2020학년도 2학기 수학 2

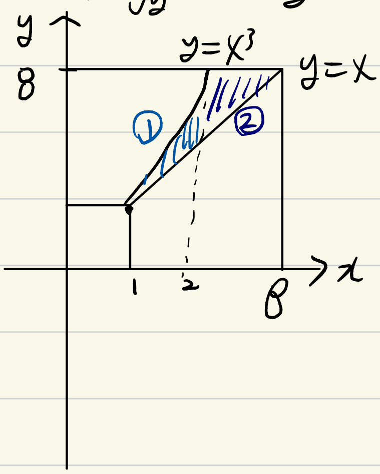
기말고사 모범답안 및 채점기준

#1.

$$\int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\, dy + \int_8^{32} \int_{\frac{y}{4}}^{8} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\, dy := A$$

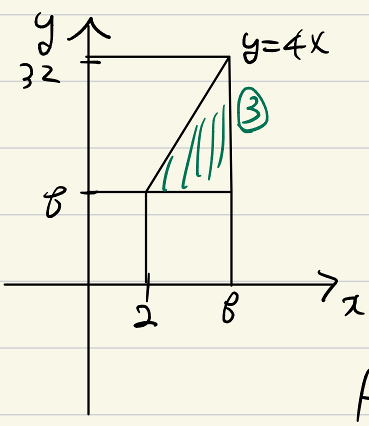
sol)

- $\int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \underline{\int_1^2 \int_x^{x^3} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx + \int_2^8 \int_x^8 e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx}$



Fubini's Thm

- $\int_8^{32} \int_{\frac{y}{4}}^{8} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \underline{\int_2^8 \int_8^{4x} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx}$ by Fubini's Thm.



Then, we could get :

$$A = \underbrace{\int_1^2 \int_x^{x^3} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx}_{:=\alpha} + \underbrace{\int_2^8 \int_x^{4x} e^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx}_{:=\beta}$$

since $\alpha = 2e^2 - 2e$ & $\beta = 14e^8 - 2e^2$.

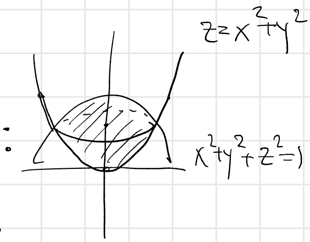
$A = 14e^8 - 2e$ //

- 구하고자하는 A를 식으로써 '맞게' 기술시 10점. — 표시된 부분을 기술. 혹은 이와 동등한 식표현.
- ①+② 와 ③ 으로 묶어풀어도 계산 결과가 맞다면 ok.
- α와 β 각각 5점씩 부여. ↑ 경우에도 각 5점씩 부여.

#2. 문제에서 주어진 영역을 A라 하자.

구하는 영역의 중심을 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$라 두면
대칭성에 의해 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$ 이다.

$(0, 0, \bar{z})$ +5

A: 

원기둥 좌표계로 치환하면, 구하는 영역은

$$r^2 \le z \le \sqrt{1-r^2}$$

$$\sqrt{1-r^2} \ge r^2$$
$$1-r^2 \ge r^4$$
$$0 \le r^2 \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

+5

$$\mathrm{Vol}_3(A) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(r\sqrt{1-r^2} - r^3\right) dr\,d\theta$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 2\pi\left(\frac{2-\sqrt{5}}{3} - \frac{3-\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{12}(3-\sqrt{5})$$

+5

$$\iiint_A z\, dV_3$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r z \, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} r\left(\frac{1}{2}(1-r^2) - \frac{1}{2}r^4\right) dr\, d\theta$$

$$= \cancel{2}\pi \left[\frac{1}{\cancel{4}\,2} r^2 - \frac{1}{\cancel{8}\,4} r^4 - \frac{1}{\cancel{12}\,6} r^6 \right]_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$= \pi\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{3-\sqrt{5}}{8} - \frac{-2+\sqrt{5}}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi}{24}\left(-6+6\sqrt{5} - 9 + 3\sqrt{5} + 8 - 4\sqrt{5}\right) = \frac{\pi}{24}\left(-7+5\sqrt{5}\right)$$

+5

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi}{24}(-7+5\sqrt{5})}{\frac{5\pi}{12}(3-\sqrt{5})} = \frac{5\sqrt{5}-7}{10(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore \left(0, 0, \frac{1+2\sqrt{5}}{10}\right)$$

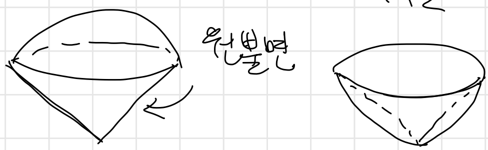
(※) $z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 위쪽과 아래쪽을 각각 따로 매개화하여 다음과 같이 계산하거나

아래쪽: $0\le r\le\sqrt{z}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

위쪽: $0\le r\le\sqrt{1-z^2}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le z\le 1$

다른 치환 방법을 사용한 경우에도 계산이 맞으면 정답 인정.

A_1 $\quad$ A_2



$$\varphi_0=\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

A_1: $0\le\rho\le 1$, $0\le\varphi\le\varphi_0$, $0\le\theta\le 2\pi$

A_2: $0\le\rho\le\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, $\varphi_0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$

등.

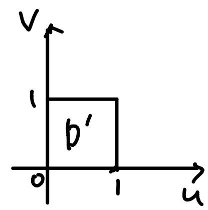
(※) 결과에 영향을 주지 않는 사소한 계산 실수는 감점 없음.

3.

$xy=u$, $x^2-y^2=v$로 치환하면 각각의 그래프는

$y=0 \rightarrow u=0$, $xy=1 \rightarrow u=1$

$x=y \rightarrow v=0$, $x^2-y^2=1 \rightarrow v=1$ 로 옮겨진다.



따라서 uv좌표계의 D' 영역에서 적분하면 된다.

위의 치환을 F라 하면 F는 경계를 뺀 영역에서 일급가역함수.

F^{-1}의 야코비 행렬식은 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left|\det\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}\right| = |2x^2+2y^2|$ 이므로

F의 야코비 행렬식은 $\frac{1}{2(x^2+y^2)}$

따라서 주어진 적분식은 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2(1+2u)}\,du\,dv = \left[\frac{1}{4}\ln(1+2u)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log 3$

* 계산을 완료한 경우에만 부분점수 있음 (범위, 야코비 행렬식 등이 틀리면 0점)

* 올바른 방법으로 풀었으나 계산실수가 있을 경우 -5점

* $u=x^2+y^2$, $v=xy$ 로 치환한 경우도 위와 동일한 기준이 적용된다.

(범위 $0 \le v \le 1$, $2v \le u \le \sqrt{1+4v^2}$, 범위가 틀렸을 경우 부분점수 없음)

2020년 수학2 기말고사 답안 및 채점기준

[문제 4.] [20점] 좌표평면에서 벡터장

$$\mathbb{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

가 극좌표계로 주어진 곡선

$$r = 1 + \cos\theta + \sin\theta, \quad \left(-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right)$$

을 수직으로 통과하는 양(flux)의 절댓값을 구하시오.

[풀이1]

벡터장 $\mathbb{F}$의 발산함수를 계산하면,

$$\mathrm{div}\mathbb{F} = 0$$

이다. 이제 다음의 경계로 둘러싸인 영역 D를 생각하자:

1. α는 주어진 곡선
2. L_1은 $\alpha(\frac{\pi}{3})$에서 $\epsilon \cdot (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$에 이르는 직선
3. β는 원을 따라 $(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$에서 반시계방향으로 $(\cos(-\frac{\pi}{6}, \sin(-\frac{\pi}{6}))$에 이르는 원호
4. L_2는 $\epsilon \cdot (\cos(-\frac{\pi}{6}, \sin(-\frac{\pi}{6}))$부터 $\alpha(-\frac{\pi}{6})$에 이르는 직선

으로 둔다. 이 경우 벡터장 $\mathbb{F}$는 원점으로부터 방사형으로 뻗어나가는데, L_1과 L_2 위에서의 법벡터는 그 벡터와 수직한 모양이 된다. 이를 내적하여 선적분을 하면 값이 0이 된다. 발산정리로부터

$$\int_X \mathbb{F} \cdot \mathrm{n} ds = \iint_{\mathrm{int}X} \mathrm{div}\mathbb{F} dV_2 = 0$$

를 얻고, 좌변은

$$\int_X \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{X_1} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{X_2} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

이므로, 구하고자 하는 적분은

$$\int_{X_1} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = -\int_{X_2} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

이다. X_2을 따라 단위 법벡터는 $(\cos\theta, \sin\theta)$로 주어지기 때문에,

$$\begin{aligned}\int_{X_2} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos\theta}{\epsilon}, \frac{\sin\theta}{\epsilon}\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)\epsilon d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

이므로, 구하고자 하는 값의 절댓값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

[풀이2]주어진 곡선을 $X_1(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta); -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$로 매개화하자. 이 경우 시작점을 P_1, 끝점을 P_2라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}P_1 &= \left(r\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), r\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, -\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) \\ P_2 &= \left(r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), r\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+3\sqrt{3}}{4}\right)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이 경우 P_1에서 P_2로 이르는 직선경로 X_2를 구성할 수 있다. 이 직선경로를 추가하여 닫힌 폐곡선 $X = X_1 + X_2$를 구성할 수 있다.

발산정리에 의해

$$\int_X \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\mathrm{int}X} \mathrm{div}\mathbb{F} dV_2$$

이고, $\mathrm{div}\mathbb{F} = 0$이므로, $\int_X \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \Rightarrow \int_{X_1} \mathbb{F} \cdot \ltimes ds = -\int_{X_2} \mathbb{F} \cdot \ltimes ds$이다.

한편, X_2를 따라 단위법벡터는 $\mathbf{n} = (-1, 0)$이므로,

$$-\int_{X_2} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = -\int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}+3}{4}} \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + y^2} dy$$

이때, $y = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\tan\theta$로 치환하면, $dy = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\sec^2\theta d\theta$로 두어

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta$$

이므로, 원하는 값의 절댓값은 $\frac{\pi}{2}$라고 결론짓는다.

[풀이3]

$$\begin{aligned} X(\theta) &= r(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= (1+\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

이다. 이 곡선의 접벡터를 계산하면,

$$\begin{aligned} T(\theta) = X'(\theta) &= (-\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + (1+\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta, \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

이 벡터를 90도 회전하면 주어진 곡선 $X(\theta)$에 수직한 벡터를 얻을 수 있다.
이를 $N(\theta)$라고 두면,

$$N(\theta) = (\sin^2\theta - \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta, -\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)$$

이다. 이때, 피적분함수는

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\big(X(\theta)\big) \cdot N(\theta) &= \frac{1}{1+\cos\theta+\sin\theta}\big(-\sin^2(1+\cos\theta+\sin\theta) - \cos^2\theta(1+\cos\theta+\sin\theta)\big) \\ &= -1 \end{aligned}$$

이므로, 구하고자 하는 적분값의 절댓값은

$$\left|\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} F\big(X(\theta)\big) \cdot N(\theta) d\theta\right| = \frac{\pi}{2}$$

이다.

[풀이4]

주어진 벡터장은 2차원 입체각 벡터장이므로 입체각 벡터장의 플럭스는 각 원소 벡터장을 곡선을 따라 적분한 것과 같다. 따라서 해당 적분값의 절댓값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

[채점기준]

1. 폐곡선 C를 지정하고 발산정리를 이용하여

$$\int_C \mathbb{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\text{int}C} \text{div}\mathbb{F} dV_2$$

로 두는 경우 5점 부여.

2. 올바른 계산을 통해 답을 올바르게 구한 경우 15점 부여

그 외에 적절한 논증과정을 거쳐 답을 도출한 경우 만점 부여.

채점기준에 대한 상세.

1. 발산정리를 이용할 때 폐곡선을 구성하지 않은 상태에서 적용한 경우 이해하지 못한 것으로 판단하여 점수부여를 하지 않음.

2. 원점을 포함하는 경로를 지정하는 경우에는 선적분조차 정의되지 않으므로 적절한 폐곡선을 지정하지 못한 것으로 판단.

3. 적절한 논증을 통해 결론을 얻어낸 경우에는 만점 부여.

4. 각원소 벡터장임을 밝히지 않고, 단지 값을 $\frac{\pi}{2}$라고 기술한 경우는 점수를 부여하지 않음.

문제 5. 채점기준표.

① 그린의 정리를 이용하여 면적을 표현한 경우.

$\frac{1}{2}\int_X x\,dy - y\,dx$ or $\int_X x\,dy$ or $\int_X -y\,dx$

+10점

㊀ 부호가 달라도 맞는 것으로 한다, 식을 잘못써도 ②에서 뜻이 맞으면 맞는 것으로 한다

↳ ex. $\iint_X x\,dy$

② ①을 쓰고, 적분식으로 잘 고친경우.

②-a : $\frac{1}{2}\int_X x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t)(3\cos^2 t(-\sin t)) - \cos^3 t(3\cos^2 t\cdot(-\sin t) - 3\sin^2 t\cdot\cos t)\,dt$.

②-b : $\int_X x\,dy = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t)\cdot(3\cos^2 t\cdot(-\sin t))\,dt$.

②-c : $\int_X -y\,dx = \int_0^{2\pi} -\cos^3 t(3\cos^2 t(-\sin t) - 3\sin^2 t\cdot\cos t)\,dt$.

②-a,b,c 셋 중 하나 +5점.

③ 답이 맞는 경우.

답 $= \frac{3}{8}\pi$. +5점.

다른풀이.

① 8점: $X(r,t)$를 정의하고, 면적소를 구한 경우.

② 7점: 면적소 계산 맞음에 관계없이 적분식을 맞게 세운 경우.

③ 20점: 위 두 경우를 만족시키고, 답까지 맞는경우.

㊀ ①과 ② 점수는 별개로 부여.

$X(r,t) := r(\cos^3 t - \sin^3 t,\ \cos^3 t)$

$X_r = (\cos^3 t - \sin^3 t,\ \cos^3 t)$, $X_t = r(3\cos^2 t(-\sin t) - 3\sin^2 t\cdot\cos t,\ 3\cos^2 t(-\sin t))$

$|J| = r\cdot 3\cos^2 t\sin^2 t$. ①, 면적 $= \int_0^{2\pi}\int_0^1 |J|\,dr\,dt$. ②.

답 $= \frac{3}{8}\pi$.

6번 채점기준.

풀이 1.

중심의 정의에 의해 $z_0 = \frac{1}{Area(S)} \iint_S z\, dS$ ...(5점)

S를 매개화 하면 $X: D \to \mathbb{R}^3$, $X(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

이므로, 면적소 $|X_x \times X_y|\, dxdy = \frac{1}{z}\, dxdy$ ....(10점)

따라서 $\iint_S z\, dS = \iint_D z |X_x \times X_y|\, dxdy$

$= \iint_D 1 \cdot dxdy = Area(D)$

$\therefore z_0 = \frac{Area(D)}{Area(S)}$ ...(5점)

풀이2. $z_0 = \frac{1}{Area(S)} \iint_S z\, dS$. ...(5점)

S 위의 점을 구면좌표 매개화하면 $X(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$

이고 D의 매개화는 $Y(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, 0)$.

그러면 $\iint_S z\, dS = \iint_A \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi d\theta$,

$Area(D) = \iint_D 1\, dS = \iint_A |Y_\varphi \times Y_\theta|\, d\varphi d\theta$

$= \iint_A \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$.

여기서 A는 (φ, θ)가 정의된 영역이다.

$\therefore \iint_S z\, dS = Area(D)$, $z_0 = \frac{Area(D)}{Area(S)}$

* 면적소(작은 영역)의 정사영을 이용하여 푼 경우
논리적 빈틈 (분할한 부분을 식으로 나타내는 등)이
없어야만 20점부여.

** 반구에 포함된 영역이 아닌 반구로 두고 푼 경우
중심 z_0 의 정의에 대한 5점만 최대로 부여.

*** 매개화한 영역의 적분범위를 임의의 직사각형으로 두고
푼 경우도 ** 와 마찬가지.
단, ** , *** 의 경우에도 풀이 1.과 같이 풀었으면
해당하는 점수부여

**** 중심의 정의에서 $\iint_S z\,dS$ 의 기호가 조금이라도 틀린 경우 0점.
(예: dV_2, $d\vec{S}$, $z \cdot dS$.)
$\iiint$.

7번 채점기준

$z = 1 - x^2$ 대입 $\Rightarrow \iint_S \frac{x(x^2+z)}{\sqrt{x^2+y+z\cos^2 z + z\sin^2 z}}\,dS = \iint_S \frac{x}{\sqrt{y+1}}\,dS$ ① $+5$

S의 매개화 $\Rightarrow X : (x,y) \mapsto (x, y, 1-x^2)$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

$X_x = (1, 0, -2x)$, $X_y = (0, 1, 0)$ $\Rightarrow |X_x \times X_y| = \sqrt{1+4x^2}$

$$\iint_S \frac{x}{\sqrt{y+1}}\,dS = \int_0^1 \int_0^3 \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{y+1}}\,dy\,dx$$ ② $+10$

$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$ ③ $+5$

① : 주어진 피적분 함수를 간략히 정리시에 $+5$

② : S를 적절히 매개화하여 면적분을 올바르게 나타낸 경우 (범위 + 면적소) $+10$

③ : 나머지 계산을 통해 올바른 답을 얻은 경우 $+5$

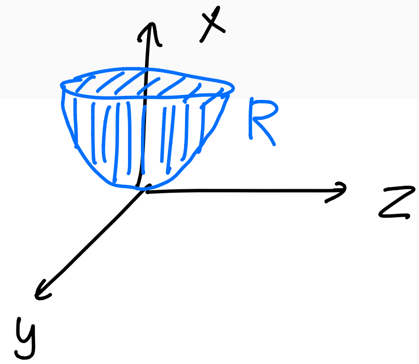
＊ ①을 틀렸더라도 ②를 잘 구하여 잘못 구한 ①의 식에 대입한 경우 $+10$.

문제 8. [20점] 삼차원 좌표공간의 곡면 $x = y^2 + z^2$과 평면 $x = 1$로 둘러싸인 영역을 R이라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

가 영역 R의 경계 ∂R을 빠져나가는 양(flux)을 구하시오.

(Sol.)



$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \le x \le 1\}$

[풀이 1] 발산정리 적용

$$\text{flux} = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \operatorname{div}(\vec{F})\, dV \quad (\because \text{발산정리})$$

$$= \iiint_R (y^2 + z^2 + x)\, dV$$ 발산정리 적용 +5

이제 R 영역에서 Fubini 정리를 활용하기 위해,

$x = x$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$

로 치환하여 R 영역을 표현하자.

$$R = \{ (x, r, \theta) \mid 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le r \le \sqrt{x} ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$
표현방식 1

또는

표현방식 2
$$R = \{ (x, r, \theta) \mid 0 \le r \le 1 ,\ r^2 \le x \le 1 ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

두 표현방식 모두 $\{(x,y,z) \mid y^2+z^2 \le z \le 1 \}$ 을 나타낸다.

이 때, $dx\,dy\,dz = r\,dx\,dr\,d\theta$ 이다.

(이 제, 본인이 선택한 표현방식으로 가주세요)

(표현방식 1)

$$\Rightarrow \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint_R (y^2+z^2+x)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (r^2+x)\, r\, dr\, dx\, d\theta$$ 치환적분법 잘 적용하면 +5

$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (r^3 + rx)\, dr\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{3x^2}{4}\, dx = \frac{\pi}{2}$$ 마무리계산 잘 되면 +10

(표현방식 2)

$$\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 (r^2+x)\, r\, dx\, dr\, d\theta$$ 치환적분법 잘 적용하면 +5

$$= 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^1 (r^2+x)\, r\, dx\, dr$$

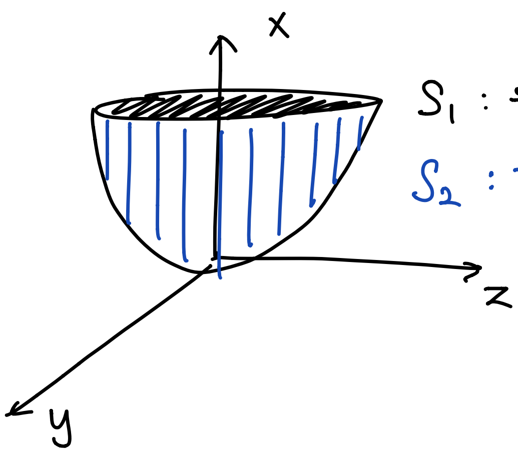
$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{r}{2} + r^3 - \frac{3}{2} r^5 \right) dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

마무리계산 잘 되면 +10

풀이 1 끝 "

[풀이 2] 발산정리 말고, 정규곡면에서 적분



S_1 : 윗면

S_2 : 포물면

$$\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad "$$

$\vec{n}$은 S_1에서 수직인 unit normal vector $= (1, 0, 0)$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (y^2, yz^2, z) \cdot \vec{n} \; dS$$

$$= \iint_{S_1} y^2 dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2\theta) r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$ +5점

S_2는 $f(x,y,z) = y^2+z^2-x = 0$ 의 등위면의 일부이기 때문에

S_2는 $\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = (-1, 2y, 2z)$를 법벡터로 가진다.

(위의 법벡터는 $(-1,0,0)$과 내적을 하면 >0 이다!)

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dS = \iint_{y^2+z^2\le 1} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$$

$$= \iint_{y^2+z^2\le 1} (-y^4+3y^2z^2+2z^2)\,dS$$

$y=r\cos\theta$

$z=r\sin\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5(-\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\sin^4\theta)\,dr\,d\theta$$

S_2에서 적분을 r,θ로 표현 +5

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}(-\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\sin^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

정답 잘 계산

+10

처음부터 S_2를

$X(r,\theta) = (r^2, r\cos\theta, r\sin\theta)$

로 매개화해서 풀어도 괜찮음!

$$\iiint_R \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\substack{x=1 \\ y^2+z^2=1}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

와 같이 발산정리를 잘못 적용한 경우는

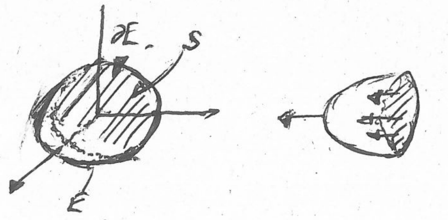
최대 5점부여

9. 풀이 1. $S: y^2+z^2 \le 4,\ x=0$ 이라 하자.

S에서의 단위 법벡터장 $\mathbf{n}$을 $(1,0,0)$이라고 하면 $\partial E = \partial S$이고, ∂E와 ∂S는 동일한 향을 가진다.

~~적절한 향 찾~~

① 원판 S의 알맞는 향 찾기 (5점).



스토크스 정리에 의해

$$\iint_E \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial E}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \text{ 이다}$$

② 스토크스 정리에 대한 바른 서술 (5점).

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(3y^2+3z^2,\ -2x\cos(x^2+z)-y^2,\ -xe^{xy}+2yz-y\sin(xy)\right)$$

③ curl $\mathbf{F}$ 계산 (5점).

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{y^2+z^2\le 4} 3(y^2+z^2)\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^{2\pi} 3r^3\,d\theta\,dr = 24\pi$$

④ 올바른 답 계산. (5점).

※ 향을 반대로 두고, 나머지 과정은 맞게 서술하여 ④에서 부호만 반대인 경우
①에서 5점을 감점하여 총 15점 부여.

※ ③에서, 만약 $\mathbf{n}=(\pm 1,0,0)$로 둔 경우, 적분 계산에 curl $\mathbf{F}$의 x성분만 필요함을
알고 있다 간주하고 curl $\mathbf{F}$의 x성분만 맞게 찾아도 curl 계산 과정에 만점 부여함(5점).
그러나, $\mathbf{n}$의 y 혹은 z 성분이 0이 아닌 경우 curl $\mathbf{F}$의 모든 성분을 맞게 구해야 ③에서
5점 부여함.

※ ①, ②, ③은 맞게 수행했으나, 원판의 반지름을 잘못 둬 ④에서 잘못된 값이 나온 경우.
①, ②, ③ 과정 점수는 부여하여 15점 부여함

풀이 2

(문제에서 주어진 곡면 E의 향으로부터 ∂E를 $X(t) = (0, 2\cos t, 2\sin t)$ (반시계 방향)로 매개화할 수 있다. | ① ∂E의 매개화 (5점) (향, 반지름, 자취 모두 O).

(스토크스 정리를 통해 $\iint_E \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial E} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s}$ 임을 알고 있다.) ② 정확한 스토크스 정리에 대한 서술 (5점).

($\int_{\partial E} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbb{F} \cdot X'(t)\, dt$.) ③ 주어진 벡터장 선적분 식에 대한 의미를 바르게 알고 있는가? (5점).

$$\mathbb{F} \cdot X'(t) = -2\sin t\,(1 - 8\sin^3 t) + 2\cos t\,(\sin(2\sin t) + 8\cos^3 t).$$

i) 자연수 n에 대하여 $\int_0^{2\pi} \sin^{2n-1} t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2n-1} t\, dt = 0$.

ii) 대칭성 혹은 치환 적분을 통해 $\int_0^{2\pi} \cos t\,(\sin(2\sin t))\, dt = 0$.

i), ii)를 적용하여 계산을 거치면,

$$\begin{aligned}
\iint_E \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\partial E} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^{2\pi} 16(\cos^4 t + \sin^4 t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 16 \cdot \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt \\
&= \int_0^{2\pi} 8(1 + \cos^2 2t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 8 + 8\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt \\
&= 24\pi.
\end{aligned}$$

④ 계산 (5점).

※ ∂E의 반지름만 잘못 구하고, 나머지 단계가 맞는 경우 총 15점 (②, ③, ④에서 부여).

※ ③에 의해 $\int_{\partial E} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \mathbb{F} \cdot n\, dS$라 두고, ~~혹은~~ 풀어서 잘못된 답이 구해진 경우 ①, ②에서만 점수 부여 (최대 10점).

※ 계산 과정에 대한 적절한 설명이 없는 경우 ④에서 답이 맞아도 점수 없음.

참. 풀이 1과 풀이 2를 기준으로 했을 때 높은 점수를 부여.

문제 10. [20점] 삼차원 좌표공간에서 곡면 S가 타원면 $x^2+2y^2+3z^2=1$에 포함된다고 하자. 벡터장 $\mathbf{F}=(2x^2y, 4xy^2, 6xyz)$에 대하여 등식

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0$$

이 성립함을 보이시오.

모범답안 $\boxed{1}$

$$\operatorname{curl} F = (6xz, -6yz, -2x^2+4y^2)$$

$$n = \frac{(2x, 4y, 6z)}{\sqrt{4x^2+16y^2+36z^2}}$$

$x^2+2y^2+3z^2=1$에 포함되는 임의의 곡면 S에 대해서

$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot dS = \iint_S (6xz, -6yz, -2x^2+4y^2)\cdot\frac{(2x, 4y, 6z)}{\sqrt{4x^2+16y^2+36z^2}}\,dS$$

$$=\iint_S \frac{1}{\sqrt{4x^2+16y^2+36z^2}}(12x^2z-24y^2z-12x^2z+24y^2z)\,dS$$

$$=\iint_S 0\,dS = 0.$$

부분점수 없음.

모범답안 $\boxed{2}$

$x^2+2y^2+3z^2=1$ 에 포함되는 임의의 곡면 S을 다음과 같이 매개화한다.

$$X(\varphi,\theta)=\left(\sin\varphi\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt3}\cos\varphi\right)$$

$$X_\varphi=\left(\cos\varphi\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt2}\cos\varphi\sin\theta,\ -\frac{1}{\sqrt3}\sin\varphi\right)$$

$$X_\theta=\left(-\sin\varphi\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\cos\theta,\ 0\right)$$

$$X_\varphi\times X_\theta=\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin^2\varphi\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt3}\sin^2\varphi\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$\text{curl}F=(6xz,\ -6yz,\ -2x^2+4y^2)$$

$$=\left(2\sqrt3\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta,\ -\sqrt6\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,\ -2\sin^2\varphi\cos^2\theta+2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)$$

$$\text{curl}F\cdot dS=\left(2\sqrt3\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta,\ -\sqrt6\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,\ -2\sin^2\varphi\cos^2\theta+2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin^2\varphi\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt3}\sin^2\varphi\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt2}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi d\theta$$

$$=0\,d\varphi d\theta.$$

$$\therefore \iint_S \text{curl}F\cdot dS=0.$$

> S를 특정형태로 제한. ex) $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ & $\theta_1\le\theta\le\theta_2$
↳ (−5점)

특히, S를 타원면 자체로 보았을 경우, (−10점)

> 매개화한 변수가 임의의 S를 나타낼 수 없는 경우.

특히 반구만 나타내면 −10점, 반구+반구로 나타내면 −5점.

↳이 경우, 반구의 경계가 포함되지 않음.