

**수학 및 연습 2 기말고사**  
(2012년 12월 8일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz$$

문제 2 (20점). 영역  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x+1, y \geq -x+1, y \geq x-1\}$  에서 정의된 함수  $f$  가 아래와 같이 주어질 때,

$$f(x, y) := (x, y) \text{ 에서 } R \text{ 까지의 거리} \quad (R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\})$$

$\iint_D e^{-f(x, y)} dx dy$  의 값을 구하시오.

문제 3 (25점). 영역  $D$  는 극좌표계로 원  $r = 3$  의 내부와 곡선  $r = \sqrt{1 + \sin \theta}$  의 외부의 공통 부분으로 주어진다.  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 2)\}$  상의 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( 2x^3 + 3xy^2 + e^y \cos x + \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}, y^3 + e^y \sin x + \frac{y-2}{x^2 + (y-2)^2} \right)$$

가 주어질 때,  $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  를 구하시오. (단,  $\mathbf{n}$  은 표준 단위법벡터장이다.)

문제 4 (25점). 좌표평면에서 정의된 일급함수  $h(x, y)$  의 기울기 벡터장이 각 점  $(x, y)$  에서 위치 벡터장  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y)$  에 수직이라고 하자. 이 때,  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  상의 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = h(x, y) \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\text{rot } \mathbf{F}$  를 구하시오.

(b) (15점)  $h(0, 0) = 1$  일 때, 원점을 감고 반시계방향으로 도는 단순폐곡선  $C$  에 대하여  $\frac{1}{2\pi} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  의 값을 구하시오. (힌트: 적분의 평균값 정리)

문제 5 (20점). 곡면  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 2$ ) 의 기하학적 중심을 구하시오.

문제 6 (20점). 벡터장  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$  를 속도벡터로 갖는 커피가 곡면  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) 의 모양을 갖는 커피필터를 통과하여 떨어진다고 한다. 이 때, 커피가 단위시간에 커피필터를 통과하는 양을 구하시오.

문제 7 (25점). 사이클로이드  $x(t) = t - \sin t$ ,  $y(t) = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 를  $x$ 축 주위로 회전시켜 얻은 곡면에 밀도함수가  $\rho(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$  로 주어져 있다. 이 곡면의 질량을 구하시오.

문제 8 (20점). 구간  $[3, 9]$  에서 정의된 함수  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - 10$  에 대하여  $y = f(x)$  의 그래프를  $x$ 축을 중심으로 회전시킨 곡면을  $S$  라고 하자.  $\mathbb{R}^3 - \{(9, 0, 0)\}$  에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z) - (9, 0, 0)}{|(x, y, z) - (9, 0, 0)|^3}$$

에 대하여  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  의 값을 구하시오. (단, 곡면  $S$  의 단위법벡터장  $\mathbf{n}$  은 점  $(6, 0, 0)$  을 벗어나는 방향으로 주어진다.)

문제 9 (25점). 평면  $x + y + z = 1$  위에 있는 매끄러운 단순폐곡선  $C$  가 주어져 있고, 이 평면 위에서  $C$  에 의해 둘러싸인 부분의 면적이  $A$  일 때 다음 적분값을 구하시오. (단,  $C$  는 원점에서 평면을 바라봤을 때, 반시계방향으로 돌고 있다.)

$$\int_C z dx - 2y dy + 3y dz$$