2019년도 여름계절학기

수학 2 기말고사 채점기준

#1. $\iint_R ye^x \sin e^x \, dx dy$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\log \frac{\pi}{2}}^{\log y} ye^x \sin e^x \, dx dy$$ (!! 푸비니 정리)

10

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -y\cos y \, dy$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}$$

10.

부분점수 없음.

2. 질량의 정의에 의하여

$$(\text{질량}) = \int_{f(R)} \frac{2}{\sqrt{u^2+w^2}}\, du\,dv\,dw$$

$$= \int_R \frac{2}{z^2+x^2} \left\| \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \right\| dx\,dy\,dz$$ 5

그런데 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$ 이므로 5

$$(\text{질량}) = \int_R 16\, dx\,dy\,dz$$ 5

$$= 8\pi.$$ 5.

#3.

$$\text{질량} = \int_R \mu \, dx\,dy$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos\theta}^{1} r^2 \, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{3\pi - 4}{9}.$$ 5.

$$\int_R x\mu \, dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos\theta}^{1} r^3 \cos\theta \, dr\, d\theta$$

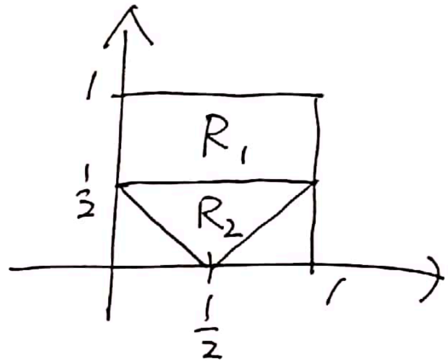
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta - \cos^5\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{30}.$$ 5.

$$\int_R y\mu \, dx\,dy = 0$$ ($\because$ R과 μ는 x축에 대칭) 5

$\therefore$ 중심의 좌표 $= \left(\dfrac{21}{10(3\pi - 4)}, 0\right)$. 5

4. 발산정리에 의하여,



$$\int_{\partial R} \mathbb{F}\circ n \, ds$$

$$= \int_R \operatorname{div} \mathbb{F} \cdot dV_2$$

$$= \underline{\int_R x-y+1 \; dx\,dy} \quad 4$$

$$= \int_{R_1} x-y+1 \; dx\,dy + \int_{R_2} x-y+1 \; dx\,dy \quad -①$$

$$= \underbrace{\tfrac{3}{8}}_{8} + \underbrace{\tfrac{7}{24}}_{8} = \frac{2}{3}.$$

8

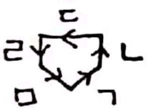
별해: ①의 계산을 할 때, R을 $x=\frac{1}{2}$을 기준으로 두 영역으로 나눈 경우 왼쪽 영역의 적분 $1/4$ 와, 오른쪽 영역의 적분 $5/12$가 맞으면 각 8점씩.

별해 2: R을 두 사각형으로 나누어 각 사각형의 무게중심을 구한 뒤 넓이 비례의 내분점을 찾아 $\int_R x \, dx\,dy$, $\int_R y \, dx\,dy$를 구하는 풀이의 경우, 각 무게중심을 맞게 구했을 때 각 8점.

별해 3: 다음 페이지 참조.

$$\int_{\partial R} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_a^b \vec{F}(X(t)) \cdot \underbrace{\vec{n}(t)\, |X'(t)|}_{=:\ \vec{N}(t) = -X_*'(t)}\, dt$$

$\vec{F} \to \left(\frac{1}{2}x^2,\ y - \frac{1}{2}y^2\right)$



$ㄱ(t) = \left(\frac{1}{2}+t,\ t\right) \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \quad -ㄱ_*'(t) = (1, -1)$

$ㄴ(t) = \left(1,\ \frac{1}{2}+t\right) \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \quad -ㄴ_*'(t) = (1, 0)$

$ㄷ(t) = (1-t,\ 1) \quad 0 \le t \le 1 \quad -ㄷ_*'(t) = (0, 1)$

$ㄹ(t) = (0,\ 1-t) \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \quad -ㄹ_*'(t) = (-1, 0)$

$ㅁ(t) = \left(t,\ \frac{1}{2}-t\right) \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \quad -ㅁ_*'(t) = (-1, -1)$

(준식) $=$ (ㄱ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+t\right)^2,\ t - \frac{1}{2}t^2\right) \cdot (1, -1)\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}t + t^2\right) dt = \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{16}} - \cancel{\frac{1}{16}} + \frac{1}{24}$

4

$+$ (ㄴ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2,\ \left(\frac{1}{2}+t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+t\right)^2\right) \cdot (1, 0)\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{4}$

4

$+$ (ㄷ) $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-t)^2,\ 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right) \cdot (0, 1)\, dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}$

4

$+$ (ㄹ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\cdot 0^2,\ (1-t) - \frac{1}{2}(1-t)^2\right) \cdot (-1, 0)\, dt$

$= 0$

4

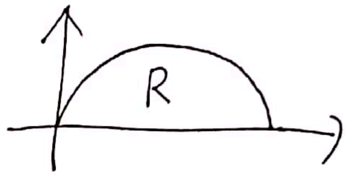
$+$ (ㅁ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}t^2,\ \left(\frac{1}{2}-t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right) \cdot (-1, -1)\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cancel{-\frac{1}{2}t^2} - \frac{1}{2} + t + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}t + \cancel{\frac{1}{2}t^2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}t\right) dt = \left(-\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{16} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{8}$

4

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1+6+12-3}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$ ▨

#5.



영역의 넓이 $= \int_{\partial R} -y\,dx$

$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt$ (∵ x축 위에서는 적분이 0, 매개화된 곡선의 향을 고려.) ①

$= 3\pi$. 5.

그린 정리에 의하여, 중심의 좌표는 $\frac{1}{6\pi}\left(\int_{\partial R} x^2\,dy,\ \int_{\partial R} -y^2\,dx\right)$ ②

인데, 곡선의 향을 고려하면 ③

$\int_{\partial R} -y^2\,dx = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dx$

$= 5\pi$. 5.

R이 직선 $x=\pi$에 대해 대칭이므로, R의 중심의 x좌표는 π. 5.

∴ $\left(\pi, \frac{5}{6}\right)$

①, ②, ③ 등의 처리를 완벽하게 한 경우 5점 추가 5.

#6. 타원면의 대칭성에 의해 $\iint_S x^2 dS = \iint y^2 dS$.

따라서 $\iint_S f dS = \iint_S z dS$

┘ 5점

곡면 S를 $X(x,y) = (x, y, 2\sqrt{1-x^2-y^2})$ 로 매개화하면 ┘ 5점

$(x^2+y^2 \leq 1)$ $dS = \sqrt{\dfrac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$ ┘ 5점 이고,

$$\iint_S z\, dS = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} \cdot \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{1+3r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{28}{9}\pi$$

┘ 5점

- $\sin\varphi\, e(\theta) + 2\cos\varphi \cdot \mathbb{k}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

  $r\, e(\theta) + 2\sqrt{1-r^2}\, \mathbb{k}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$

  등의 매개화도 모두 계산 가능.

#7. $\boxed{\text{풀이 1}}$: 발산정리 활용.

$S_1 : x^2+2y^2 \le 4,\ z=4,\ \mathbf{n}_1 = (0,0,-1)$

를 빠져나가는 플럭스를 구하면

$$\iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} (-4)\, dS = -4 \cdot 2\sqrt{2}\pi = -8\sqrt{2}\pi.$$ 5점.

$S \cup S_1$ 내부의 영역에서의 발산함수 적분은

$$\iiint_{int(S \cup S_1)} \operatorname{div} F\, dV = \iiint_{int(S\cup S_1)} 2x-2y+1\ dV$$

영역의 대칭성에 의해

$\iiint x\, dV = \iiint y\, dV$

$$= Vol(int(S \cup S_1))$$

$$= \iint_{\{x^2+2y^2 \le 4\}} 4-(x^2+2y^2)\, dx\, dy$$

$$= 4\sqrt{2}\pi$$ 5점.

발산 정리에 의해

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_{int(S\cup S_1)} \operatorname{div} F \cdot dV$$ 이므로

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = -4\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2}\pi = 4\sqrt{2}\pi.$$ 10점.

$\boxed{\text{풀이 2}}$: $X(x,y) = (x, y, x^2+2y^2)$ 매개화 5점

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\{x^2+2y^2 \le 4\}} (x^2, -y^2, x^2+2y^2) \cdot (-2x, -4y, 1)\, dx\, dy$$ 5점

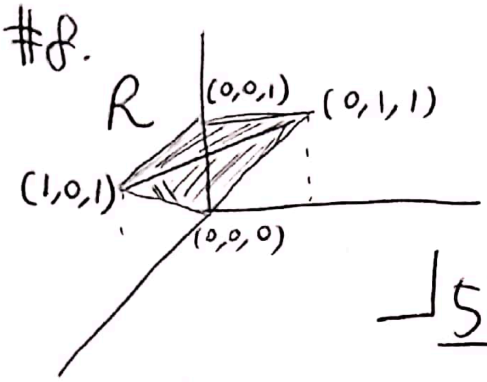
영역의 대칭성

$\iint x^3 = \iint y^3 = 0$

$$= \iint_{\{x^2+2y^2 \le 4\}} x^2+2y^2\, dx\, dy = 4\sqrt{2}\pi.$$ 10점.

※ $\mathbf{n}$ 방향 실수로 답이 $-4\sqrt{2}\pi$가 나온 경우 답점수에서 5점 부여.

#8.



영역 R의 부피 $= \frac{1}{6}$ ┘3점

영역 R의 중심 $= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ ┘3점

┘5점

$\operatorname{div} F = x + z - 3$ ┘5점

$$\iint_{\partial R} F \cdot dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV$$

$$= \mathrm{Vol}(R)\left(\bar{x} + \bar{z} - 3\right) = -\frac{1}{3}$$ ┘4점

※ 그냥 계산한 경우

$\operatorname{div} F = x + z - 3$ ┘5점

$$\iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+y}^{1} (x+z-3) \, dz \, dy \, dx$$ ┘5점

$$= \int_0^1 \int_0^{z} \int_0^{z-y} (x+z-3) \, dx \, dy \, dz$$

$$= -\frac{1}{3}$$ ┘10점

#9. $\text{curl} F = (2+2xe^{z}-\cos y,\ 2e^{z}+1-2xe^{z},\ -2e^{z}+\cos y)$ ┘ 5점.

평면 $x+y+z=0$ 위의 점들 중 곡선 C에 의해 둘러싸인 부분을 R 이라고 하면, 스토크스 정리에 의해

$$\left|\int_C F\cdot ds\right| = \left|\iint_R \text{curl} F\cdot dS\right|$$

┘ 5점

풀이 1 : 평면을 $X(x,y) = (x, y, -x-y)$ 로 매개화하면 $N(x,y)=(1,1,1)$.

따라서

$$\left|\iint_R \text{curl} F\cdot dS\right| = \left|\iint_{\underbrace{\{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}\}}_{\{x+y+x^2+y^2\le 0\}}} 3\ dx\,dy\right| = \frac{3}{2}\pi.$$

┘ 5점 ┘ 5점

풀이 2: 평면의 단위법벡터는 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 이므로

$$\left|\iint_R \text{curl} F\cdot dS\right| = \left|\iint_R \text{curl} F\cdot n\, dS\right|$$

$$= \sqrt{3}\ \text{Area}(R).$$ ┘ 5점

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$ (R의 xy-평면 으로의 정사영은 $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ 이므로)

$$= \frac{3}{2}\pi$$ ┘ 5점.

#10. $\mathrm{div}(F\times G) = \mathrm{curl}\,F\cdot G - \mathrm{curl}\,G\cdot F$ ┘ 10점.

G는 보존장이므로 비회전장이다. $(\mathrm{curl}\,G = 0)$ ┘ 10점.

$\therefore\ \mathrm{div}(F\times G) = \mathrm{curl}\,F\cdot G$.

- $\mathrm{div}(F\times G)$ 의 계산과정 없이 결과를 바로 적었지만 틀린 경우 (ex) $\mathrm{div}(F\times G) = \mathrm{curl}\,F\cdot G + \mathrm{curl}\,G\cdot F$) $\mathrm{div}(F\times G)$ 계산 점수 없음.
- $\mathrm{div}(F\times G)$ 전개식이 모두 맞지만 $\mathrm{curl}\,F\cdot G - \mathrm{curl}\,G\cdot F$ 형태로 묶을 때 부호에 실수가 있는 경우 −5점.
- $\mathrm{curl}\,G = 0$ 에 대한 이유 설명이 없으면 −5점.