2016년 2학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안.

1. $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ — 8점 (1번째 줄).

$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{0}^{2} \rho^2 \sin\varphi.$ — 6점 (2번째 줄)

$\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r$ — 6점. (3번째 줄).

- 각 줄에서 3개 이상 틀리면 0점

(1개 틀리면 — −2점.)

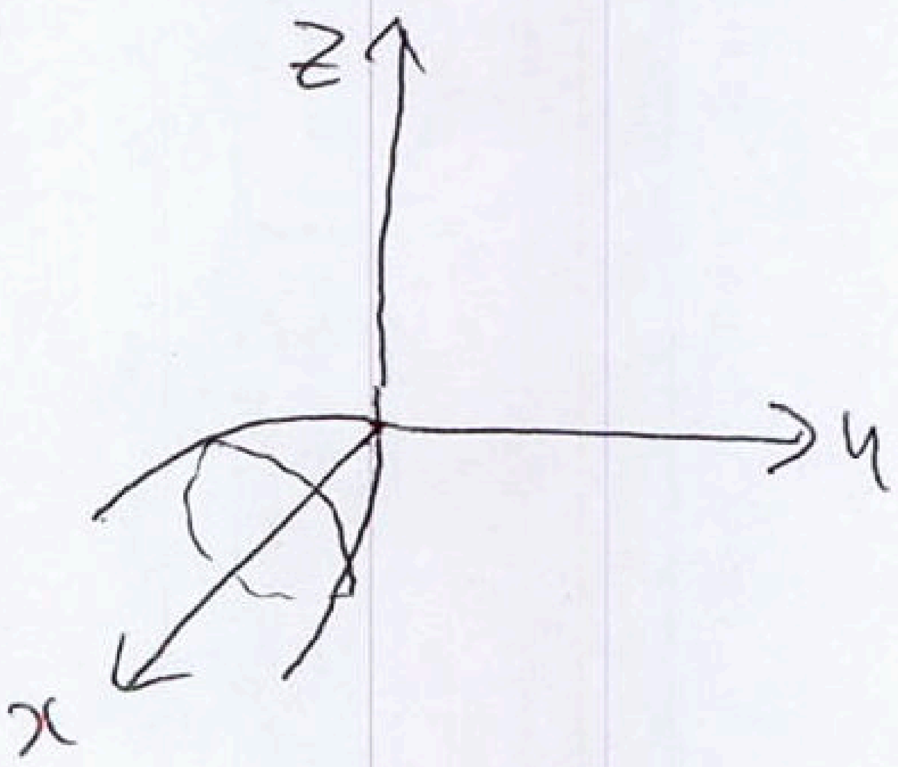
2개 틀리면 — −4점.

2번

I. 적분 범위 : $y^2+z^2 \le x$, $y^2 \le x \le 9$, $-3 \le y \le 3$.

$y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ 로 치환

$\Rightarrow$ $0 \le r \le \sqrt{x}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le x \le 9$.



$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\int_{0}^{9}\int_{-\sqrt{x-y^2}}^{\sqrt{x-y^2}} \sqrt{y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9}\int_{0}^{\sqrt{x}} r \cdot r\, dr\, dx\, d\theta$$

$$\left(\overset{\text{또는}}{=} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{r^2}^{9} r \cdot r\, dx\, dr\, d\theta \right)$$ 10점. $= \dfrac{324}{5}\pi$ 20점

II 푸비니 정리에 의해

$$\int_{-3}^{3}\int_{y^2}^{9}\int_{-\sqrt{x-y^2}}^{\sqrt{x-y^2}} \sqrt{y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{y^2+z^2}^{9} \sqrt{y^2+z^2}\, dx\, dz\, dy$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{y^2+z^2}\,(9-y^2-z^2)\, dz\, dy$$ 5점

$y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ 로 치환

$$\Rightarrow (\text{준식}) = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} (9r - r^3) \cdot r\, dr\, d\theta$$ 10점

$$= \frac{324}{5}\pi$$ 20점.

* 적분범위 틀리면 부분점수 없음 .

* II 와 다른 형태의 푸비니 정리 이용은 I 의 기준으로 채점 .

#3

$D_n f = \text{grad} f \cdot n$ 이고 $\text{grad} f = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ 이다

5

C가 감싸고 있는 영역을 D라 하고, $B := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \varepsilon^2\} \subset D$ 라 하면 $\text{grad} f$는 $D-B$에서 연속이므로 발산정리에 의해

$$\iint_{D-B} \text{div}(\text{grad} f)\, dV = \int_C \text{grad} f \cdot n\, ds - \int_{\partial B} \text{grad} f \cdot n\, ds$$

이다. 그런데 $\text{div}(\text{grad} f) = 0$ 이므로,

10

$$\int_C \text{grad} f \cdot n\, ds = \int_{\partial B} \text{grad} f \cdot n\, ds$$
$$= \int_{\partial B} \frac{2(x,y)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{(x,y)}{\varepsilon}\, ds$$
$$= \int_{\partial B} \frac{2}{\varepsilon}\, ds$$
$$= \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 4\pi$$

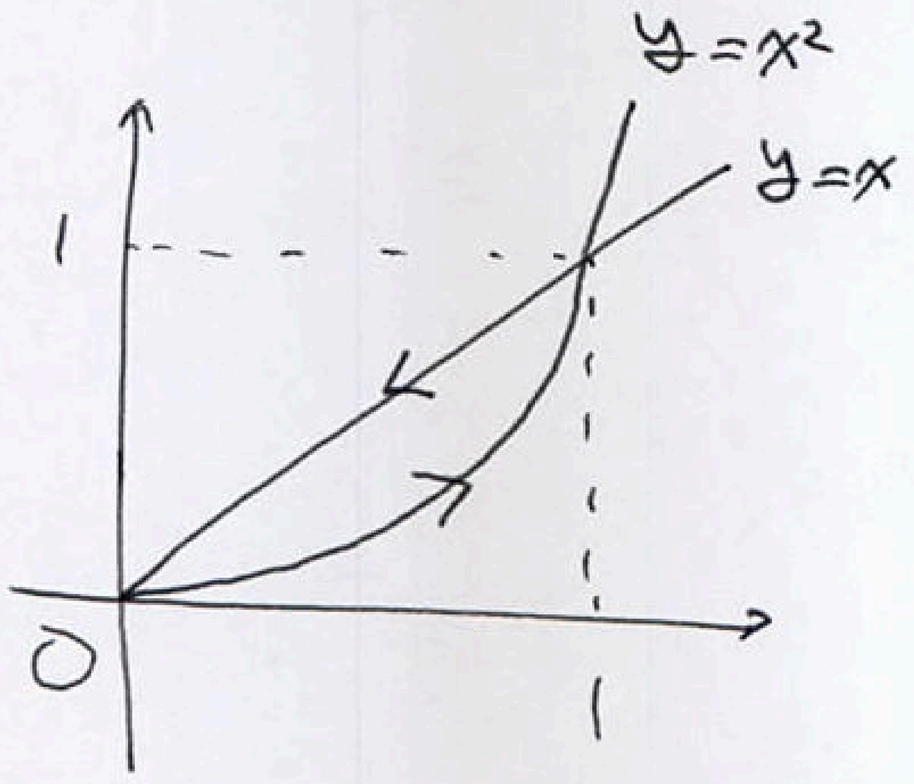
이다.

10

* 올바르게 가우스정리를 쓰면 점수 인정.

* 올바르게 선적분의 정의를 이용하여 푼 경우 점수 인정.

4



그린 정리에 의하여

$$\int_C \left(e^{\arctan x} + (xy+1)e^{xy}\right)dx + \left(x^3 - xy + x^2 e^{xy}\right)dy$$

$$= \iint_{\text{int}\,C} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - xy + x^2 e^{xy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\arctan x} + (xy+1)\right) dV_2$$

$$= \iint_{\text{int}\,C} 3x^2 - y \, dV_2 \quad \cdots (*)$$

$\rfloor +10$

푸비니 정리에 의하여

$$(*) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 3x^2 - y \, dy\, dx = \frac{1}{12}$$

$\rfloor +10$

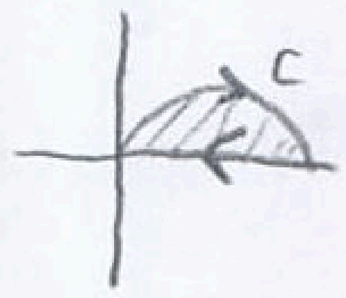
* rot, 그린정리의 항, 푸비니 정리 등에서 부호가 틀리면 10점 감점

5. $\operatorname{rot} F(x,y) = D_1(ye^{x^2+y^2}+2x+y) - D_2(xe^{x^2+y^2}+x-2y)$

$= [2xye^{x^2+y^2}+2] - [2xye^{x^2+y^2}-2] = 4$ 」 5 점.

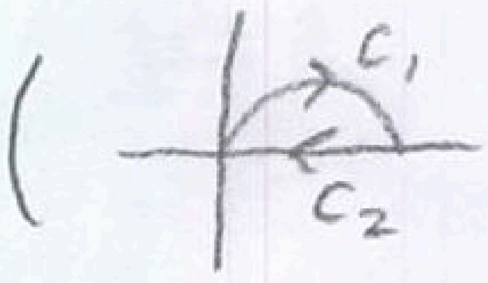
C 의 향이 시계 방향이므로, 그린 정리에 의해

$\int_C F\cdot ds = -\iint_D \operatorname{rot} F\, dV_2 = -4\iint_D dV_2 = -4\cdot \operatorname{area}(D)$ 」 5 점.

(여기서, D 는 

색칠한 영역)

$\operatorname{area}(D) = -\left(-\int_C y\,dx\right)$ ($\because$ C 가 시계방향이므로)

$= \int_{C_1} y\,dx + \int_{C_2} y\,dx$ (

)

$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt + 0$ ($\because$ $y=0$ on C_2)

$= \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = 2\pi + 0 + 2\pi\cdot\frac{1}{2} = 3\pi$

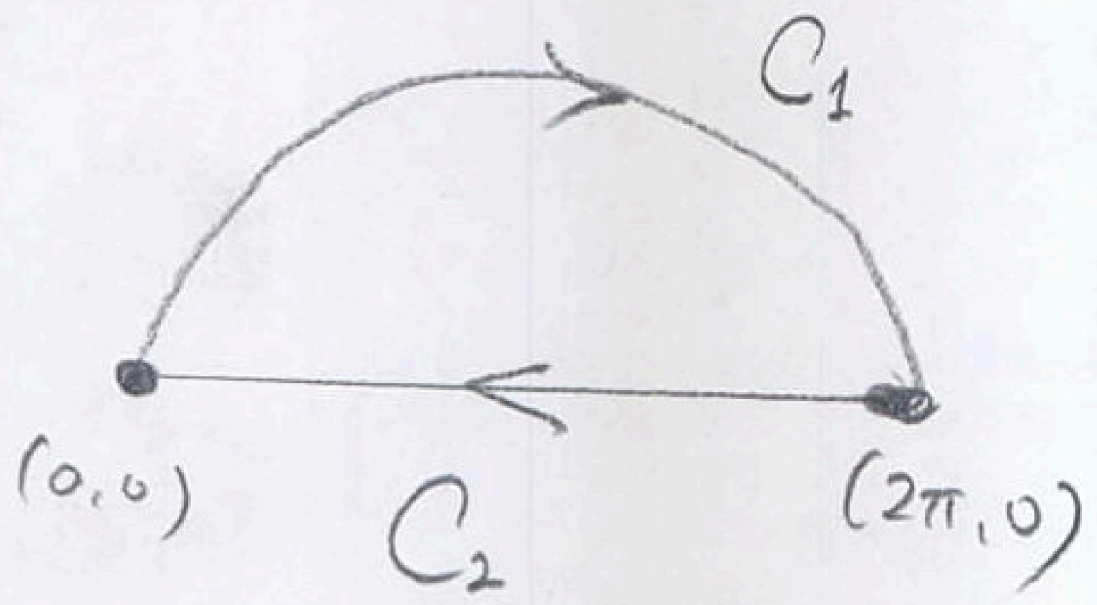
(이 외에도 다양한 방법으로 area(D) 맞게 구하면 됩니다.)

$\therefore \int_C F\cdot ds = -4\cdot\operatorname{area}(D) = -12\pi$ 」 10 점

* area(D) 계산 없이 외워서 쓴 경우 −5 점.
area(D) = −3π 가 나온 경우 −5 점.

---

* 선적분으로 직접 계산한 경우 : 답은



$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -12\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4\pi^2} + 2\pi^2$

$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4\pi^2} - 2\pi^2$

위의 두 선적분에 각 10점. (부분점수 없음)

#6

곡면 S 매개화 : $S(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \sqrt{\frac{r^2}{9}-1}\right)$

┘5점.

그러면 $\begin{cases} S_r(r,\theta) = \left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{r}{3\sqrt{r^2-9}}\right) \\ S_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0) \end{cases}$ 이므로

$$N(r,\theta) = S_r \times S_\theta = \left(-\frac{r^2\cos\theta}{3\sqrt{r^2-9}},\ -\frac{r^2\sin\theta}{3\sqrt{r^2-9}},\ r\right)$$

$$|N(r,\theta)| = \frac{1}{3}r\sqrt{\frac{10r^2-81}{r^2-9}}\,drd\theta$$

┘10점

적분 범위는 $0 \le z \le 1$ 에서 $z = \sqrt{\frac{r^2}{9}-1}$ 이므로, $3 \le r \le 3\sqrt{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\therefore (S\text{의 질량}) = \iint_S \mu\, dS = \int_0^{2\pi}\int_3^{3\sqrt{2}} z \cdot |N(r,\theta)|\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_3^{3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r^2}{9}-1} \cdot \frac{1}{3}r\sqrt{\frac{10r^2-81}{r^2-9}}\,drd\theta$$

┘15점

$$= \frac{2\pi}{9}\int_3^{3\sqrt{2}} r\sqrt{10r^2-81}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{9}\left[\frac{1}{3}(10r^2-81)^{\frac{3}{2}}\right]_3^{3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{5}(11\sqrt{11}-1)$$

┘20점.

* 다른 매개화를 사용하더라도, 예를 들어

$$S(z,\theta) = \left(3\sqrt{1+z^2}\cos\theta,\ 3\sqrt{1+z^2}\sin\theta,\ z\right)$$

$$S(x,y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{\frac{x^2+y^2}{9}-1}\right)$$

$$S(\theta,t) = (3\cos\theta\cosh t,\ 3\sin\theta\cosh t,\ \sinh t)$$

등을 사용하더라도, 면적소 계산과 적분 식을 잘 구하고

답이 맞으면 위의 기준과 같이 채점.

7. (a) $\mathbb{F} = (f_1, f_2, f_3)$라고하자. $\Rightarrow h\mathbb{F} = (hf_1, hf_2, hf_3)$이다.

$$\mathrm{curl}(h\mathbb{F}) = (D_2(hf_3) - D_3(hf_2),\ D_3(hf_1) - D_1(hf_3),\ D_1(hf_2) - D_2(hf_1))$$

$$= [(D_2h)f_3 + h(D_2f_3) - (D_3h)f_2 - h(D_3f_2)]\mathbb{i} + [(D_3h)f_1 + h(D_3f_1) - (D_1h)f_3 - h(D_1f_3)]\mathbb{j}$$
$$+ [(D_1h)f_2 + h(D_1f_2) - (D_2h)f_1 - h(D_2f_1)]\mathbb{k}$$ (∵ 라이프니츠 법칙)

$$= [(D_2h)f_3 - (D_3h)f_2]\mathbb{i} + [(D_3h)f_1 - (D_1h)f_3]\mathbb{j} + [(D_1h)f_2 - (D_2h)f_1]\mathbb{k}$$
$$+ h([D_2f_3 - D_3f_2]\mathbb{i} + [D_3f_1 - D_1f_3]\mathbb{j} + [D_1f_2 - D_2f_1]\mathbb{k})$$

$$= (\mathrm{grad}\ h) \times \mathbb{F} + h\,\mathrm{curl}\,\mathbb{F}.$$

별해) $\mathrm{curl}\ \mathbb{F} = (\mathrm{grad}\ f_1) \times \mathbb{i} + (\mathrm{grad}\ f_2) \times \mathbb{j} + (\mathrm{grad}\ f_3) \times \mathbb{k}$, $\mathrm{grad}(hf_i) = (\mathrm{grad}\ h)f_i + h(\mathrm{grad}\ f_i)$ $(i=1,2,3)$을 이용하여 풀 수 있다.

(b) (a)에 의해 $\mathrm{curl}(h\mathbb{F}) = (\mathrm{grad}\ h) \times \mathbb{F} + h\,\mathrm{curl}\,\mathbb{F}$ 임을 알 수 있다.

$\Rightarrow \mathrm{grad}\ h = \left(-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$, $\mathrm{curl}\ \mathbb{F} = \mathbb{O}$ 이다. (cf. 평면벡터장 중 각원소벡터장)
5점 5점

$\Rightarrow \mathrm{curl}(h\mathbb{F}) = (\mathrm{grad}\ h) \times \mathbb{F}$

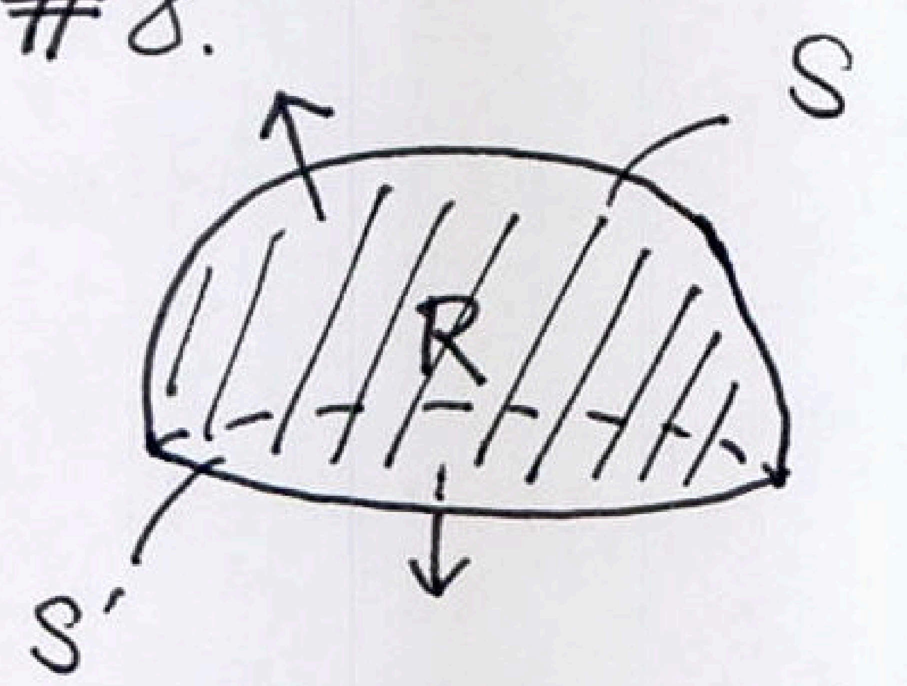
$$= \left(\left(-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot 0 - \left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right),\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot\frac{y}{x^2+y^2},\ \left(-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right.$$
$$\left. - \left(-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z) = \mathbb{A}$$ 5점.

* 채점기준

- (b)에서 (a)를 이용하지않고 직접 계산시 벡터의 각 성분당 5점
- (a)의 부분점수 없음
- (b)에서 grad h 계산에 5점, curl F 계산에 5점, 최종계산에 5점.
- (b)에서 F가 잠재함수를 가진다는 말로만 (구체적으로가 없는 경우) curl F = O 임을 설명한 경우 curl F 계산 점수없음.

#8.



주어진 곡면이 xy-평면과 만나서 생기는 원을 둘레로 가지는 원판을 S'이라 하자. 그리고, S'의 향을 그림과 같이 주자.

내부 영역을 R이라고 하면, '발산정리'에 의해,

$$\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV$$

이다. 이 때, $\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} + \iint_{S'} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s}$ 이다. 그러므로,

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV}_{(i)} - \underbrace{\iint_{S'} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s}}_{(ii)}$$

(i) $\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV$

$\operatorname{div}\mathbb{F} = 3$ 이므로, $\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV = 3\iiint_R dV = 3\,\mathrm{Vol}(R) = 3\cdot\frac{2}{3}\pi a^2 c = 2\pi a^2 c$.

(ii) $\iint_{S'} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s}$

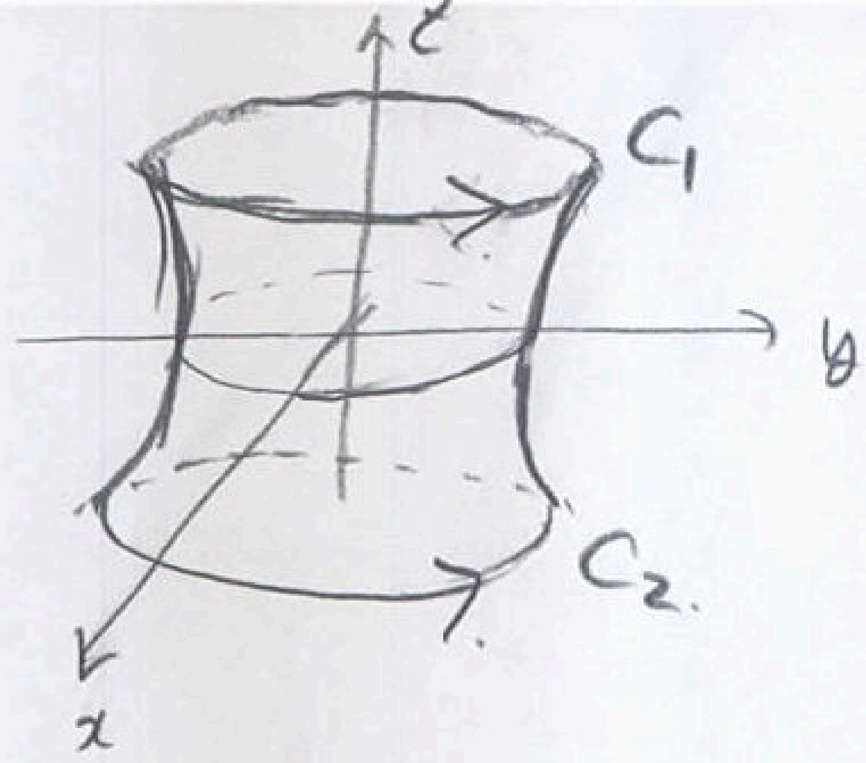
$$\iint_{S'} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^a\int_0^{2\pi} -r^2\cdot r\, d\theta\, dr = -\frac{\pi}{2}a^4 \quad (\because n = (0,0,-1)).$$

따라서, $\iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi a^2 c + \frac{\pi}{2}a^4$. 이다.

* 채점 기준

- $\iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{s}$ 을 두개의 적분식으로 표현 … +4점
- 발산 정리 적용 … +4점
- (i) 계산 … +4점
- (ii) 계산 … +4점
- 정답 … +4점
- 다른 풀이의 경우, 풀이가 올바르고 답이 맞아야 +20점.

#9.



$$\partial S = C_1 \cup C_2$$

$C_1 : \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2=2,\ z=1\}$

$C_2 : \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2=2,\ z=-1\}$ +5

스토크스 정리에 의해

$$\iint_S \text{curl } H \cdot dS = -\int_{C_1} H \cdot ds + \int_{C_2} H \cdot ds$$ (부호 10점) +10

$C_1 : X_1(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$$\Rightarrow \int_{C_1} H \cdot ds = \int_0^{2\pi} H(X_1(\theta)) \cdot X_1'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3(\sin\theta, 1, \sqrt{2}\cos\theta) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} -\sqrt{2}\sin^2\theta + \cos\theta\, d\theta = -3\sqrt{2}\pi$$ 매개화 +5

$C_2 : X_2(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$$\Rightarrow \int_{C_2} H \cdot ds = \int_0^{2\pi} H(X_2(\theta)) \cdot X_2'(\theta)\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin\theta, -1, \sqrt{2}\cos\theta) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} -\sqrt{2}\sin^2\theta - \cos\theta\, d\theta = \sqrt{2}\pi$$ 적분 +5

$$\therefore \iint_S \text{curl } H \cdot dS = -(-3\sqrt{2}\pi) + \sqrt{2}\pi = 4\sqrt{2}\pi$$

9 다른 풀이

$S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2 \le 2,\ z=1\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2 \le 2,\ z=-1\}$ 로 두면,

발산정리에 의해 $\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S} \operatorname{curl} H \cdot dS = \iiint \operatorname{div} \operatorname{curl} H \cdot dV = 0.$ +5

$\therefore \iint_S \operatorname{curl} H \cdot dS = -\iint_{S_1} \operatorname{curl} H \cdot dS + \iint_{S_2} \operatorname{curl} H \cdot dS$

(부호 10점)

(우변의 각 법벡터는 $\vec{n} = \hat{k}$ 로 할 때.) +10.

한편, $\operatorname{curl} H \cdot \hat{k} = (z^2-1)e^x \sin(y^2 z) - (2z+1)$ 이므로, +5

$\iint_{S_1} \operatorname{curl} H \cdot dS = \iint_{x^2+2y^2 \le 2} -3\, dV_2 = -3 \cdot \sqrt{2}\pi$

$\iint_{S_2} \operatorname{curl} H \cdot dS = \iint_{x^2+2y^2 \le 2} dV_2 = \sqrt{2}\pi.$

$\therefore \iint_S \operatorname{curl} H \cdot dS = -(-3\sqrt{2}\pi) + \sqrt{2}\pi = 4\sqrt{2}\pi$ +5