수학 및 연습 2 기말고사

(2017년 7월 28일 11:00-13:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표공간에 있는 두 원기둥

$$x^2+z^2 \le R^2, \quad y^2+x^2 \le R^2$$

의 공통부분의 부피를 구하시오.

문제 2. [20점] 영역 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2+y^2 < 9,\, x>0,\, y>0\}$ 에서 함수

$$f(x,y) = \frac{(\log(x^2+y^2))^2}{4\sqrt{x^2+y^2}}$$

의 중적분 값을 구하시오.

문제 3. [10점] 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin(\log(x^2+1))}{x^2+1} dxdy$$

문제 4. [30점] 평면에서 영역 D 가 극좌표계로

$$D: \quad 1+\sin\theta \;\le\; r \;\le\; 4$$

로 주어졌다고 하자.

(a) [15점] 영역 D 의 기하학적 중심을 $(\overline{x},\overline{y})$ 라 할 때 $\overline{y}$ 를 구하시오.

(b) [15점] $\mathbb{R}^2 - \{(0,3)\}$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(x^3 + \frac{3}{2}xy^2 + e^x\sin y + \frac{x}{x^2+(y-3)^2},\, \frac{1}{2}y^3 + e^x\cos y + \frac{y-3}{x^2+(y-3)^2}\right)$$

에 대하여, $\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ 를 구하시오. (단, $\mathbf{n}$ 은 표준 단위법벡터장이다.)

문제 5. [20점] 좌표평면에서 주어진 폐곡선 $C:\ (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \quad (x \ge 0)$ 에 대하여, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (y^2 - x^2y)\,dx + \left(x + xy^2\right) dy$$

문제 6. [20점] 좌표평면의 제일사분면에서 데카르트 곡선 $C:\ x^3+y^3 = 3xy$, x축 그리고 y 축으로 둘러싸인 영역 D 의 넓이를 구하시오. (Hint : 곡선은 $y=tx$ 를 이용한 매개화를 생각해보자.)

문제 7. [20점] 매개화된 곡면

$$S: \quad X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

의 밀도함수가 $\mu(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ 일 때, S의 질량을 구하시오.

문제 8. [20점] 곡면 $X:\ z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(1 \le z \le 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x,y,z) = x^2z$ 의 평균값을 구하시오.

문제 9. [20점] 공간의 제일팔분체에 있는 두 구면 사이의 영역

$$R: \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$$

에 대하여, 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ 가 경계면 ∂R에서 빠져나오는 플럭스를 구하시오.

문제 10. [20점] 반타원면 $S: x^2+y^2+4z^2 = 4,\ z \ge 0$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{x+z} - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - \cos(yz))\mathbf{j} + (\sin(xz) - e^{x+y-z})\mathbf{k}$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, S 의 향은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \ge 0$ 되도록 정한다.)