내부에서 정의가 안되므로 그린정리를 적용할수 없다.

각원소 벡터장의 적분이 각변화량과 일치하므로

$$\int_S F_1 \cdot ds = \int_S F_2 \cdot ds = -2\pi \text{ 이다.}$$

$$\therefore \int_S F \cdot ds = \sum_{i=1}^{2021} \int_S F_i \cdot ds = -2\pi - 2\pi = -4\pi \text{ 이다.}$$

*채점기준.

① $k \geq 3$인경우 $\int_S F_k \cdot ds = 0$ 10점.

② $k=1,2$인경우 $\int_S F_k \cdot ds = -2\pi$ 15점.

감점요소.

• (3, −3) 이 S의 내부점이라고 판단해 K=3인 경우가 −2π라고 착각하여 답을 쓴 경우 −5 ((2, −2)가 외부에 있다고 한경우도 동일)

• 답의 부호가 틀린경우 −5

• 가우스 정리를 이용하거나 발산정리 이용한 경우 0점.

• 가우스 정리를 이용하거나 발산정리 이용한 경우 0점.
단 벡터장을 90° 회전하여 가우스정리를 쓸수 있는 꼴로 바꾼뒤 이용하는 경우
①, ② 기준 적용.

문제 6 y-축 주위로 회전시켜 얻은 곡면의 매개화는

$$X(t,\theta) = \big((t-\sin t)\cos\theta, 1-\cos t, (t-\sin t)\sin\theta\big) \quad (0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

이므로

$$X_t(t,\theta) = \big((1-\cos t)\cos\theta, \sin t, (1-\cos t)\sin\theta\big)$$
$$X_\theta(t,\theta) = \big(-(t-\sin t)\sin\theta, 0, (t-\sin t)\cos\theta\big)$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} dS &= |X_t \times X_\theta|\, dt\, d\theta \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos t)\cos\theta & \sin t & (1-\cos t)\sin\theta \\ -(t-\sin t)\sin\theta & 0 & (t-\sin t)\cos\theta \end{pmatrix}\right| dt\, d\theta \\ &= (t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt\, d\theta \end{aligned}$$

이므로

$$\text{Area}(X) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt\, d\theta = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} 2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\, dt = 16\pi^2$$

를 얻는다.

- 채점기준

\- 곡면의 매개화 +5점, 면적소 +5점, 넓이를 나타내는 적분식 +5점, 답 +5점
\- 공식을 직접 이용한 경우, 공식 +10점, 답 +10점

#7. $x^2+y^2=4z-z^2$ 이므로 주어진 조건을 잘 분석하면

$z\geq 3$, $x^2+y^2=4z-z^2$ 에서 $z\leq 3$ 을 얻는다.

따라서 주어진 곡면 S를 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$X(z,\theta)=\left(\sqrt{4z-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{4z-z^2}\sin\theta,\ z\right),\quad 3\leq z\leq 4,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

한편,
$$X_z=\frac{\partial X}{\partial z}=\left(\cos\theta\cdot\frac{2-z}{\sqrt{4z-z^2}},\ \sin\theta\frac{2-z}{\sqrt{4z-z^2}},\ 1\right),$$

$$X_\theta=\frac{\partial X}{\partial\theta}=\left(-\sin\theta\sqrt{4z-z^2},\ \cos\theta\sqrt{4z-z^2},\ 0\right)$$

이므로 $X_z\times X_\theta=\left(-\cos\theta\sqrt{4z-z^2},\ -\sin\theta\sqrt{4z-z^2},\ 2-z\right)$

이고, 따라서 $dS=|X_z\times X_\theta|\,dz\,d\theta=2\,dz\,d\theta$ 를 얻는다. +10

이제 이 매개화를 이용하여 주어진 적분을 계산해보자.

$$\iint_S x^2+y^2\,dS=\iint_S 4z-z^2\,dS$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_3^4(4z-z^2)\cdot 2\,dz\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[4z^2-\frac{2}{3}z^3\right]_{z=3}^{z=4}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}28-\frac{2}{3}\cdot 37\,d\theta$$

$$=\frac{20}{3}\pi.$$ +10.

〈채점 기준〉

- 면적소를 잘 계산하면 +10.
- 적분을 잘 계산하면 +10.
- 이 외에는 점수를 부여하지 않음.

#7 (별해). 구면좌표계를 이용하여 매개화를 해보자.

$x = 2\sin\varphi\cos\theta,\quad y = 2\sin\varphi\sin\theta,\quad z = 2\cos\varphi + 2$

한편, $2\cos\varphi + 2 = z \geq x^2+y^2 = 4\sin^2\varphi = 2(1-\cos 2\varphi)$ 으로부터

$4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 2 = 2(2\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + 1) \geq 0$ 을 얻는다.

즉, $\cos\varphi \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 이다.

이를 종합해보면,

$$X(\varphi,\theta) = (2\sin\varphi\cos\theta,\ 2\sin\varphi\sin\theta,\ 2\cos\varphi + 2),\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3},\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

로 주어진 곡면을 매개화 할 수있다.

이제 면적소를 구해보자.

$$X_\varphi = (2\cos\varphi\cos\theta,\ 2\cos\varphi\sin\theta,\ -2\sin\varphi),$$

$$X_\theta = (-2\sin\varphi\sin\theta,\ 2\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$\Rightarrow\ X_\varphi \times X_\theta = (4\sin^2\varphi\cos\theta,\ 4\sin^2\varphi\sin\theta,\ 4\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$\therefore\ dS = |X_\varphi \times X_\theta|\, d\varphi d\theta = 4\sin\varphi\, d\varphi d\theta \qquad (\sin\varphi \geq 0)$$ +10

이를 이용하여 주어진 적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\iint_S x^2+y^2\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2\varphi \cdot 4\sin\varphi\, d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 16\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\left(\frac{-11}{24} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) d\theta$$

$$= \frac{20}{3}\pi.$$ +10

#7 (별해 2) $z \geq x^2+y^2 \Rightarrow 3 \leq z \leq 4$ (1번 풀이 참고)

곡면을 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$X(x,y) = \left(x, y, 2+\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right) \qquad x^2+y^2 \leq 3$$

$$X_x = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right), \quad X_y = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow X_x \times X_y = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$\therefore dS = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy.$$ +10

$$\iint_S x^2+y^2\,dS = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r^3}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_2^1 2(t^2-4)\,dt\,d\theta$$

$$\left(t=\sqrt{4-r^2},\ dt = \frac{-r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{1}{3}t^3-4t\right)\Big|_{t=2}^{t=1}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{10}{3}\,d\theta$$

$$= \frac{20}{3}\pi$$ +10

#7 (별해3) 영역 R : $x^2+y^2+z^2 \le 4z$, $3 \le z \le 4$ 과

곡면 S' : $x^2+y^2=3$, $z=3$ (향은 $\mathbb{n}' = (0,0,-1)$로 주어진다.) 을 생각하자.

그러면 $\partial R = S + S'$ 이 된다. (S의 향은 $\mathbb{n} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z-2}{2}\right)$로 주어진다)

한편, 벡터장 $\mathbb{F} = (2x, 2y, 0)$ 을 생각해보면

$$\mathbb{F}\cdot\mathbb{n} = (2x, 2y, 0)\cdot\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = x^2+y^2$$

이고 따라서 발산정리를 이용하여 주어진 적분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

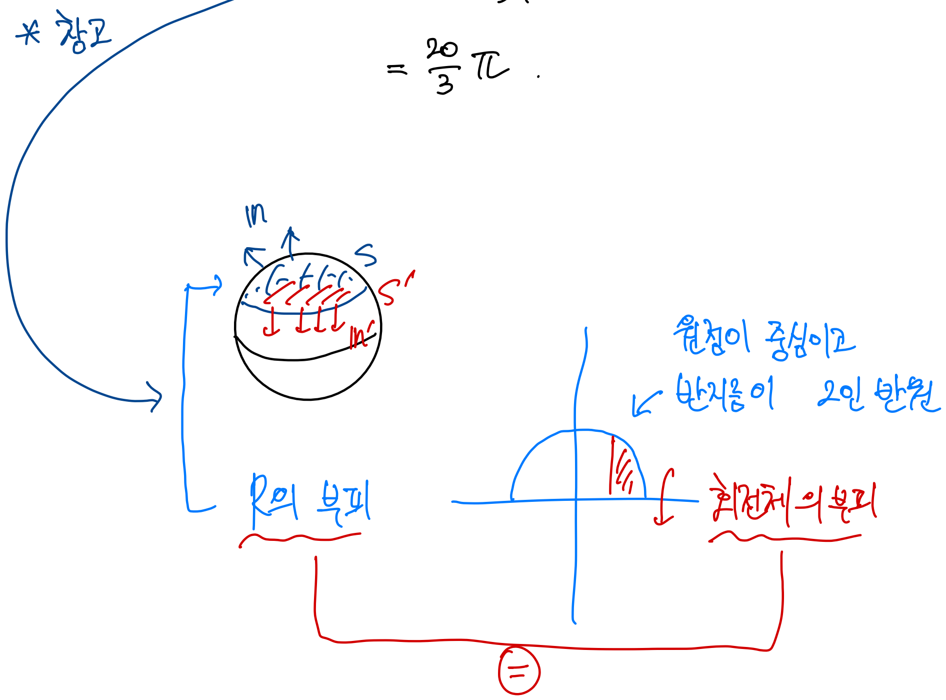
$$\iint_S x^2+y^2\, dS = \iint_S \mathbb{F}\cdot\mathbb{n}\, dS$$

$$= \iiint_R \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{F}}_{=4}\, dV_3 - \iint_{S'} \underbrace{\mathbb{F}\cdot\mathbb{n}'}_{=0}\, dS$$

$$= \iiint_R 4\, dV_3$$

$$= 4\int_1^2 \pi(4-x^2)\, dx$$

$$= \frac{20}{3}\pi.$$



· 발산정리를 잘 적용하면 +10.

· 부피 계산을 잘 하면 +10.

8번 문제 모범답안

$\operatorname{div} F(x,y,z) = 2z + x^2 - x^2 = 2z$ 이므로 발산정리에 의해 +5

$$\iint_{\partial R} F \cdot ds = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R 2z \, dx\,dy\,dz$$ +10

임을 알 수 있다.

이제 원기둥 좌표계를 이용해서 계산해보면 다음과 같은 값을 얻는다.

$x^2+y^2 \le 1+3z^2$

$\Updownarrow$

$r^2 \le 1+3z^2$.

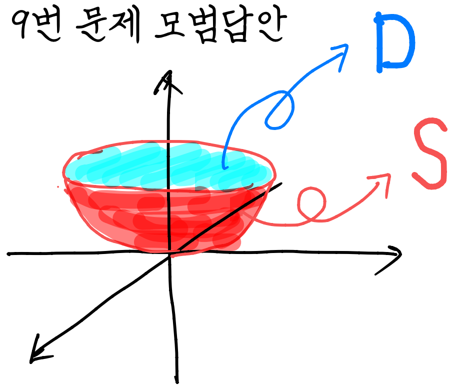
$$\iiint_R 2z \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+3z^2}} 2z \, r\,dr\,dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z(1+3z^2)\,dz\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{4}z^4\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\pi.$$ +10

계산과정 잘못되면 부분점수 없음

9번 문제 모범답안



D: $z=9$, $x^2+4y^2\le 9$.

D의 향을 S의 향과 일치시키기 위해 D의 단위 법벡터를 (0,0,−1)로 잡자. +10 (향)

$\partial D = \partial S$ 이고 향이 일치하므로 스토크스 정리에 의해 +5

$$\iint_S \mathrm{curl}\, H\cdot ds = \iint_D \mathrm{curl}\, H\cdot ds \text{ 이다.}$$

이때, $\frac{\partial}{\partial x}\left((z-9)e^x\sin^3 y+(z+1)z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((z-9)x^2e^z+(z+1)y\right) = e^x(z-9)\sin^3 y-(z+1)$

이므로 $\iint_S \mathrm{curl}\, H\cdot ds = \iint_D \mathrm{curl}\, H\cdot ds = -\iint_D e^x(z-9)\sin^3 y-(z+1)\,dxdy$

$= -\iint_D -10\,dxdy = 10\cdot \mathrm{Area}(D) = 10\times\frac{9}{2}\pi = 45\pi$ 를 얻는다. +10 계산과정 잘못되면 부분점수 없음

$z=9$

Sol 2) $\iint_S \mathrm{curl}\, H\cdot ds = \int_{\partial S} H\cdot ds$ +5 $\quad\partial S$: $X(\theta) = \left(3\cos(2\pi-\theta), \frac{3}{2}\sin(2\pi-\theta), 9\right)$ +10

, $0\le\theta\le 2\pi$ 로 두면, $\int_{\partial S} H\cdot ds = \int_0^{2\pi} 10\left(-\frac{3}{2}\sin\theta, 9, 8\cos\theta\right)\cdot\left(-3\sin\theta, -\frac{3}{2}\cos\theta, 0\right)d\theta$

$= 10\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\sin^2\theta - \frac{27}{2}\cos\theta\, d\theta = 10\cdot\frac{9}{4}\cdot 2\pi = 45\pi$. +10 계산과정 잘못되면 부분점수 없음