

수학 및 연습 2 기말고사
(2018년 7월 27일 오전 11:00 - 오후 1:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하십시오. (총점 200점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [15점] 다음 적분값을 구하십시오.

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (x - 3z + 1) dx dy dz$$

문제 2 [25점] $r\theta$ 평면에서 다음 식에 의해 정의되는 영역이 극좌표계 치환에 의해 xy 평면에서 차지하는 영역을 D 라 할 때 아래 물음에 답하십시오.

$$\begin{cases} \arccos\left(\frac{r+1}{2}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, & (0 \leq r \leq 1) \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, & (1 \leq r \leq 2) \\ 0 \leq \theta \leq \arccos\left(\frac{r-1}{2}\right), & (2 \leq r \leq 3) \end{cases}$$

- (a) (15점) 영역 D 의 넓이를 구하십시오.
- (b) (10점) 영역 D 의 기하학적 중심 (\bar{x}, \bar{y}) 를 구하십시오.

문제 3 [15점] 다음 적분값을 계산하십시오.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$$

문제 4 [20점] $0 < a \leq b$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 두 타원판의 공통부분의 넓이는 $4ab \arctan \frac{a}{b}$ 임을 보이시오.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1$$

문제 5 [20점] 일급함수 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 가 항등식

$$f(tX) = t^n f(X), \quad t \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n$$

을 만족할 때, 벡터장 $\mathbf{F}(X) = \frac{X}{f(X)}$ 의 발산도가 0임을 보이시오.

(연습용 여백)

문제 6 [20점] xy 평면의 1사분면에서 $\frac{1}{2} \leq r \leq \sin 2\theta$ 의 식을 만족하는 영역을 D 라고 하고, D 의 경계 중 $r = \sin 2\theta$ 를 만족하는 곡선을 C 라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 영역 D 의 넓이를 구하시오.
- (b) (10점) C 에서 단위 법벡터 \mathbf{n} 을 영역 D 의 바깥 방향으로 정할 때, 벡터장 $\mathbf{F}(X) = \left(\frac{1}{|X|^2} + 1\right) X$ 가 C 를 통해 빠져나가는 플럭스 $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ 를 구하시오.

문제 7 [20점] 반구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 중에서 타원기둥 $x^2 + 2y^2 \leq 1$ 의 내부에 있는 부분의 넓이를 구하시오.

문제 8 [20점] 좌표공간상의 곡면 S 는

$$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

으로 정의될 때, 다음 면적분의 값을 계산하시오.

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$$

문제 9 [30점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 삼차원공간에서 정의되는 함수 h 와 벡터장 \mathbf{F} 에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오.

$$\text{curl}(h\mathbf{F}) = \text{grad } h \times \mathbf{F} + h \text{curl } \mathbf{F}$$

- (b) (20점) 다음과 같이 정의되는 곡면 S 와 벡터장 \mathbf{F} 에 대하여 $\iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 계산하시오.

(단, S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$ 이 되도록 주어진다.)

$$S : z = x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 4$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y + e^y \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) (z, -x, y)$$

문제 10 [15점] 곡선 C 는 다음과 같이 정의된다.

$$X(t) = (\sin t, \cos t, -\cos 2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

이때 곡선 C 를 따르는 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (y + \sin x)dx + (x^2 + \cos y)dy + x^3 dz$$