수학 2 기말고사

(2019년 12월 7일 오후 1:00–3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [15점] 다음 적분 값을 구하시오.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1} dydx$$

문제 2. [20점] 좌표평면에서 네 직선 $y = \pm x$, $y = \pm(x-1)$로 둘러싸인 영역을 D라 할 때, 다음 적분 값을 구하시오.

$$\iint_D (x-y)\, e^{y^2-x^2} dxdy$$

문제 3. [20점] 양수 r에 대하여, $D_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le r^2\right\}$ 이라고 하고 이것의 경계를 $C_r : x^2+y^2 = r^2$이라 하자. 또, $\mathbb{R}^2$에서 정의된 이급함수 $f(x,y)$에 대하여 $\varphi(r) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{C_r} f\,\mathrm{ds}$를 생각하자. 이때, $\varphi'(r) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$ 임을 보이시오.

문제 4. [20점] 평면 위의 점

$$A_k = \left(\cos\frac{k\pi}{4}, \sin\frac{k\pi}{4}\right) \qquad (k = 1, 2, \cdots, 8)$$

에 대해 점 $A_1, A_2, \cdots, A_8$을 꼭짓점으로 가지는 정팔각형을 생각하자. 점 A_1에서 출발하여 반시계방향으로 정팔각형의 둘레를 따라 A_7에 도착하는 곡선을 C라 할 때,

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\left(1+x^2+y^2\right) dy$$

를 구하시오.

문제 5. [20점] 사이클로이드 곡선 $X(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$의 단위법벡터장 $\mathbf{n}$을 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} \ge 0$이 되도록 정할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = (x - x^2 + \sin(y^2+1))\mathbf{i} + \left(\sin\frac{x}{2} - y + 2xy\right)\mathbf{j}$$

에 대하여,

$$\int_X \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{ds}$$

의 값을 구하시오.

〈 연습용 여백 〉

학번:	이름:

문제 6. [25점] 3차원 좌표공간에서 xz-평면 위에 놓인 곡선 $z = x^2$ $(0 \le x \le \sqrt{2})$를 z축 둘레로 회전하여 얻은 회전면의 넓이와 중심을 구하시오.

문제 7. [20점] 곡면 $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ $(0 \le z \le 1)$의 향을 정하는 단위법벡터 $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \ge 0$이 되도록 정의되어있다. 입체각 벡터장 $\mathbf{A} = \dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$가 곡면 S를 빠져나가는 플럭스(flux)를 구하시오.

문제 8. [20점] 벡터장 $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$가 표준 단위구면 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$을 빠져나오는 플럭스(flux)를 구하시오.

문제 9. [20점] 두 벡터장 $\mathbf{F}_1$과 $\mathbf{F}_2$가 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = \left(x^2 \cos y,\ y^2 \cos z,\ z\left(1 + 6x^2\right)\right)$$
$$\mathbf{F}_2(x, y, z) = \left(x + x^3,\ x \sin y,\ y \sin z\right)$$

3차원 공간의 유계 영역 R에 대해 다음 두 식이 성립한다.

$$\iint_{\partial R} \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2 \ , \quad \iint_{\partial R} \mathbf{F}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4$$

이때, 영역 R의 부피를 구하시오.

문제 10. [20점] 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$와 영역 $x + y + z \ge 2$의 공통부분을 S라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F} = (x + y + 2z,\ 2x + y + z,\ x + 2y + z)$$

에 대하여 면적분 $\displaystyle\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$를 구하시오. 단, S의 향은 $\mathbf{n} = \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{2}}$으로 준다.

〈 연습용 여백 〉