2017년 2학기 수학 및 연습 2
기말고사 채점기준.

1. 벡터장 F는 잠재함수 $\varphi(x,y,z) = z^2 \sin(xy) + 2x \arctan(yz)$ 를 갖는다.

+10.

선 적분의 기본 정리에 의해

$$\int_X F \cdot ds = \varphi(X(\pi)) - \varphi(X(0))$$

+5

$$= \varphi(-\pi, \tfrac{1}{4}, 4) - \varphi(0,0,0)$$

$$= -8\sqrt{2} - \frac{\pi^2}{2}$$

+5.

* 마지막 답을 계산할 때, 사소한 계산 실수는 인정.

(ex. $16\sin(-\frac{\pi}{4}) - 2\pi \arctan(1)$ ~~이라고만 써서~~ 구한 뒤 그 뒤 과정에서 계산실수를 해도 정답으로 인정.)

2. $\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}\sin^{-1}y}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}\,dx\,dy$

$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin 2x} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}\,dy\,dx$ ① (∵ 푸비니 정리)

10점

$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}}\,dy\,dx$

$= \left[\sin^{-1}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi/4}$

$= \pi/6$

20점.

채점기준 :

푸비니 정리를 이용하여 식 ①을 얻는 것까지 10점,

남은 계산이 모두 맞으면 20점.

#3.

$u = x+2y$, $v = x-y$ 로 치환하자. 이 때, $x = \frac{u+2v}{3}$, $y = \frac{u-v}{3}$ 이므로,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

이고, 그 범위는 $-2v \le u \le v$, $1 \le v \le 2$ 이다. 치환적분법에 의해

$$\iint_R e^{\frac{x+2y}{x-y}}\,dxdy = \int_1^2 \int_{-2v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{3}\,dudv$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3}\left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-2v}^{v} dv$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3} \cdot (e \cdot v - e^{-2}v)\,dv$$

$$= \frac{1}{2}(e - e^{-2})$$

이다.

* 채점기준

1. 야코비안 행렬(식)을 잘 구하여, 치환적분식에 올바르게 대입 … 5점.
2. 변수 치환 후, 그 적분 영역을 올바르게 구한 경우 … 5점
3. 올바르게 계산하여 답을 잘 구한 경우 … 10점.
4. 답안과 다르게 치환한 경우, 그 치환에 대하여 1~3의 채점기준을 따름.
   * 단, 일대일 가역함수인 경우에만 해당, 아닌경우 점수없음 (ex) $u = x-y$, $v = x-y$)
5. 치환적분을 사용하지 않는 경우, 그 계산과 답이 맞아야 점수 인정. 그 외 0점.
6. (채점 기준 4의 예)

① $u = x+y$, $v = x-y$, $1 \le v \le 2$, $-v \le u \le v$, $|\det G'| = \frac{1}{2}$

② $u = x-y$, $v = -y$, $0 \le v \le u$, $1 \le u \le 2$, $|\det G'| = 1$

③ 극좌표계 치환; $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$, $\frac{1}{\cos\theta - \sin\theta} \le r \le \frac{2}{\cos\theta - \sin\theta}$

4. 각종 좌표계를 이용하여 다음과 같은 적분식을 얻을 수 있다.

1) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+r^2}^{1+\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$ (원기둥좌표계)

2) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{z-1}} r\,dr\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_2^{1+\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-(z-1)^2}} r\,dr\,dz\,d\theta = \pi\left[\int_1^2 (z-1)\,dz + \int_2^{1+\sqrt{2}} (1+2z-z^2)\,dz\right]$ (원기둥좌표계/카발리에리의 원리)

3) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sec\varphi}^{\sqrt{2}} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr\,dz\,d\theta$ ($z \mapsto z+1$ 평행이동 후 구면좌표계 + 원기둥좌표계)

4) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\arccos\frac{-1+\sqrt{1+4\rho^2}}{2\rho}} \rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta$ (구면좌표계)

5) $\int_0^1\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz + \pi\int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2)\,dz$ ($z \mapsto z+1$ 평행이동 후 직교좌표계)

6) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$ (구면좌표계)

10점

적분하여 영역의 부피를 얻을 수 있다. 답 : $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{7}{6}\pi$

10점

- 채점기준

1. 적분식을 올바르게 적은 경우 +10점

2. 부피를 올바르게 구한 경우 +10점

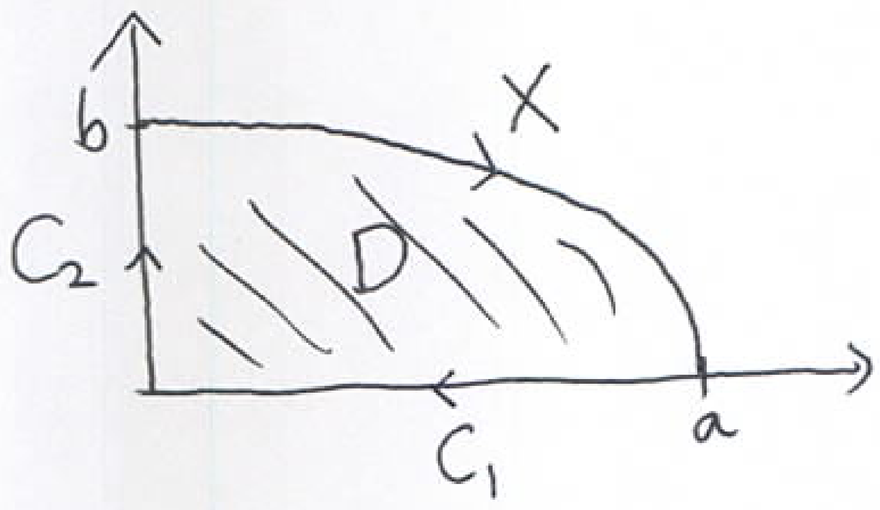
3. 그 외 부분점수 없음.

5.

풀이 I.

$t=\tan\theta$로 두면 $X(t)=X(\tan\theta)=(a\sin 2\theta,\ b\cos 2\theta)$ 이므로 $(0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$

곡선 X는 타원의 일부이다.



그린 정리에 의해 $\int_{X\cup C_1\cup C_2} x\,dy = -\iint_D dV_2 = -\text{area}(D)$. +15 ①

따라서 $\int_X x\,dy = -\int_{C_1} x\,dy - \int_{C_2} x\,dy - \text{area}(D)$ 이다.

D는 타원의 $\frac{1}{4}$이므로 $\text{area}(D)=\frac{1}{4}ab\pi$,

$\int_{C_1} x\,dy = \int_{C_2} x\,dy = 0$ 이므로 $\int_X x\,dy = -\frac{1}{4}ab\pi$. +5

$(dy=0)$ $(x=0)$

풀이 II.

$x=\frac{2at}{1+t^2}$, $dy=\frac{-4bt}{(1+t^2)^2}dt$ 이므로

$$\int_X x\,dy = \int_0^1 \frac{-8abt^2}{(1+t^2)^3}dt \quad +5 ②$$

$$= -\frac{1}{4}ab\pi \quad +15 ③$$

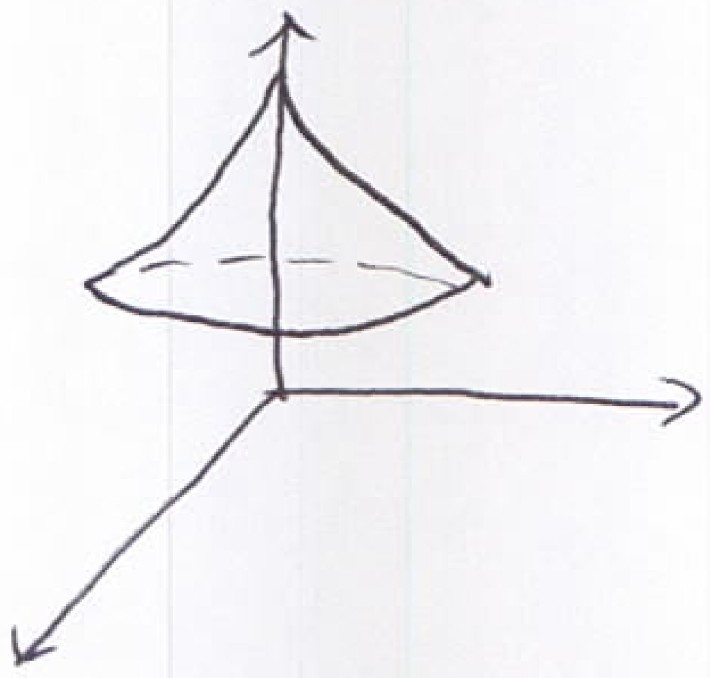
채점기준

① 에서
- 향을 반대로 계산하여 부호가 틀린 경우 −5
- 경계 (C_1, C_2)를 모두 고려하지 않았을 경우 −5.

② 에서
- $\int_X x\,dy$를 일변수 적분으로 잘 치환한 경우에만 5점.

③ 에서
- 답 틀린경우 점수 없음
- $\int_X x\,dy = \int_X -y\,dx = \frac{1}{2}\int_X x\,dy - y\,dx$ 등으로 잘못 써서 계산한 경우 −5.

6번



$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=1,\ x^2+y^2 \le 4\}\ (n \cdot k \le 0)$

$R := \mathrm{int}(S \cup D)$

$$\iint_S F \cdot dS + \iint_D F \cdot dS = \iiint_R \mathrm{div} F \, dV$$ 5

$$\iint_D F \cdot dS = \iint_D (x,y,z) \cdot (0,0,-1)\, dV = \iint_D -z \, dV = -4\pi$$ 10

$$\iiint_R \mathrm{div} F \, dV = 3 \iiint_R dV = 3 \cdot \mathrm{vol}(R)$$

$$\mathrm{vol}(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^{e^{4-r^2}} r \cdot dz\, dr\, d\theta = \pi(e^4-5)$$

$$\therefore \iint_S F \cdot dS = 3\pi(e^4-5) + 4\pi = 3\pi e^4 - 11\pi$$ 20

* D를 고려하지 않고 발산 정리를 쓴 경우 0점
* 계산이 다 맞았지만 답이 틀린경우 -5점

(두번째 풀이)

$$X(x,y) = (x, y, e^{4-x^2-y^2}), \quad N = X_x \times X_y = (2x e^{4-x^2-y^2}, 2y e^{4-x^2-y^2}, 1)$$ 5

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S (x, y, e^{4-x^2-y^2}) \cdot (2x e^{4-x^2-y^2}, 2y e^{4-x^2-y^2}, 1)\, dV$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} (2x^2+2y^2+1) e^{4-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2+1) e^{4-r^2}\, r \cdot dr\, d\theta$$ 10

$$= 3\pi e^4 - 11\pi$$ 20

* 벡터장의 면적분으로 쓰지 않는 경우 0점

#7. $D = \{(u,v) : u^2 + \frac{v^2}{4} \leq 1\}$

$X = (uv,\ 2u+v,\ 2u-v)$

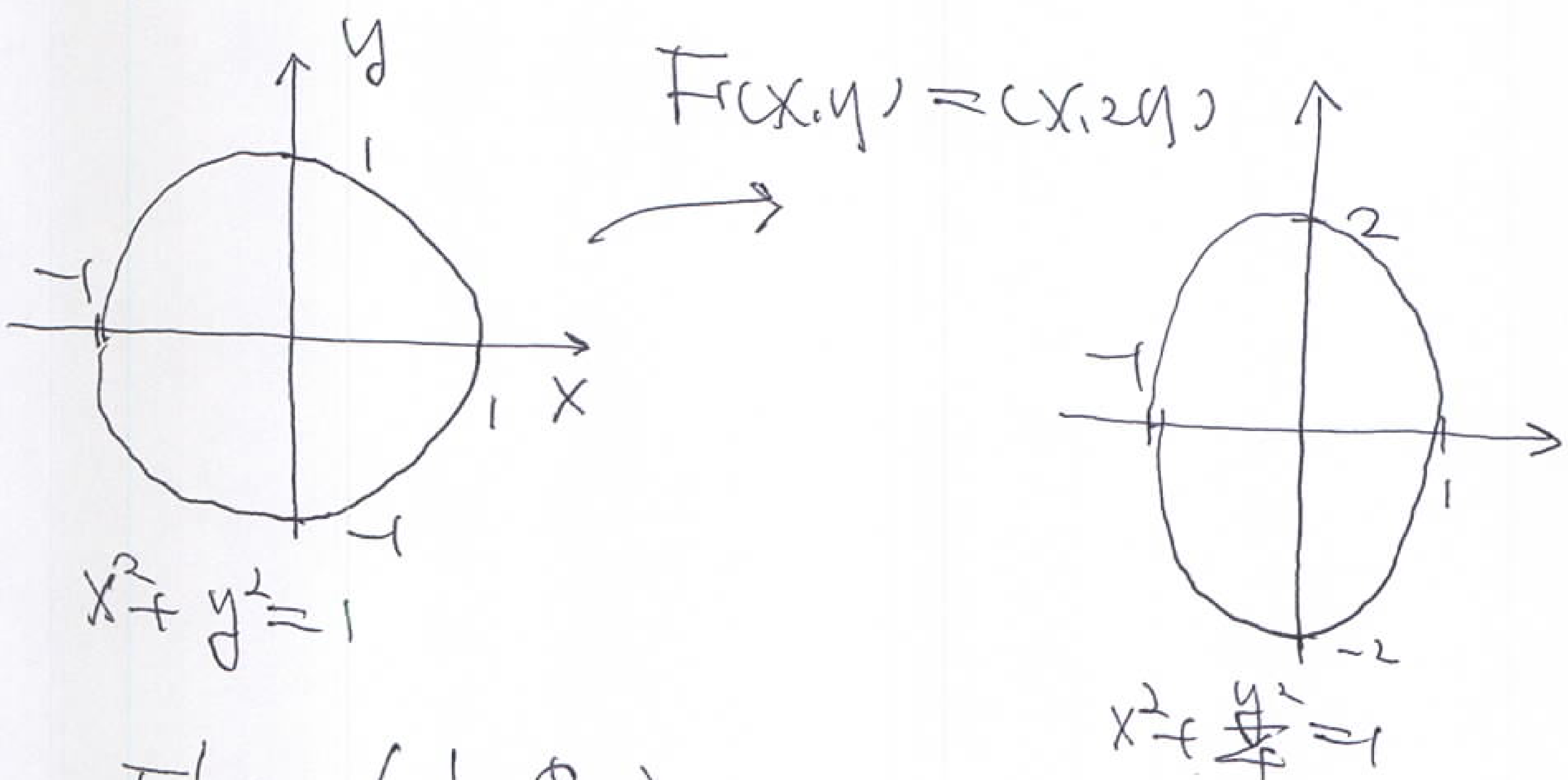
$X_u = (v, 2, 2)$

$X_v = (u, 1, -1)$

$X_u \times X_v = (-4,\ 2u+v,\ v-2u) = N(u,v)$

$|N| = \sqrt{8u^2+2v^2+16}$

$\therefore$ Area $X = \iint_D \sqrt{8u^2+2v^2+16}\, du\, dv$



$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |F'| = 2$

$\therefore$ Area $X = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{8x^2+8y^2+16} \cdot 2\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{r^2+2}\cdot r\, dr\, d\theta$

$= 4\sqrt{2}\pi \cdot \int_2^3 \sqrt{t}\, dt$

$= 8\sqrt{6}\pi - \frac{32}{3}\pi$

* $|N|$을 제대로 구하면 10점.

치환적분 등을 이용해서 답을 제대로 구해내면 10점 추가

#8. $S : \rho = 1+\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi)$
를 빠져나가는 벡터장 $F(x,y,z) = (xy^2+e^z)i + (yz^2+\sin x)j + (zx^2+\cos y)k$
의 양을 구해라.

(풀이) $\operatorname{div} F = y^2+z^2+x^2$ 이므로, 폐곡면 S를 빠져나가는
F의 양은

$$\iint_S F\cdot n\, dS = \iiint_{\mathrm{int}S} \operatorname{div} F\, dV_3 \quad \text{(발산정리)} \quad +5$$

이다. $\mathrm{int}\,S$를 구면 좌표계로 치환하면
$\{(\rho,\varphi,\theta) : 0 \le \rho \le 1+\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \quad +5$

이므로

$$\iiint_{\mathrm{int}S} \operatorname{div} F\, dV_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} \operatorname{div} F\cdot \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \quad +5$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} \rho^4 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \frac{1}{5}(1+\cos\varphi)^5 \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{2\pi}{30}\cdot\Big[(1+\cos\varphi)^6\Big]_0^{\pi} = \frac{64}{15}\pi. \quad +5$$

#9.

풀이) S'을 공 $\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$과 평면 $\{x+y+z=1\}$의

교집합이라 하자 (즉, 주어진 평면으로 자른 단면).

S'에 향을 원점으로 향하는 방향으로 주면

$\partial S = \partial S'$이고 ∂S와 $\partial S'$의 향이 같으므로

스토크스 정리의 응용에 의해

$$\iint_S \mathrm{curl}\, F \cdot dS = \iint_{S'} \mathrm{curl}\, F \cdot dS \text{ 이다.}$$

한편, $\mathrm{curl}\, F = (-1,-1,-1)$이고

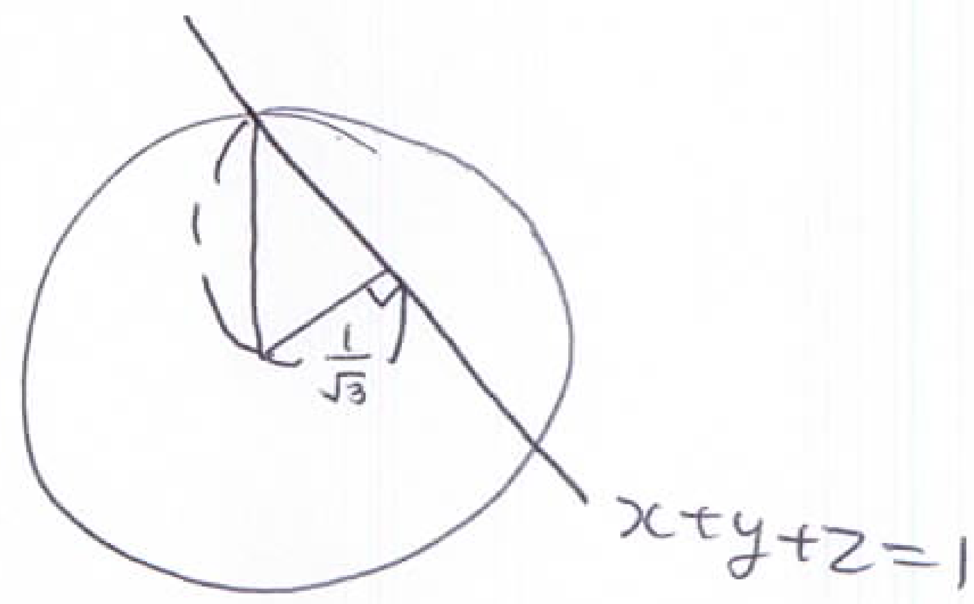
S'의 단위법벡터장이 $\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{=:\vec{n}}$로 주어지므로

$$\iint_{S'} \mathrm{curl}\, F \cdot dS = \iint_{S'} \mathrm{curl}\, F \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \iint_{S'} \sqrt{3}\, dS = \sqrt{3} \cdot \mathrm{Area}(S') \text{ 이다.}$$

이제 S'이 반지름 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$인 원이므로

$\mathrm{Area}(S') = \frac{2}{3}\pi$이고, 따라서



$$\iint_S \mathrm{curl}\, F \cdot dS = \iint_{S'} \mathrm{curl}\, F \cdot dS = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \text{ 이다.}$$

채점기준
- curl F를 맞게 계산했으면 +5점
- 스토크스 정리를 이용하면 +5점
- 답이 맞으면 +10점 (사소한 실수는 −5점)

10.

(풀이 1)

$$F(x,y,z) = \underbrace{(-y,\ x,\ x)}_{=:\ F_1} + \underbrace{(x^2,\ e^y,\ \arctan z)}_{=:\ F_2}$$

$$\operatorname{Curl} F_2 = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \int_X F_2\, ds = 0$$

+10

$$\int_X F \cdot ds = \int_X F_1 \cdot ds$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin 2t,\ \cos 2t,\ \cos 2t) \cdot (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2 + \cos 2t \cdot \cos t\ dt$$

$\cos 2t \cdot \cos t$ 가 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 대칭

$$= 2\pi$$

+10

(풀이 2)

$\operatorname{Curl} F = (0, -1, 2)$ +5

by stoke's thm, $\int_X F\, ds = \int_S \operatorname{curl} F \cdot dS$

이때, S는 X를 경계로 하는 곡면 +5

$S = \{ (r\cos 2t,\ r\sin 2t,\ r\sin t) \mid 0 \le t \le \pi,\ 0 < r < 1 \}$ 이라 하면,

$$N = (\cos 2t, \sin 2t, \sin t) \times (-2r\sin 2t,\ 2r\cos 2t,\ r\cos t)$$

$$= (r\sin 2t\cos t - 2r\cos 2t \cdot \sin t,\ -2r\sin t\sin 2t - r\cos t\cos 2t,\ 2r)$$

~~$4r\cos 2t\sin 2t)$~~ +5

$$\int_X F \cdot ds = \int_S \operatorname{curl} F \cdot dS$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^1 2r\sin t\sin 2t + r\cos t\cos 2t + 4r\ dr\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2 + \sin t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos t\cos 2t\ dt$$

$$= 2\pi$$ +5

(풀이 3)

$$\int_X F\cdot ds = \int_0^{\pi} (-\sin 2t + \cos^2 2t,\ \cos 2t + e^{\sin 2t},\ \cos 2t + \arctan(\sin t)) \cdot (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ \cos t)\ dt$$ ⌋+5

①,②가 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 대칭

$$= \int_0^{\pi} 2\sin^2 2t \underbrace{-2\sin 2t\cos^2 2t}_{①} + 2\cos^2 2t + 2\cos 2t\cdot e^{\sin 2t} + \underbrace{\cos 2t\cdot \cos t}_{②} + \cos t\cdot \arctan(\sin t)\ dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2 + 2\cos 2t\, e^{\sin 2t} + \cos t\cdot \arctan(\sin t)\ dt$$

$$= 2\pi + \left[e^{\sin 2t} + F(\sin t) \right]_0^{\pi}$$ (F는 $\arctan x$의 원시 함수)

$$= 2\pi$$ ⌋+15