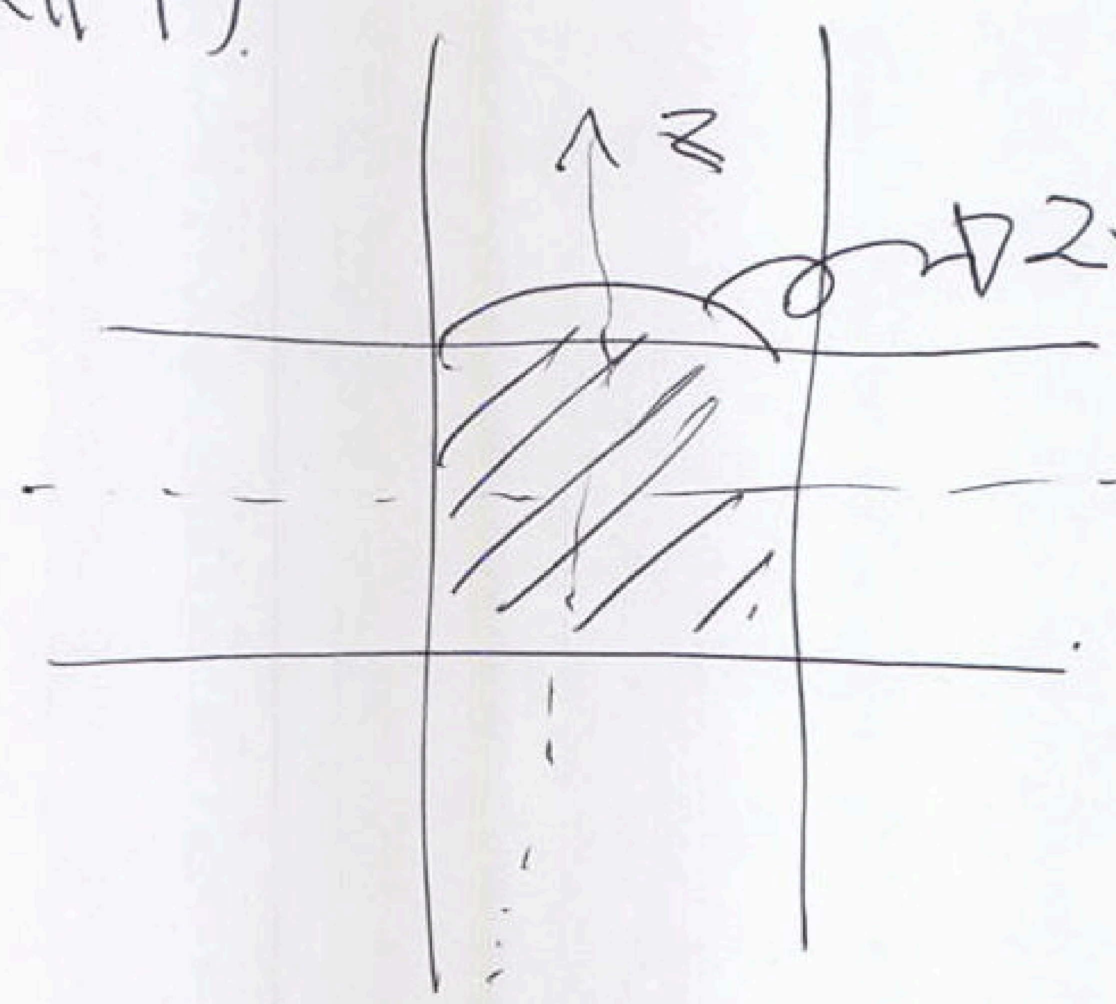
2017년 계절학기 [수학 및 연습 2] 기말고사

채점기준

문제 1)



$x=r$인 단면을 생각하면

단면의 넓이는 $2^2(\sqrt{R^2-x^2})^2$ 이다. 10

카발리에리의 원리를 이용하면

$$\text{부피} = \int_{-R}^{R} \left(2\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx$$

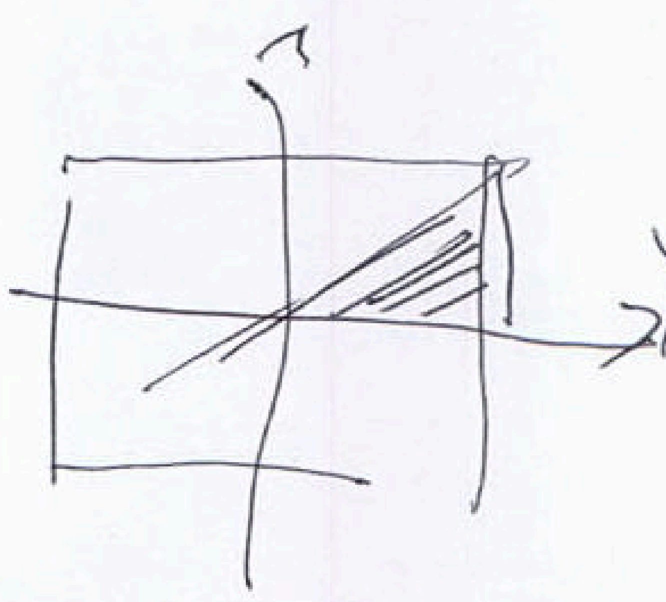
$$= \frac{16}{3}R^3 \text{ 이다.}$$ 10

※ 대칭성을 이용해서 구했으나 마지막에 n배 해 주는것을 실수한경우 5점 감점.

※ 원기둥 좌표계나 직교좌표계를 이용한경우 범위를 옳게 설정한 경우 10점, 답을 옳게 구하면 20점 만점.

<별해>. 직교 좌표계 이용

$$16 \times \int_0^R \int_0^z \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\,dy\,dz$$



×16.

원기둥 좌표계 이용

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}}^{\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}} r\,dz\,d\theta\,dr = \iiint_{x^2+y^2\le R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz\,dV$$

2.

$$\iint_D f(x,y)\, dV_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \frac{(\log(r^2))^2}{4r} \cdot r \, dr d\theta$$ 10

$$= \frac{\pi}{2} \int_2^3 (\log r)^2 \, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left[r(\log r)^2 \right]_2^3 - \int_2^3 2 \log r \, dr \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[3(\log 3)^2 - 2(\log 2)^2 - 2\left[r \log r - r \right]_2^3 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[3(\log 3)^2 - 2(\log 2)^2 - 2\left(3\log 3 - 3 - 2\log 2 + 2 \right) \right]$$

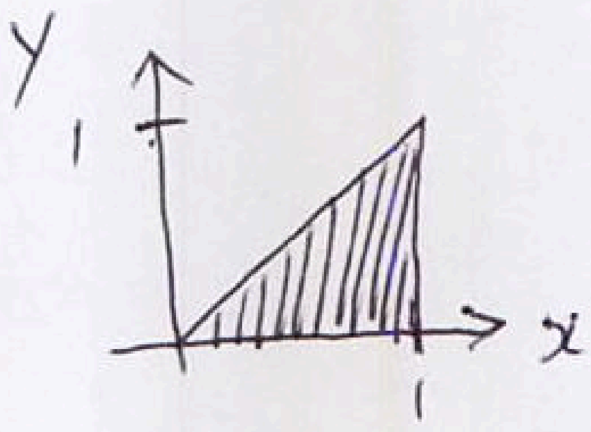
$$= \frac{\pi}{2} \left[3(\log 3)^2 - 2(\log 2)^2 - 6\log 3 + 4\log 2 + 2 \right]$$ 10

ⓐ 극좌표로 변환할때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3$ 5 , 야코비 행렬식 의 절대값 r 5

3.

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin(\log(x^2+1))}{x^2+1} \, dx dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin(\log(x^2+1))}{x^2+1} \, dy dx$$ 5

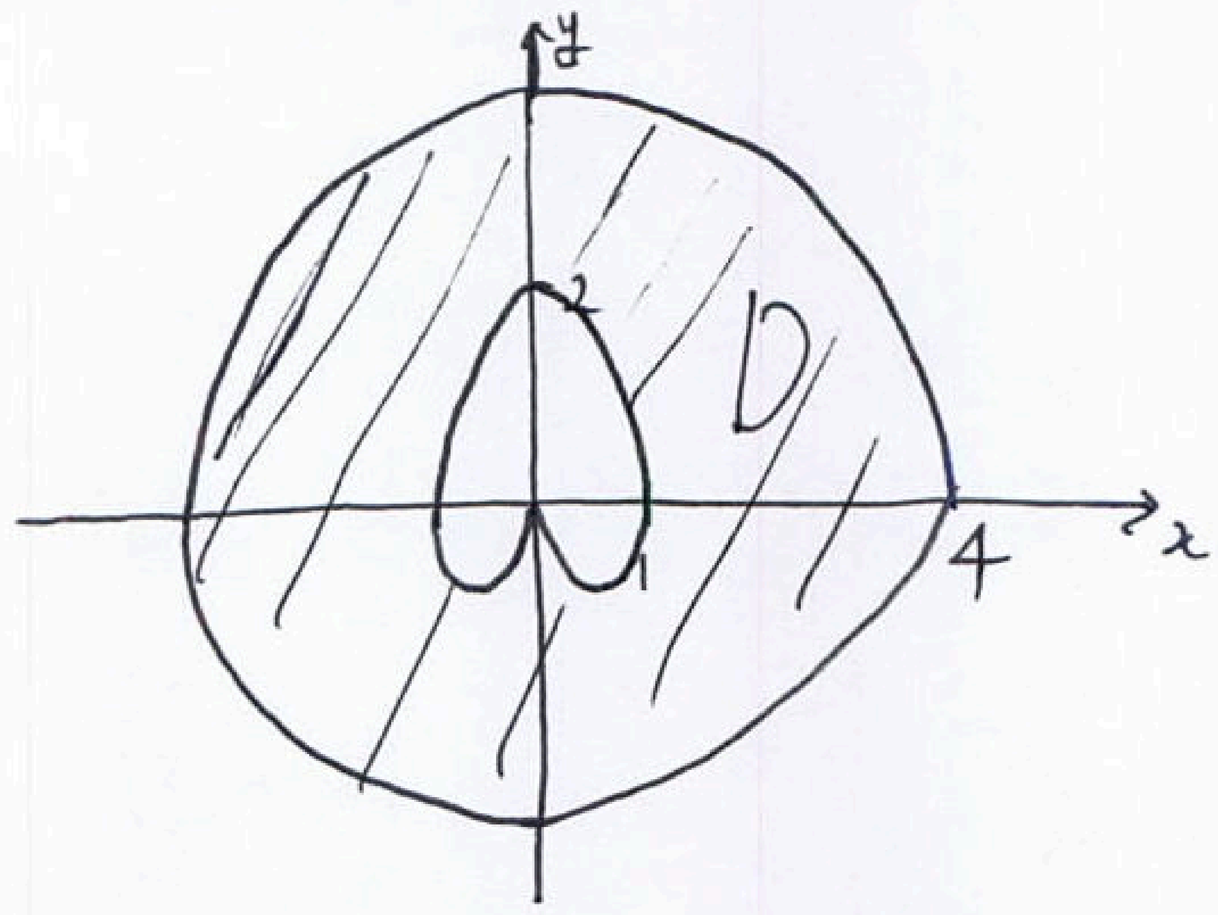
푸비니 정리



$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \sin(\log(x^2+1)) \, dx \qquad \log(x^2+1) = t \text{ 치환} \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sin t \, \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos t \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\log 2)\right)$$ 5

4. (a)



$$\mathrm{Area}(D) = \int_0^{2\pi}\int_{1+\sin\theta}^{4} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (15 - \sin\theta - \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{29}{2}\pi \quad \lrcorner +5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \iint_D y\,dV_2 = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \int_0^{2\pi}\int_{1+\sin\theta}^{4} r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \int_0^{2\pi} \left(21 - \sin\theta - \sin^2\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)}\cdot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{5}{58} \quad \lrcorner +10.$$

- $\frac{1}{\mathrm{Area}(D)}\cdot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ 계산이 틀린 경우 (-3)

4. (b)

$$\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\partial D} \left(x^3+\frac{3}{2}xy^2+e^x\sin y,\ \frac{1}{2}y^3+e^x\cos y\right)\cdot \mathbf{n}\, ds \quad \cdots \text{(i)}$$

$$+\int_{\partial D}\left(\frac{x}{x^2+(y-3)^2},\ \frac{y-3}{x^2+(y-3)^2}\right)\cdot \mathbf{n}\, ds \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$\text{(i)} = \iint_D 3(x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad (\text{by 발산정리})$$ +3

$$= \int_0^{2\pi}\int_{1+\sin\theta}^{4} 3r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{3\cdot 4^3-\frac{3}{4}(1+\sin\theta)^4\right\}d\theta$$

$$= \frac{6039}{16}\pi$$

+7

$$\text{(ii)} = 2\pi \qquad (\text{by 가우스 정리},\ \because (0,3)\in D)$$ +5

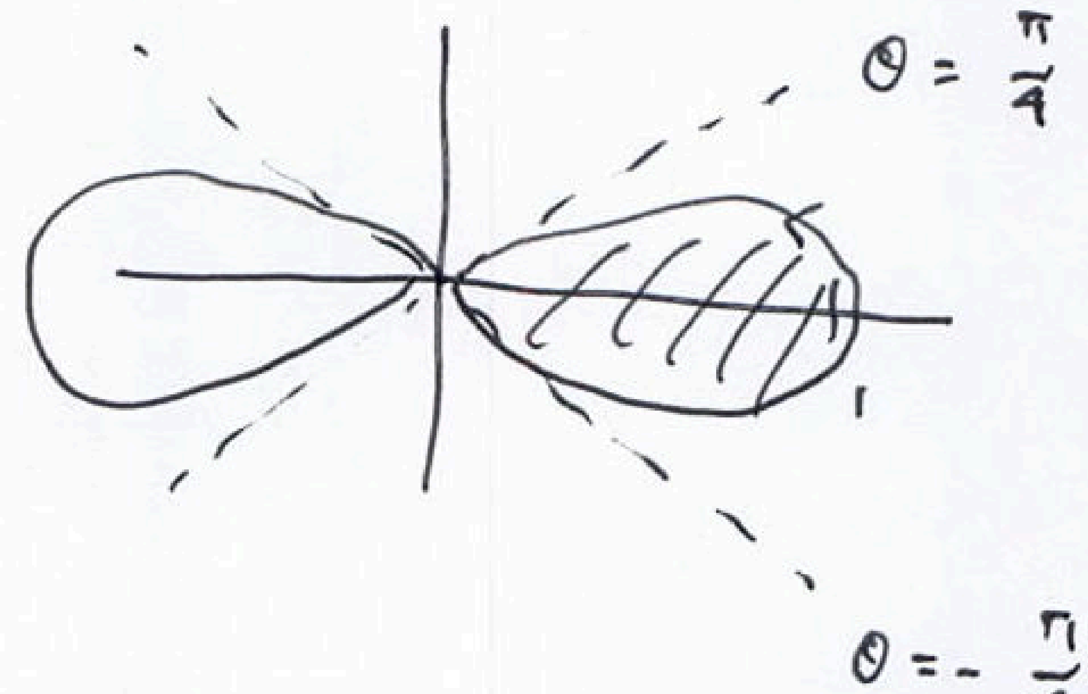
따라서 $\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{6071}{16}\pi$.

5. $C : (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 . \quad x \geq 0.$

$x = r\cos\theta . \quad y = r\sin\theta.$

$r^4 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta.$

$\Rightarrow \quad r^2 = \cos 2\theta .$



+5점

그린 정리에 의해,

$$\int_C (y^2 - x^2y)\,dx + (x + xy^2)\,dy = \iint_D (x^2+y^2-2y+1)\,dx\,dy.$$

$$D = \{ (r.\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta},\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \}$$

+5점

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} (r^2 - 2r\sin\theta + 1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3}\sin\theta + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta.$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos^2 2\theta}{4} - \frac{2}{3}(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta.$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1+\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta - \frac{2}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\,d\theta.$$

$$= \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\sin 4\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4}.$$

$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{16} \quad \left((\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta \text{ 는 기함수} \right).$ +10점

6. $C : x^3 + y^3 = 3xy.$ $\qquad y = tx.$

C.

$$x^3 + t^3 x = 3t x^2.$$

$$x^3(t^3+1) = 3t x^2.$$

$$x = \frac{3t}{t^3+1} \qquad y = \frac{3t^2}{t^3+1} \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}. \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3(2t-t^4)}{(t^3+1)^2}$$

D의 넓이 $= \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$

$$= \frac{3}{2}\int_0^\infty \left(\frac{3t^2}{t^3+1}\cdot\frac{(2-t^3)}{(t^3+1)^2} - \frac{3t^2}{t^3+1}\,\frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2} \right) dt.$$ +10점

$$= \frac{3}{2}\int_0^\infty \left(\frac{2-u}{(u+1)^3} - \frac{1-2u}{(u+1)^3} \right) du. \qquad (t^3 = u)$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(u+1)^2} = \frac{3}{2}.$$ +10점

※ x 와 y 를 t 로 매개화하고, 그린 정리의 결과를 이용해 적분식을 t 로 정확히 쓰면 10점.

※ 적분식에서 위끝, 아래끝이 틀릴 경우 0점.

#7. $X_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$

$X_r \times X_\theta = (\sin\theta, -\cos\theta, r)$

$|X_r \times X_\theta| = \sqrt{r^2+1}$ ┘ 5점

질량은 $\iint_S \mu\, dS$ 이다. ┘ 5점 (표현이 정확해야 함)

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta$ ┘ 5점

$= \frac{8}{3}\pi$ ┘ 5점

#8. $X(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2$

로 X를 매개화 할 수 있다.

$dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$ ┘ 5점

$Vol(S) = \iint_X dS = \iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} \sqrt{2}\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = 3\sqrt{2}\pi$ ┘ 5점

$\iint_X f\, dS = \iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2\theta \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{31}{5}\sqrt{2}\pi$ ┘ 5점

f의 X에서의 평균값은

$\frac{\iint_X f\, dS}{Vol(S)} = \frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \times \frac{31}{5}\sqrt{2}\pi = \frac{31}{15}$ ┘ 5점.

#9.

[1] 발산정리를 이용한풀이

$$\mathrm{div}\,\mathbb{F} = 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ ⌟ 5점

$$\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iiint_R \mathrm{div}\,\mathbb{F}\, dV_3$$ (∵ 발산정리) ⌟ 5점 (표현이 정확해야 점수부여)

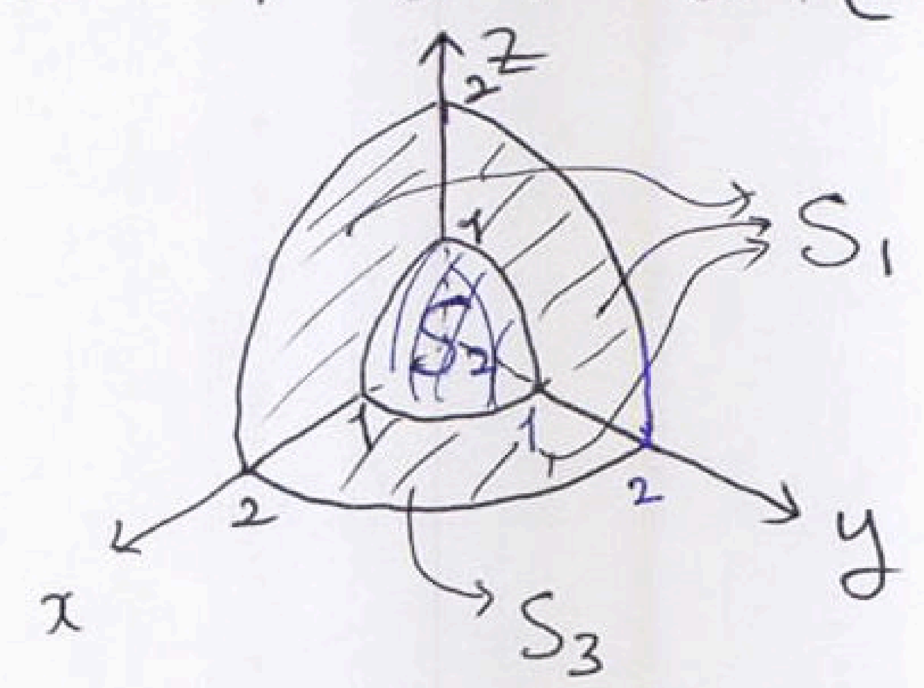
$$= \iiint_R 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 4\rho\cdot\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\varphi\, d\varphi \int_1^2 \rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{15}{2}\pi$$ ⌟ 10점

[2] 벡터장의 면적분의 정의를 이용한풀이



∂R을 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$로 나누어 표현하자.

$$S_1 = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ z=0\} \cup \{(x,y,z) : 1 \le y^2+z^2 \le 4,\ x=0\} \cup \{(x,y,z) : 1 \le x^2+z^2 \le 4,\ y=0\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$$

$$S_3 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$$

각 곡면의 향을 ∂R에서 외향법벡터로 주었을 때,

$$\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} + \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} + \iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$ ⌟ 5점 (식으로 분명하게 표현되어야 하고 향이 정확해야함.)

S_1의 법벡터는 위치벡터장 $\mathbb{r}$과 수직이고 $\mathbb{F}$는 $\mathbb{r}$과 나란하므로

$$\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot \mathbb{n}\, dS = 0$$ ⌟ 5점 (이유를 서술해야함)

$$\iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot \mathbb{n}\, dS = \iint_{S_2} \|\mathbb{r}\|\mathbb{r}\cdot(-\mathbb{r})\, dS = -\iint_{S_2} dS = -\frac{\pi}{2}$$ ⌟ 5점

$$\iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot \mathbb{n}\, dS = \iint_{S_3} \|\mathbb{r}\|\mathbb{r}\cdot \frac{\mathbb{r}}{\|\mathbb{r}\|}\, dS = \iint_{S_3} \|\mathbb{r}\|^2 dS = 4\iint_{S_3} dS = 8\pi$$ ⌟ 5점

따라서 $\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \frac{15}{2}\pi$

10. 두 가지 풀이가 있음.

· 첫번째 풀이.

스토크스 정리에 의해 $\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \int_{\partial S} \mathbb{F}\cdot ds$. +5점.

(∂S의 향은 반시계 방향으로 줌).

$\partial S = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=4\}$ 이므로, $X(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$, $(0\le\theta\le 2\pi)$ 는 +5점.

∂S의 매개화가 된다. (향 고려) 이를 이용하면,

$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \int_{\partial S}\mathbb{F}\cdot ds = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(X(\theta))\cdot X'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(e^{2\cos\theta} - 8\sin^3\theta,\ 8\cos^3\theta - 1,\ -e^{+2(\cos\theta+\sin\theta)}\right)\cdot(-2\sin\theta,\ 2\cos\theta,\ 0)\,d\theta$$ +5점.

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin\theta\, e^{2\cos\theta} + 16(\sin^4\theta + \cos^4\theta) - 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \left[e^{2\cos\theta} - 2\sin\theta\right]_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi} 3 + \cos 4\theta\, d\theta$$

$= 24\pi$ 임을 알 수 있다. +5점.

· 두 번째 풀이.

스토크스 정리의 응용에 의해 $\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$. +5점.

(여기서 $D = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2\le 4\}$, D의 향은 (0,0,1)과 평행).

$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_D (A,\ B,\ \underline{3(x^2+y^2)})\cdot(0,0,1)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^3\,dr\,d\theta$$ ↳ 이 부분 맞았으면 +5점.

$= 24\pi$. · D의 향을 맞게 썼으면 +5점.