

수학 및 연습 2 기말고사
(2018년 12월 8일 오후 1:00-3:00)

| | |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 곡선 $X(t) = (e^t \cos t, 2^t \sin t, t^2)$, $(0 \leq t \leq \pi)$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \cos y + yz^3 \cos(xy), xz^3 \cos(xy) - x^2 \sin y, 3z^2 \sin(xy))$$

에 대하여 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot ds$ 를 구하시오.

문제 2 [20점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx dy$$

문제 3 [20점] 좌표평면의 영역 D_1, D_2 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

(a) (10점) $\iint_{D_1} \frac{32x^2}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D_1 : \begin{cases} x^2 - x + y^2 \leq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$

(b) (10점) $\iint_{D_2} e^{\frac{1-x-y}{\sqrt{2}}} dx dy, \quad D_2 : \begin{cases} x-1 \leq y \leq x+1, \\ y \geq -x+1 \end{cases}$

문제 4 [20점] 삼차원 공간에서 다음 영역의 부피를 구하시오.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, \quad x^2 + y^2 \geq b^2 - a^2$$

(단, a 와 b 는 $0 < a < b$ 를 만족하는 실수이다.)

문제 5 [20점] 평면곡선

$$X(t) = \sqrt{\cos 2t} (\cos t, \sin t), \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

에 대하여 선적분

$$\int_X (\arctan(1+x^2) - 2y) dx + (e^{y^2-2y} + 3x) dy$$

를 구하시오.

| | |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

문제 6 [20점] 좌표평면의 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, (y \geq 0)$ 을 x 축 둘레로 회전하여 얻은 회전면의 넓이를 구하시오.

(연습용 여백)

문제 7 [20점] 좌표공간에 주어진 곡면

$$(u \cos v, u \sin v, \cos v), \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi)$$

과 영역 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 의 공통부분을 곡면 S 라 하자. 함수 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$ 에 대하여 $\iint_S f dS$ 을 구하시오.

문제 8 [20점] 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + e^z, 4xy^2 + x \log(z + 1), 10z - 8xyz)$$

가 영역 $x^2 + y^2 \leq z \leq y$ 의 경계를 빠져나오는 플럭스를 구하시오.

문제 9 [20점] 삼차원 공간에서 세 점 $A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, 3)$ 를 꼭짓점으로 갖는 삼각형 ABC 와 그 내부를 곡면 S 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서 S 의 입체각을 구하시오.
- (b) (15점) 면적분 $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$ 를 구하시오.

문제 10 [20점] 삼차원 좌표공간의 xy -평면에서 극좌표계로 주어진 곡선 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$)을 x 축 둘레로 한 바퀴 회전하여 얻은 곡면을 S 라 하자. 이때 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 3yz - e^{x \sin y}, xy - \cosh x \sin y, -xy + e^x - e^{3z})$$

에 대하여 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, 곡면의 향은 $(2, 0, 0)$ 에서 단위 법벡터가 $(1, 0, 0)$ 이 되도록 정의한다.)