1.

(a)

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \cdot x$$

이므로,

$$|f(x,y)| \le |x|$$

이다. 따라서 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$이므로, f는 원점에서 연속이다. (**5점**)

(b)

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (1,0)$$

(**5점**)

(c)

1) 풀이 1

함수 f가 원점에서 미분가능하려면

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) - \operatorname{grad} f(\mathbf{0})\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 0$$

이 성립해야 한다. (+**4점**) 그러나 $\mathbf{v} = (a,b)$라 놓을 때,

$$\frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) - \operatorname{grad} f(\mathbf{0})\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{-ab^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

이므로 일반적으로 $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$일 때 0으로 수렴하지 않는다. 예를 들어, $a = b$인 경우를 계산해보면

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

이다. 따라서 f는 원점에서 미분가능하지 않다. (+**6점**)

2) 풀이 2

함수 f가 원점에서 미분가능하면 임의의 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$에 대하여

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \mathbf{v} = (1,0)\cdot\mathbf{v}$$

가 성립해야 한다. (+**4점**) 그러나 $\mathbf{v} = (1,1)$인 경우를 보면,

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{2} \neq 1 = (1,0)\cdot\mathbf{v}$$

이다. 따라서 f는 원점에서 미분가능하지 않다. (+**6점**)

[**채점기준**]

- (a)는 부분점수 없음. 올바른 풀이로 연속이라는 결론을 얻어야만 **5점**
- (b)는 $\operatorname{grad} f(0,0)$을 제대로 계산했으면 **5점**

- (c)는 미분가능하기 위해 성립해야 하는 조건을 제대로 썼을 때 **4점** 부여. 그 이후의 미분가능하지 않다는 결론까지의 풀이에 **6점**.
- (a)에서, 원점으로 접근하는 직선경로만을 고려하거나, 단순히 $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$이라고만 한 경우에는 0점. 그러나 $-r \le f(r\cos\theta, r\sin\theta) \le r$과 같은 언급을 포함할 시 5점.
- (c)에서, $\operatorname{grad} f(0,0)$을 잘못구했으나 f가 미분가능하면 $D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \mathbf{v}$가 성립해야 한다는 식의 서술을 포함했으면 4점 부여.

2. (a) $\sinh x \cos y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} \right)$

이므로, $\sinh x \cos y$ 의 3차 근사다항식은 $x - \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ 이다.

(b) 3차 근사다항식의 성질에 의해, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - T_3 f(x,y)|}{x^2+y^2} = 0$ 이 성립한다.

따라서 (a)의 결과에 의해 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(x - \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)}{x^2+y^2} = 0$ 이다.

한편 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^3 \cos\theta \sin^2\theta}{2!} - \frac{r^3 \cos^3\theta}{3!}}{r^2}$

$(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$

$= \lim_{r\to 0} r \left(\frac{\cos\theta \sin^2\theta}{2!} - \frac{\cos^3\theta}{3!} \right)$

$= 0$

이므로, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{x^2+y^2} = 0$ 이다. +5

2(a) : 부분점수 없음.

2(b) : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - T_3 f(x,y)|}{x^2+y^2} = 0$ 임을 작성하면 +3.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}{x^2+y^2} = 0$ 임을 엄밀하게 보이면 +5 ($\frac{xy^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} = o(x^2+y^2)$ 을 보이지 않으면 0점)

2 (b) 별해: (a) 에서의 결과에 의해, $f(x,y)$ 의 2차근사 다항식은 ㄱ이다.

따라서 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2 f(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)} \frac{f(x,y) - ㄱ}{x^2+y^2} = 0$ 이다.

문제 3. [15점] [**단답형**] 함수 $f(x,\ y) = x^3 - 2x^2 + xy^2$의 임계점을 모두 구하고, 예시를 참고하여 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

예시: $\boxed{\text{임계점: } (a,\ b)\text{, 분류: 안장점}}$

Solution) 점 $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$가 f의 임계점이라면 $\operatorname{grad} f = (3a^2 - 4a + b^2,\ 2ab) = (0,\ 0)$이다.
$\Rightarrow (a,\ b) = (0,\ 0)$ 또는 $(a,\ b) = \left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$이다.

1) $(a,\ b) = (0,\ 0)$일 때

f의 $(0,\ 0)$에서의 헤세 행렬은 $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로, 헤세 판정법을 적용할 수 없다.

f의 정의역을 $|y| = \sqrt{2x}$로 제한했을 때, $(0,\ 0)$은 f의 극소점이다.

$\Rightarrow (0,\ 0)$은 f의 안장점이다.

2) $(a,\ b) = \left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$일 때

f의 $(a,\ b) = \left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$에서의 헤세 행렬은 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$이므로, 헤세 판정법에 의해 $(a,\ b) = \left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$은 f의 극소점이다.

$\therefore$정답은 다음과 같다.

임계점: $(0,\ 0)$, 분류: 안장점-8점
임계점: $\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$, 분류: 극소점-7점

*정답을 모두 언급했으나 추가로 잘못된 임계점을 언급한 경우 하나당 -5점.

#4.

〈 모범답안 〉

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$g(x,y,z) = x^2y - z$$

S를 g의 $\frac{1}{4}$-등위면이라 하자.

(미적분학 2^+ 11장 6절 소단원 6.3 에 의해 S 위에서의 f의 최솟값이 존재한다.)

$$\text{grad}\, g = (2xy,\ x^2,\ -1)$$

$$\text{grad}\, f = (2x,\ 2y,\ 2(z-1))$$

$\text{grad}\, g \neq 0$ 이므로 라그랑주 승수법에 의해 S 위에서의 f의 극점 P는

$$\lambda\, \text{grad}\, f(P) = \text{grad}\, g(P)$$

를 만족한다. 즉,

$$\lambda(2x,\ 2y,\ 2(z-1)) = (2xy,\ x^2,\ -1)$$

을 만족한다.

$$\Rightarrow \begin{cases} ⓐ\ \lambda 2x = 2xy \\ ⓑ\ \lambda 2y = x^2 \\ ⓒ\ \lambda 2(z-1) = -1 \end{cases}$$

f (0

ⓐ로부터 $x=0$ 또는 $y=\lambda$ 두 가지 경우를 얻는다.

Case 1) $x=0$

ⓑ에 의해 $\lambda=0$ 또는 $y=0$

그런데 grad $g \neq 0$ 이므로 (또는 ⓒ에 의해) $\lambda \neq 0$.

$\therefore y=0$

$\therefore$ 극점은 $(0, 0, -\frac{1}{4})$ $+3$

$\therefore f(0, 0, -\frac{1}{4}) = \frac{25}{16}$ $+2$

Case 2) $y=\lambda$

ⓑ $\Rightarrow$ $x^2 = 2\lambda^2$

ⓒ $\Rightarrow$ $z = 1 - \frac{1}{2\lambda}$

$\therefore f(x, y, z) = 2\lambda^2 + \lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} = 3\lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} \geq \sqrt{3}$ (산술기하)

그런데 $\sqrt{3} > \frac{25}{16}$ 이므로 f의 최솟값은 $\frac{25}{16}$ 이다.

따라서 구하고자 하는 거리는 $\frac{5}{4}$ 이다. $\square$

〈 부분점수 〉

$\boxed{1}$ Case 2 에서 $\lambda = \frac{1}{2}$ 일 때의 극점 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right)$ 을 구하면 +3 점

$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{7}{4}$ 임을 올바르게 구하면 + 2점

$8\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$ 의 근 λ에 해당하는 극점 P에 대해

$f(P) > \frac{25}{16}$ 임을 논리적으로 보이면 + 5점

$\boxed{2}$ $f(x, y) = x^2 + y^2 + \left(x^2 y - \frac{5}{4}\right)^2$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ 의 아이디어 + 5 점

$\Rightarrow$ 이후 임계점들에 대한 점수 모범답안과 동일하게 부여

〈 감점요인 : − 2점 〉

* 마지막에 $\sqrt{\ }$ 안 씌움
* $\frac{25}{16}$과 $\frac{7}{4}$ 중에서 $\frac{7}{4}$를 선택
* 라그랑주 승수법 비례식에서의 작은 실수 (예) x^2 대신 x, $z-1$ 대신 z)

문제 5. [20점] **[단답형]** 좌표평면에서 정의된 일급함수 $f(x,y)$, $g(x,y)$가 두 점 $P=(1,2), Q=(1,3)$에 대해 다음 표의 내용을 만족한다.

X	$f(X)$	$D_1f(X)$	$D_2f(X)$	$g(X)$	$D_1g(X)$	$D_2g(X)$
P	2	-3	1	3	-3	2
Q	3	-1	-2	4	2	1

이때, 점 P에서 함수 $F(x,y) = \big(x, f(x, g(x,y))\big)$의 야코비 행렬을 구하시오.

<Ans> (단답형 문제로 정확히 정답의 일치만을 기준으로 20점을 부여합니다.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

<Sol> (학습의 도움을 위해 풀이를 올립니다만 단답형인 관계로 채점에는 반영되지 않습니다.)

주어진 함수 F는 $F: (x,y) \mapsto (x, g(x,y)) \mapsto (x, f(x, g(x,y)))$ 이므로

$H: (x,y) \mapsto (x, g(x,y))$ & $G: (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$의 합성함수 즉, $F = G \circ H$로 볼 수 있다.

$H(x,y) = (x, g(x,y))$

$G(x,y) = (x, f(x,y))$

chain rule (연쇄법칙) $\quad H(1,2) = (1, g(1,2)) = (1,3)$

따라서, $F'(P) = F'(1,2) = (G \circ H)'(1,2) = G'(H(1,2))\,H'(1,2) = G'(1,3)\,H'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_1f(1,3) & D_2f(1,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_1g(1,2) & D_2g(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

문제 6. [15점] **[단답형]** 곡선

$$X(t) = (2 + \cos(3t),\ 4,\ 1 + \sin(3t)), \quad (0 \le t \le \pi)$$

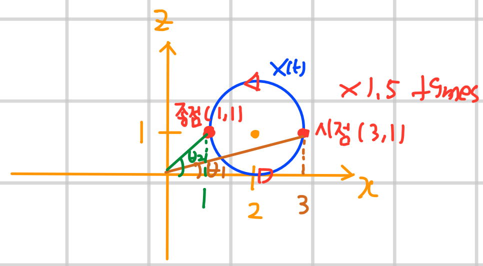
에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_X \frac{yz}{x^2+z^2}dx - \frac{xz}{x^2+z^2}dy - \frac{xy}{x^2+z^2}dz$$

<Ans> ← (단답형 문제로 정확한 정답의 일치만을 기준으로 15점을 부여합니다)

$4\arctan\frac{1}{3} - \pi$ ((cf) $4\arctan 2 - 2\pi$, $-4\arctan\frac{1}{2}$, $\pi - 4\arctan 3$, $-4\arccos(2/\sqrt{5})$ 등 같은 값이 나오는 경우 정답처리함)

$\left(-\frac{z}{x^2+z^2}, \frac{x}{x^2+z^2}\right)$는 원점을 중심으로 하는 각원소벡터장 &



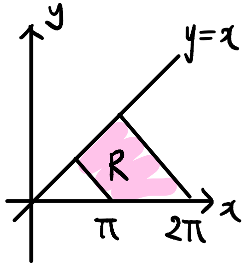
<Sol> ← (학습의 도움을 위해 풀이를 올립니다만 단답형인 관계로 채점에는 반영되지 않습니다.)

$$\int_X \frac{yz}{x^2+z^2}dx - \frac{xz}{x^2+z^2}dy - \frac{xy}{x^2+z^2}dz = \int_X \frac{4z}{x^2+z^2}dx - \frac{4x}{x^2+z^2}dz = -4\int_X -\frac{z}{x^2+z^2}dx + \frac{x}{x^2+z^2}dz = -4\left(\underbrace{\arctan 1}_{\theta_2} - \underbrace{\arctan\tfrac{1}{3}}_{\theta_1}\right) = 4\arctan\frac{1}{3} - \pi.$$

$y = 4$ & $dy = 0$

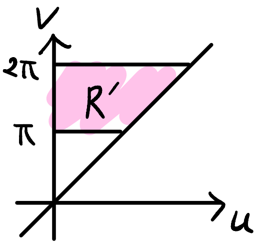
$X(t) = (2+\cos(3t), 4, 1+\sin(3t))$, $(0 \le t \le \pi)$

#7.



$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$$ +4

①



$\pi \le x+y \le 2\pi$ ⇝ $\pi \le v \le 2\pi$

$0 \le y \le x$ ⇝ $0 \le \frac{v-u}{2} \le \frac{v+u}{2} \Leftrightarrow 0 \le u \le v$

② +4

* 치환이 다른 경우 타당성에 따라 ①~④ 점수 부여

$$\iint_R \sin\frac{\pi(x-y)}{x+y}\,dx\,dy = \iint_{R'} \sin\frac{\pi u}{v}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right|^{-1} du\,dv$$

③ +8

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^v \sin\frac{\pi u}{v}\,du\,dv$$

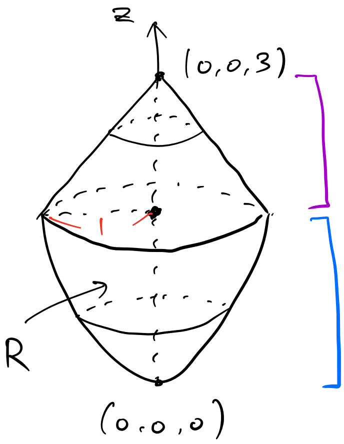
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left[-\frac{v}{\pi}\cos\frac{\pi u}{v}\right]_0^v dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2v}{\pi}\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}(4\pi^2-\pi^2) = \frac{3}{2}\pi$$

④ +4

8. $x^2+y^2-z-1=0$, $x^2+y^2-z^2+6z-9=0$ 이 둘러싼 영역의 중심?



$\boxed{\text{풀이}}$ 주어진 영역을 R 이라 하자. 그러면

대칭성에 의해 $\bar{x}=0=\bar{y}$ 이다. (4점)

또 $\mathrm{Vol}_3(R)=\iiint_R dV_3=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+r^2}^{3-r} r\,dz\,dr\,d\theta$

$$=2\pi\int_0^1 r\cdot(2-r-r^2)\,dr=\frac{5}{6}\pi.$$ (8점)

$$\iiint_R z\,dV_3=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+r^2}^{3-r} rz\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^1 r\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{1+r^2}^{3-r}dr$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r}{2}\cdot\left((3-r)^2-(1+r^2)^2\right)dr=\pi\int_0^1(8r-6r^2-r^3-r^5)\,dr$$

$$=\frac{19}{12}\pi.$$ (8점)

$$\therefore\ \bar{z}=\frac{1}{\mathrm{Vol}_3(R)}\iiint_R z\,dV_3=\frac{6}{5\pi}\cdot\frac{19}{12}\pi=\frac{19}{10},$$

중심 $=(0,0,\frac{19}{10})$ (총 20점)

문제 9. 풀이 1.

곡선 C'를 $C': x(t) = t \quad 0 \le t \le 2$. 라고 두자.

그러면 그린 정리에 의해, $F(x,y) = (x+e^x \sin y,\ x+e^x \cos y)$

라고 할때 다음이 성립한다.

$$\int_{C \cup C'} (x+e^x \sin y)\,dx + (x+e^x \cos y)\,dy$$

$$= \iint_{int(C \cup C')} \operatorname{rot} F \, dS$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \, dr\, d\theta \quad ① \quad (\because \operatorname{rot} F = 1)$$

$$= \frac{3}{4}\pi \quad ②$$

또한,

$$\int_{C'} (x+e^x \sin y)\,dx + (x+e^x \cos y)\,dy$$

$$= \int_0^2 t \, dt = 2$$

이므로

$$\int_C (x+e^x \sin y)\,dx + (x+e^x \cos y)\,dy$$

$$= \frac{3}{4}\pi - 2 \quad ③$$

이다.

· 그린정리를 이용해서 ② 까지 잘 구하면 10점.
계산 실수가 있는 경우 ① 까지의 식을 옳고
적분 범위 (특히 $0 \le r \le 1+\cos\theta$) 를 잘
쓰면 5점 그 외에 0점.

· 곡선 C'를 언급해주면 5점.
(단 올바르게 매개화 해야 함).

· ③ 에서 최종 적분값을 $\iint_{int(C \cup C')} \operatorname{rot} F\, ds - \int_{C'} F \cdot ds$ 꼴로 썼으면 5점.

· $\int_{C'} F \cdot ds$ 를 구하는 과정에서 실수가 있으면
2점 혹은 5점 감점. (5점 감점 한 경우는
아예 매개화 부터 잘못된 경우).

문제9. 별해. 풀이 2.

$$\int_C (x+e^x\sin y)\,dx + (x+e^x\cos y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_C x\,dx}_{①} + \underbrace{\int_C e^x\sin y\,dx + e^x\cos y\,dy}_{②} + \underbrace{\int_C x\,dy}_{③}$$

이때 $\operatorname{grad}\frac{1}{2}x^2 = (x,0)$, $\operatorname{grad}(e^x\sin y) = (e^x\sin y,\ e^x\cos y)$

이므로, 선적분의 기본정리에 의해

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_{(x,y)=(2,0)}^{(x,y)=(0,0)} + e^x\sin y\Big]_{(x,y)=(2,0)}^{(x,y)=(0,0)} + \int_C x\,dy$$

$$= -2 + \int_C x\,dy$$

한편, $\int_C x\,dy =$

$$= \int_0^\pi (0,\ (1+\cos\theta)\cos\theta)\cdot\underbrace{\left(\frac{d}{d\theta}(1+\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\right)}_{=(\cdots,\ \underbrace{-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta}_{=2\cos^2\theta-1+\cos\theta})}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi (\cos\theta+\cos^2\theta)(2\cos^2\theta-1+\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi 2\cos^4\theta + \underbrace{3\cos^3\theta - \cos\theta}_{\longrightarrow 0.}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi 2\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos^2 2\theta}{2} + \cos 2\theta + \frac{1}{2}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos 4\theta}{4} + \cos 2\theta + \frac{3}{4}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\pi.$$

따라서 구하고자 하는 값은 $\frac{3}{4}\pi - 2$.

① 5점. 계산실수 0점.

② 5점 값이 0이 나오는거 아니면
그냥 0점.

③ 10점. "$\int_C x\,dy$ = 넓이" 임을 언급하고.
계산실수하면 5점.
아무언급없이 계산실수하면 0점.

풀이 1에서 $\mathrm{rot}\, F$ 대신 $\mathrm{div}\, F$를 쓴 경우

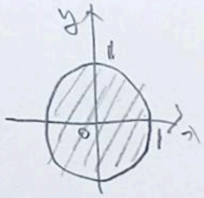
법선벡터를 명확히 언급해주지 않으면 ① + ②에

해당하는 부분에서 점수 없음.

풀이 2에서는 곡선 C'의 언급은 점수에 영향이

없음.

10



$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

$$\int_{\partial S} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_S \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV_2 \quad (\because \text{발산정리}) \quad +5 \quad ①$$

$$= \iint_S (x^2+y^2)^2\, dV_2 \quad (\because \operatorname{div} \mathbb{F} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \quad +5 \quad ②$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2)^2 \cdot r\, dr\, d\theta \quad +5 \quad ③$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6} r^6\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} \quad +5 \quad ④$$

《각 단계별 점수 부여 방식》

① ※ 발산정리를 언급만 하고 식은 세우지 않은 경우는 0점.

② ※ divF 를 제대로 구한 경우, 잘못 대입했더라도 5점 부여.

③ ※ 다중적분에서 극좌표로 치환할 때 rdrdθ에서 r을 빼먹은 경우 0점

④ ※ 중간 사소한 계산과정에서의 실수는 정답이 맞으면 5점 부여.
계산이 아예 맞지 않으면 0점 부여

[별해] $\vec{F}_{(x,y)} = \left(xy^4 + \frac{2}{3}x^3y^2,\ x^4y\right)^T$

① 단순 선적분

준 곡선을 매개화 하면 $c(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$ 로
볼 수 있다. 한편 밖으로 나가는 flux를 계산해야 하므로
준 flux는

$$\Phi = \int_c \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \vec{F}_{(\cos t,\sin t)}\cdot\vec{n}\,ds$$ 에서,

$\vec{n}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \pm\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)^T$ 이므로, $\vec{n}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \pm(\cos t, \sin t)^T$ 이다. flux 계산시
향이 바깥이어야 하므로 $\vec{n}\left(\frac{ds}{dt}\right) = (\cos t, \sin t)^T$ 이다.

$$\therefore \Phi = \int_0^{2\pi} \vec{F}_{(\cos t,\sin t)}\cdot\left(\vec{n}\frac{ds}{dt}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\cos t(\sin t)^4 + \frac{2}{3}(\cos t)^3(\sin t)^2,\ (\cos t)^4\sin t\right)^T\cdot(\cos t, \sin t)^T dt$$

↳ 올바른 선적분 표현 시 $\boxed{+10}$ (x, y로 표현도 OK)

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t(\sin t)^4 + \frac{2}{3}\cos^4 t\sin^2 t + \cos^4 t\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\left(\sin^2 t + \frac{5}{3}\cos^2 t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos t\sin t)^2\left(1 + \frac{2}{3}\cos^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2\left(1 + \frac{1+\cos 2t}{3}\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)\left(\frac{4+\cos 2t}{3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} 4 + \cancel{\cos 2t}^{\,0} - 4\cancel{\cos 4t}^{\,0} - \cos 4t\cos 2t\,dt = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\cos 4t\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{48}\int_0^{2\pi}\cancel{\cos 6t}^{\,0} + \cancel{\cos 2t}^{\,0}\,dt = \frac{\pi}{3}$$ 이다.

↳ 계산 정확 시 추가로 $\boxed{+10}$

② Green 정리 사용

$\vec{n}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)^T$ 이므로, (바깥 방향). $\vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right)^T$ 로
두면.

$$\therefore \Phi = \int_c \vec{F}\cdot\left(\vec{n}\frac{ds}{dt}\right)dt = \int_c (P, Q)^T\cdot\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)^T dt$$

$$= \int_c P\,dy - Q\,dx$$ 이므로, 원판을 $D: x^2+y^2 \le 1$ 로 둘 때

$C = \partial D$ 이므로, Green 정리에 의해 $\vec{F}^* := \left(-Q_{(x,y)}, P_{(x,y)}\right)^T = \left(-x^4y,\ xy^4 + \frac{2}{3}x^3y^2\right)^T$
로 두면

올바르게 Green 정리 사용 시 (+10) (rot($\vec{F}^*$) 대신 rot($\vec{F}$)를 쓴 경우 0점)

$$\therefore \Phi = \iint_D \mathrm{rot}(\vec{F}^*)\,dxdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(P) - \frac{\partial}{\partial y}(-Q)\,dxdy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdy$$

$$= \iint_D \mathrm{div}(\vec{F})\,dxdy = \iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}$$ 이다 (+10)

↳ 계산 정확 시

수학2 기말고사 11번 모범답안 및 채점기준

[모범답안]

(a) 매개화 : $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$ $(0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$

$$\Rightarrow X_r = (\cos\theta, \sin\theta, -2r),\ X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{N} := X_r \times X_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$$
$$\Rightarrow |\boldsymbol{N}| = |X_r \times X_\theta| = r\sqrt{4r^2+1}.$$

따라서

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(S) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}} 1 dV_2 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}drd\theta & \cdots(*) \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi
\end{aligned}$$

(b) 위와 같은 매개화에 의해

$$\begin{aligned}
\bar{z}\mathrm{Area}(S) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}} z dV_2 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\sqrt{4r^2+1}drd\theta & \cdots(**) \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{80}(4r^2+1)^{5/2} + \frac{5}{48}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= \frac{25\sqrt{5}-11}{60}\pi
\end{aligned}$$

[채점기준]

-(a) 매개화 : 3점, $|\boldsymbol{N}|$: 2점, 적분계산 식 (*) : 3점, 답 : 2점

-(b) 적분계산 식 (**) : 5점, 답 : 5점

-모범답안과 다른 매개화를 사용한 경우도 같은 채점기준 사용

-매개화를 따로 적지 않고 그래프 곡면의 면적소 공식을 쓴 경우 등 $|\boldsymbol{N}|$을 올바르게 구한 경우 매개화 점수도 인정

12. [25점] 좌표평면의 영역 U에서 정의된 일급함수 $z = f(x, y)$에 대하여, f의 그래프로 주어진 삼차원 좌표공간의 곡면

$$z = f(x, y), (x, y) \in U$$

을 S라 할 때, 다음 물음에 답하시오. 단, 곡면 S의 향은$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 을 만족하도록 정하며, 곡면 S의 향은 점 $(0, 0, 0)$을 포함하지 않는다.

(a) (10점) 다음 면적분을 U에서의 적분으로 표현하시오

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

단, $\mathbf{A}(x, y, z) = \dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$는 원점을 제외한 삼차원 좌표공간에서 정의된 입체각 벡터장이다.

(b) (15점) 좌표평면의 영역 $x^2 + y^2 \leq 4$를 D라 할 때, (a)를 이용하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 4}{(x^2 + y^2 + (4 - x^2 - y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$$

(풀이)

(a) 곡면 S를 $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$로 매개화 하자. 이때 법선벡터 $\mathbf{N} = X_x \times X_y = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y.1)$를 구할 수 있다.

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_U \mathbf{A}(x, y, f(x, y)) \cdot \mathbf{N}\, dV_2 \tag{1}$$

$$= \iint_U \frac{(x, y, f(x, y))}{(x^2 + y^2 + f(x, y)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)\, dV_2 \tag{2}$$

$$= \iint_U \frac{-xf_x(x, y) - yf_y(x, y) + f(x, y)}{(x^2 + y^2 + f(x, y)^2)^{\frac{3}{2}}} dV_2 \tag{3}$$

(b) (a)의 식에서 $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$일 때, $f_x = -2x$, $f_y = -2y$이므로 $-xf_x(x, y) - yf_y(x, y) + f(x, y) = 4 + x^2 + y^2$ 이므로

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 4}{(x^2 + y^2 + (4 - x^2 - y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

가 성립한다.

이때 S는 $\{(x, y, 4 - x^2 - y^2) \mid \; x^2 + y^2 \leq 4\}$이라는 곡면으로 주어지고 이 곡면의 입체각 벡터장의 면적분은 이 곡면의 입체각과 동일한데, 해당 영역은 $z \geq 0$인 모든 단위구의 영역으로 사영되므로 입체각이 2π임을 알 수 있다. 즉, $\displaystyle\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$.

따라서 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 4}{(x^2 + y^2 + (4 - x^2 - y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy = 2\pi$이다.

(채점기준)

(a)
(1) 법선 벡터 $\mathbf{N}$을 올바르게 구함: 5점, $\mathbf{N}$의 전체 부호가 틀린 경우: 3점 (각 성분의 부호가 각각 틀린 경우 점수 없음)
(2) 식(1)처럼 S상의 적분을 U상에서 내적값의 적분 형태로 나타냄: 5점
(3) 식(2)나 (3)처럼 $\mathbf{A}$나 $\mathbf{N}$ 사용하지 않고 구체적인 적분으로 나타냄: 5점

(b)
(a) 식 (4)처럼 주어식이 각원소 벡터장의 면적분임을 보임: 4점
(b) 각원소 벡터장의 적분값이 2π임을 합당하게 설명함: 5점
(c) 답 점수: 1점

2021학년도 2학기 수학 2 기말고사 13번 문제 모범답안 및 채점기준

[모범답안]
(풀이1)
$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$ 에서, 곡면을 $X(x,y) = (x,\ y,\ xe^y)$ 로 매개화 하면 다음을 얻는다.

$$X_x = (1,\ 0,\ e^y),\ X_y = (0,\ 1,\ xe^y),\ X_x \times X_y = (-e^y,\ -xe^y,\ 1)$$

벡터장 $\mathbf{F}$ 가 곡면 S를 빠져나가는 방향이 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \le 0$ 이므로 단위법벡터 $\mathbf{n}$은 다음과 같이 선택한다.

$$\mathbf{n} = -\frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} = \frac{(e^y,\ xe^y,\ -1)}{\sqrt{e^{2y} + x^2e^{2y} + 1}},$$

$$\mathbf{N} = -X_x \times X_y$$

10점 (향 올바르게 표함)

벡터장 $\mathbf{F}$ 가 곡면 S를 빠져나가는 양(flux)는 다음 적분을 계산해서 얻을 수 있다.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{dS} = \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}dxdy$$

계산해보면,

$$\begin{aligned}
&\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 (x,\ y,\ xe^y) \cdot (e^y,\ xe^y,\ -1)\,dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 xye^y\,dxdy \\
&= \int_0^2 ye^y\,dy \int_0^1 x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 ye^y\,dy \\
&= \frac{1}{2}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

5점. (적분식 똑바로세우기)

5점 (계산)

이다.

*부호만 정반대 (풀이 흐름은 올옳음) 인 경우 10점.

* 틀린 $\mathbf{N}$ 으로 구한 '적분식' 5점.

(풀이2)
곡면 S를 포함하는 닫힌 곡면을 만들기 위해 다음과 같이 4개의 곡면 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$를 정의하자.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{(x,\ y,\ z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ z = 0\} \\
A_2 &= \{(x,\ y,\ z) \mid 0 \le z \le x,\ y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \\
A_3 &= \{(x,\ y,\ z) \mid 0 \le z \le xe^2,\ y = 2,\ 0 \le x \le 1\} \\
A_4 &= \{(x,\ y,\ z) \mid 0 \le z \le e^y,\ x = 1,\ 0 \le y \le 2\}
\end{aligned}
$$

따라서 닫힌 곡면 $P = S \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$를 정의할 수 있고, $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$의 향은 벡터장 $\mathbf{F}$가 곡면 P를 빠져나가는 방향으로 한다.
발산정리에 의해 17점 (닫힌곡면에 발산정리를 쓰고자 함)

$$\iiint_{int(P)} \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = -\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{A_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{A_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{A_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{A_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

5점 (향을 제대로 고려한 발산정리 식)

가 성립한다.
위치 벡터장이므로 $\mathrm{div}\mathbf{F} = 3$이고,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= (x,\ y,\ 0)\cdot(0,\ 0,\ -1) = 0 \text{ on } A_1 \\
\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= (x,\ 0,\ z)\cdot(0,\ -1,\ 0) = 0 \text{ on } A_2 \\
\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= (x,\ 2,\ z)\cdot(0,\ 1,\ 0) = 2 \text{ on } A_3 \\
\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= (1,\ y,\ z)\cdot(1,\ 0,\ 0) = 1 \text{ on } A_4
\end{aligned}
$$

이므로 위의 발산정리를 이용한 적분을 계산하면,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\mathrm{Area}(A_3) + \mathrm{Area}(A_4) - 3\mathrm{Vol}(\mathrm{int}(P))$$

를 얻는다.
한편,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathrm{int}(P)) &= \int_0^2 \int_0^1 xe^y\, dxdy = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\
\mathrm{Area}(A_3) &= \frac{e^2}{2} \\
\mathrm{Area}(A_4) &= \int_0^2 e^y\, dy = e^2 - 1
\end{aligned}
$$

☆

이므로

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = e^2 + (e^2 - 1) - \frac{3}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$$

8점 (계산).

을 얻는다.

*계산과정에서 $\iint_S \mathbb{F} \cdot dS$ 를 제외한 나머지 (= ⊛) 를 제대로 구하면

3점.

14번 답안 및 채점기준

닫힌 영역의 곡면을 만들기 위해 다음과 같은 곡면

$$\hat{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

을 포함한 $S' = S \cup \hat{S}$ 을 정의하자.

주어진 벡터장 $\mathbb{F}$는 영역 $\mathrm{int}S'$ 를 포함한 실수 전체에서 잘 정의되기에 발산정리를 적용할 수 있다. $\cdots$ (1)

이때 $\mathrm{div}\mathbb{F} = 0$ 이므로 발산정리에 의해 다음을 얻는다.

$$0 = \iiint_{\mathrm{int}S'} \mathrm{div}\mathbb{F}\ dV_3 = \iint_{S'} \mathbb{F} \cdot dS$$

그리고 $S' = S \cup \hat{S}$ 로부터 다음을 얻을 수 있다. $\cdots$ (2)

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot dS = -\iint_{\hat{S}} \mathbb{F} \cdot dS = -\iint_{\hat{S}} \mathbb{F} \cdot (0, 0, -1) dS$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 + y^2 + 3\ dxdy\ \cdots (*)$$

이를 마저 계산하면 원하는 답을 얻게 된다. $\cdots$ (3)

$$(*) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 3) r dr d\theta = 2\pi \cdot (\frac{1}{4} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{2}\pi$$

(1) 위의 예시처럼 "닫힌 곡면을 적절하게 만든 후" 발산정리를 통해 접근한 경우 8점
(2) 발산정리를 올바르게 적용하여 위와 같이 계산 가능한 형태의 적분식을 도출한 경우 8점
(3) 향의 방향을 포함하여 올바르게 계산을 진행한 경우에만 4점

* 별해
스토크스 정리를 사용하고자 하는 경우 $\mathrm{curl}\ \mathbb{G} = \mathbb{F}$ 가 되는 다음의 벡터장

$$\mathbb{G} = (\sin z \sqrt{x^8 + 2},\ x(y^2 + 3) + \frac{x^3}{3},\ -e^z \cos y)$$

를 올바르게 찾은 후 $\cdots$ (8점)

스토크스 정리를 적용하여 해당 벡터장을 경계인 곡선 $X = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$을 따르는 선적분을 계산 가능한 형태의 적분식으로 도출 $\cdots$ (8점)

$$\int_X \mathbb{G}\cdot ds = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta(\sin^2\theta + 3) + \frac{\cos^4\theta}{3} d\theta$$

이후 나머지 계산을 올바르게 수행 $\cdots$ (4점)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta(\sin^2\theta + 3) + \frac{\cos^4\theta}{3} d\theta = \frac{7}{2}\pi$$

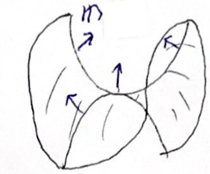
#15.

Sol 1 (스토크스 정리를 쓴 경우).

$$\mathbb{F} = (e^x+y^3,\ \cos y + z^2,\ x+\sin z)$$

$$\operatorname{curl}\mathbb{F} = (-2z, -1, -3y^2)$$

+10



$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{s} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$

$S:\ z = 2xy,\ x^2+y^2 \le 1$

매개화 : $X(x,y) = (x, y, 2xy)$ $(x^2+y^2\le 1)$

$\mathbb{N} = X_x \times X_y = (-2y, -2x, 1)$

향: $\mathbb{n} = \dfrac{\mathbb{N}}{|\mathbb{N}|}$ $(\mathbb{n}\cdot\hat{k} \ge 0)$

+5

(곡면 S와 그것의 향이 올바르고 구체적으로 명시되어야 부여)

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-2\underbrace{z}_{=2xy}, -1, -3y^2)\cdot(-2y, -2x, 1)\ dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} 8xy^2 + 2x - 3y^2\ dx\,dy$$

$$= -3\iint_{x^2+y^2\le 1} y^2\ dx\,dy \qquad (\because)\ \text{대칭성}.$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \boxed{-\frac{3}{4}\pi}$$

+10

Sol 2 (직접 선적분)

$$(\text{준식}) = \int_0^{2\pi} (e^{\cos t} + \sin^3 t)(-\sin t) + (\cos(\sin t) + \sin^2(2t))\cos t + (\cos t + \sin(\sin 2t))(2\cos 2t)\ dt$$

+10

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^4 t\ dt \qquad (\because)\ \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin t = \left[-e^{\cos t}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin t)\cos t\ dt = \left[\sin(\sin t)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin 2t)2\cos 2t\ dt = \left[\cos(\sin 2t)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\cos t\ dt = \int_0^{2\pi} \cos t\cdot 2\cos 2t\ dt = 0.$$

$$= -\frac{3}{4}\pi.$$

+15

* 단순 부호 실수(다른 논리적 과정은 모두 올바른 경우)로 $\frac{3}{4}\pi$ 얻은 경우 20점.