2015년도 여름학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안

#1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+y^4}\,dydx &= \int_0^1 \int_0^{y^3} \sqrt{1+y^4}\,dxdy \qquad (\because \text{푸비니 정리}) \\
&= \int_0^1 y^3\sqrt{1+y^4}\,dy \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{2}\,dt \qquad (t := \sqrt{1+y^4}) \\
&= \frac{2\sqrt{2}-1}{6}
\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 y^2\sin(y^3-1)\,dydx &= \int_0^1 \int_{x-1}^{0} \frac{\sin\theta}{3}\,d\theta dx \qquad (\theta := y^3-1) \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 (\cos(x-1)-1)\,dx \\
&= \frac{\sin 1 - 1}{3}
\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \left(\sqrt{1+y^4} + y^2\sin(y^3-1)\right) dydx &= \frac{2\sqrt{2}-1}{6} + \frac{\sin 1 - 1}{3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}+2\sin 1 - 3}{6}
\end{aligned}$$

이다. □

- 푸비니 정리를 써서 적분 영역의 범위를 맞게 나타냈으면 +10점.
- $\sqrt{1+y^4}$ 의 적분 과정과 답이 모두 맞으면 +5점.
- $y^2\sin(y^3-1)$ 의 적분 과정과 답이 모두 맞으면 +5점.
- (부분 점수 없음.)

#2. $G'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$ 이므로, $\det G'(x,y) = -1 - 2x$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\iint_{G(A)} f(u,v)\,dudv &= \iint_A f(G(x,y)) \cdot |\det G'(x,y)|\,dxdy \qquad (\text{치환적분법}) \\
&= \iint_A \frac{x+x^2}{\sqrt{1+4(x+x^2)}} \cdot |-1-2x|\,dxdy \\
&= \iint_A (x+x^2)\,dxdy \qquad (1+2x>0) \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x+x^2)\,dydx \qquad (\because \text{푸비니 정리}) \\
&= \int_0^2 (2-x)(x+x^2)\,dx \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

이다. □

- $\det G'$ 를 맞게 구했으면 +5점.
- 치환적분법의 식을 맞게 썼으면 +5점.
- 그 이후 계산이 모두 맞으면 +10점. (사소한 계산 실수 -5점.)

#3. 주어진 영역을 원기둥좌표계를 이용하여 나타내면 다음과 같다:

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\theta, \quad 0 \le z \le \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

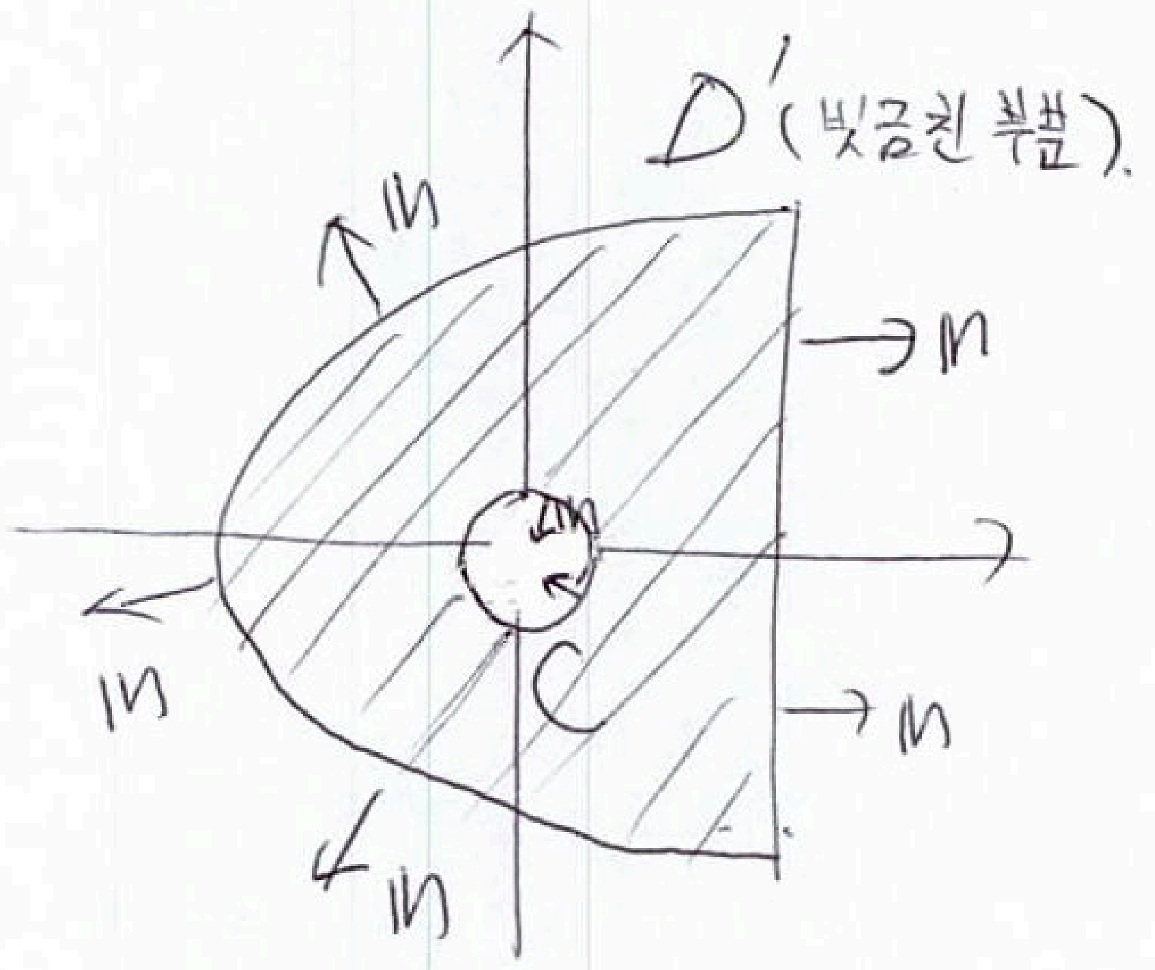
그러므로 영역의 부피는

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{r^2}{\sqrt{3}}\, drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3\sqrt{3}}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3\sqrt{3}}\, d\theta \qquad (\because \text{적분 영역의 대칭성}) \\
&= \frac{16\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{16\sqrt{3}}{9} \int_0^1 (1-\alpha^2)\, d\alpha \qquad (\alpha := \sin\theta) \\
&= \frac{32\sqrt{3}}{27}
\end{aligned}$$

이다. □

- 적분 영역을 원기둥좌표계로 맞게 나타냈으면 +10점.
- 부피를 구하는 식을 맞게 나타냈으면 +5점.
- 그 이후 계산이 모두 맞았으면 +5점. (부분 점수 없음.)
- (원기둥좌표 변환을 쓰지 않은 경우 과정과 답이 모두 맞지 않으면 점수 없음.)

4. 원점을 중심으로 하는, 반지름의 길이가 r인
(단, r은 충분히 작은 양수) 원을 C라 하자. 이때 C의
향은 반시계 방향으로 준다. $+5$ ... ①



그림에서 빗금친 영역을 D'이라고 하면, D'의
경계는 $\partial D \cup C'$ 이고, $\mathbb{F}$는 D'에서 잘 정의된다.
또, $\operatorname{div}\mathbb{F} = 0$ 이다.

이제, 발산 정리에 의해,

여기서 n은 영역 D'을 벗어나는 방향.

$$0 = \iint_{D'} \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV_2$$

$$= \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\, ds + \int_{C} \mathbb{F}\cdot n\, ds \quad \text{(발산 정리)} \quad \cdots ②$$

$+10$

따라서 구하는 flux는,

$$\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\, ds = -\int_{C} \mathbb{F}\cdot n\, ds$$

$$= -\int_{C} \frac{(x-y,\, x+y)}{r} \cdot \left(-\frac{(x,y)}{r}\right) ds$$

$$= \int_{C} \frac{1}{r}\, ds = 2\pi$$

$+5$ ... ③

* $\mathbb{F} = \dfrac{(x,y)}{x^2+y^2} + \dfrac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ 와 같이 나눈 후 가우스 정리를 이용하면,

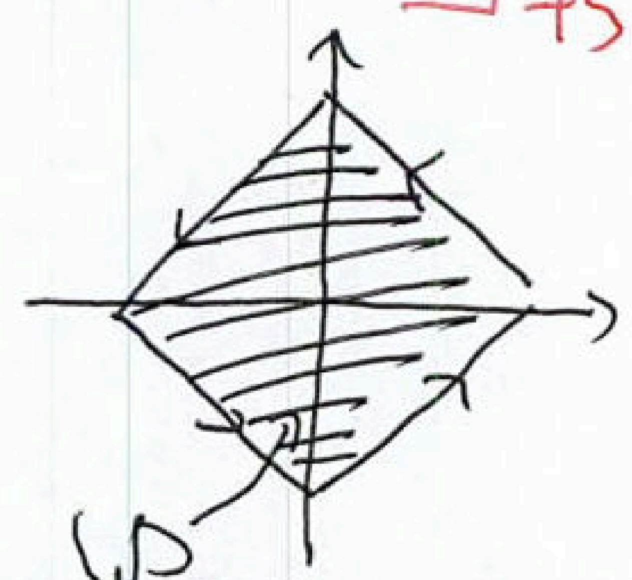
① → 5점, ② → 가우스 정리 5점, 발산 정리 계산 5점

③ → 5점

으로 배점함.

5. (a) $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x e^{-y^2} - \arctan y$ +5 +5.

(b) $\displaystyle\int_C \mathbb{F}\cdot ds = \iint_D \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2$ (그린 정리) D: C로 둘러싸인 영역 +5



$$= \iint_{|x|+|y|\le 1} (2x e^{-y^2} - \arctan y)\, dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{|y|-1}^{-|y|+1} \underbrace{2x e^{-y^2}}_{\text{기함수}}\, dx\,dy - \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{-|x|+1} \underbrace{\arctan y}_{\text{기함수}}\, dy\,dx$$

x에 대하여

$$= \int_{-1}^{1} 0\, dy + \int_{-1}^{1} 0\, dx$$

$= 0.$ +5.

* (a)가 틀리면 (b)는 최대 5점.

#6.

$\mathrm{area}(S) := \iint_S 1\,dS$, (곡면은 x, y로 매개화 했다고 가정하자.)

$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$ // +5점

$\therefore \iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\cdot\mathrm{area}(D) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$

// +5점

f를 S위에서 면적분 하면, $\iint_S f\,dS = \iint_D f\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy$

$= \int_0^{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{2}\,dy\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\sqrt{2}$ // +5점

$\therefore$ 답은 $\dfrac{\iint_S f\,dS}{\iint_S 1\,dS} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2} = \dfrac{4}{\pi^2}$ // +5점

- 채점 기준 : - 면적소, 넓이, 함수의 면적분, 평균 각 5점씩

  - 면적소를 잘못 구해도, 넓이, 함수의 면적분을 잘못 구한 값으로 실수없이 계산했다면 5점

  - 평균값은 정의를 알고 있다고 여겨졌을시 5점.

  - 평균값 계산시, D에 관한 영역으로 언급했을 시 점수 없음.

#7.

$(x, y, z) = (4\cos\varphi,\ 4\sin\varphi\cos\theta,\ 4\sin\varphi\sin\theta)$ 라 하자. ⌋ 5점.

$dS = 16\sin\varphi\ d\varphi\, d\theta$ (치환적분법) $\quad (0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi)$

$$\therefore (\text{준식}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{16\sin\varphi}{\sqrt{20-16\cos\varphi}}\, d\varphi\, d\theta$$ ⌋ 5점.

$$= \int_0^{2\pi}\int_4^{36} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt\, d\theta \left(\because 20-16\cos\varphi = t,\ 16\sin\varphi\, d\varphi = dt\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\sqrt{t}\right]_4^{36} d\theta = 2\pi(2\cdot 6 - 2\cdot 2) = 16\pi$$ ⌋ 10점.

- 일반적인 구면좌표계와 회전변환으로 $(0,0,2)$로 옮겨 푼 경우 논리 오류 없다면 정답 처리
- 반지름을 2로 생각한 치환시 구면좌표계 치환 $((r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta))$에 해당하는 5점만 부여. (20점 중)
- 입체각 벡터장을 이용한 풀이에서, $\iint_{S(4)} A_p(x)\cdot p\, dS = 0$ 을 설명하지 않은 경우 10점 감점. (20점에서)

8. 방법 1

$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F}) = \operatorname{grad}(3x^2+3y^2+3z^2) = (6x, 6y, 6z)$ → +5

이므로,

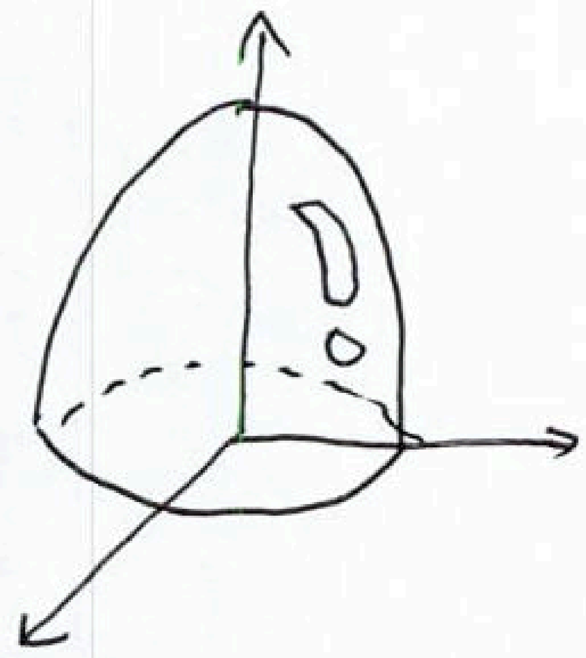
$$\iint_{\partial R} \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \iint_{\partial R} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iiint_R 18\, dV_3 \quad \text{(발산 정리)}$$ → +10 ··· (*)

$$= 18 \iint_{x^2+y^2\le 4} \int_0^{4-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$= 18 \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 144\pi.$$ → +5



* $\operatorname{div}(6x, 6y, 6z) = 18$ 에서 계산을 실수할 경우, (*) 에서 5점만을 인정한 후, 이후 계산은 점수를 부여하지 않음.

방법 2 $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F}) = (6x, 6y, 6z)$ → +5 이므로,

$S_1 : z = 4-x^2-y^2,\ 0\le z\le 4.$

$S_2 : x^2+y^2\le 4,\ z=0$

S_1, S_2의 합은 R을 덮어싸도록.

$$\iint_{\partial R} \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \iint_{\partial R} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iint_{S_1} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S} + \iint_{S_2} (6x, 6y, 6z)\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (6x, 6y, 6(4-x^2-y^2))\cdot(2x, 2y, 1)\, dx\,dy + \iint_{x^2+y^2\le 4} (6x, 6y, 0)\cdot(0,0,-1)\, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (24+6x^2+6y^2)\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (24+6r^2)\, r\, dr\, d\theta$$ → +5

$$= 144\pi.$$ → +10

9. (a) $\mathrm{curl}\,\mathbb{F} = (D_2 f_3 - D_3 f_2,\ D_3 f_1 - D_1 f_3,\ D_1 f_2 - D_2 f_1)$ +5

($\mathbb{F} = (f_1, f_2, f_3)$일 때)

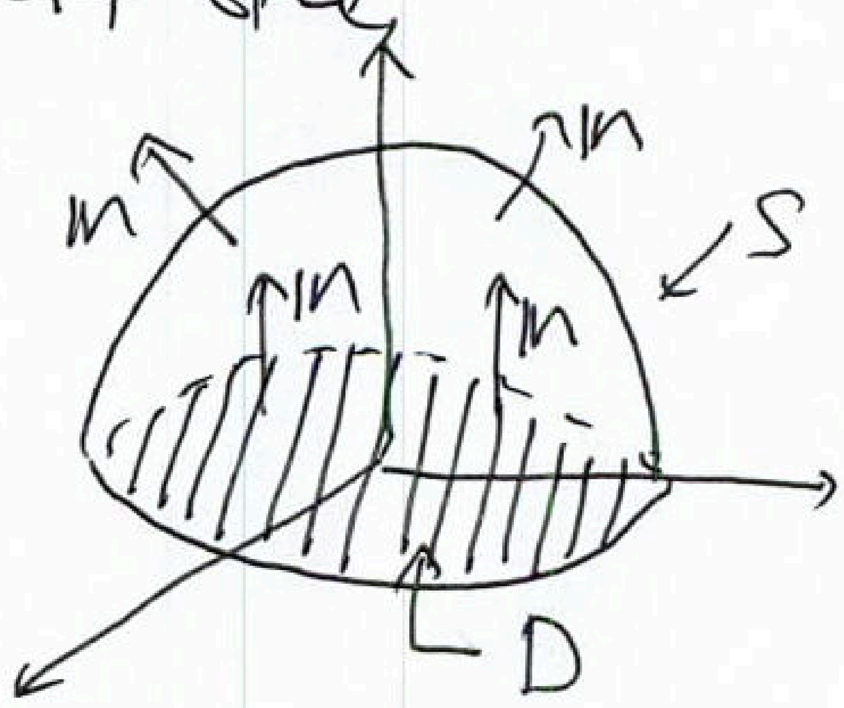
$$= (e^{x+y+z} - x\sin xy - \cos(y+z),$$
$$e^{x+z} - e^{x+y+z} + y\sin xy,$$
$$-3x^2 - 3y^2)$$ +5

(b) (방법 1)

곡면 $D: x^2+y^2 \le 4,\ z=0$ 이라 하고, $\mathbb{n} = (0,0,1)$ 이라 하면

$\partial D = \partial S$ 이고 두 곡선 $\partial D, \partial S$의 향이 일치하므로

스토크스 정리에 의해



$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$ +5

$$= \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{=(0,0,1)}\, dS$$

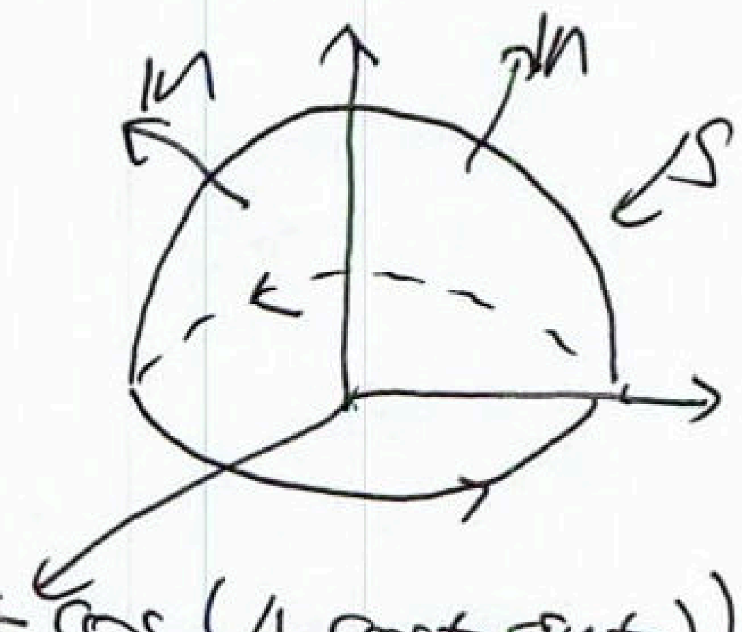
$$= \iint_D (-3x^2-3y^2)\, dS$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\, dr\, d\theta = -24\pi.$$ +5

* D의 향이 틀리면 2점 감점

(방법 2) $\partial S: x^2+y^2=4,\ z=0$ 의 향은 $(0,0,1)$에서 내려볼 때 반시계 방향이므로, ∂S를 매개화하면 $(2\cos t, 2\sin t, 0)$ $0 \le t < 2\pi$.

이제 스토크스 정리에 의해



$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \int_{\partial S} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{s}$$ +5

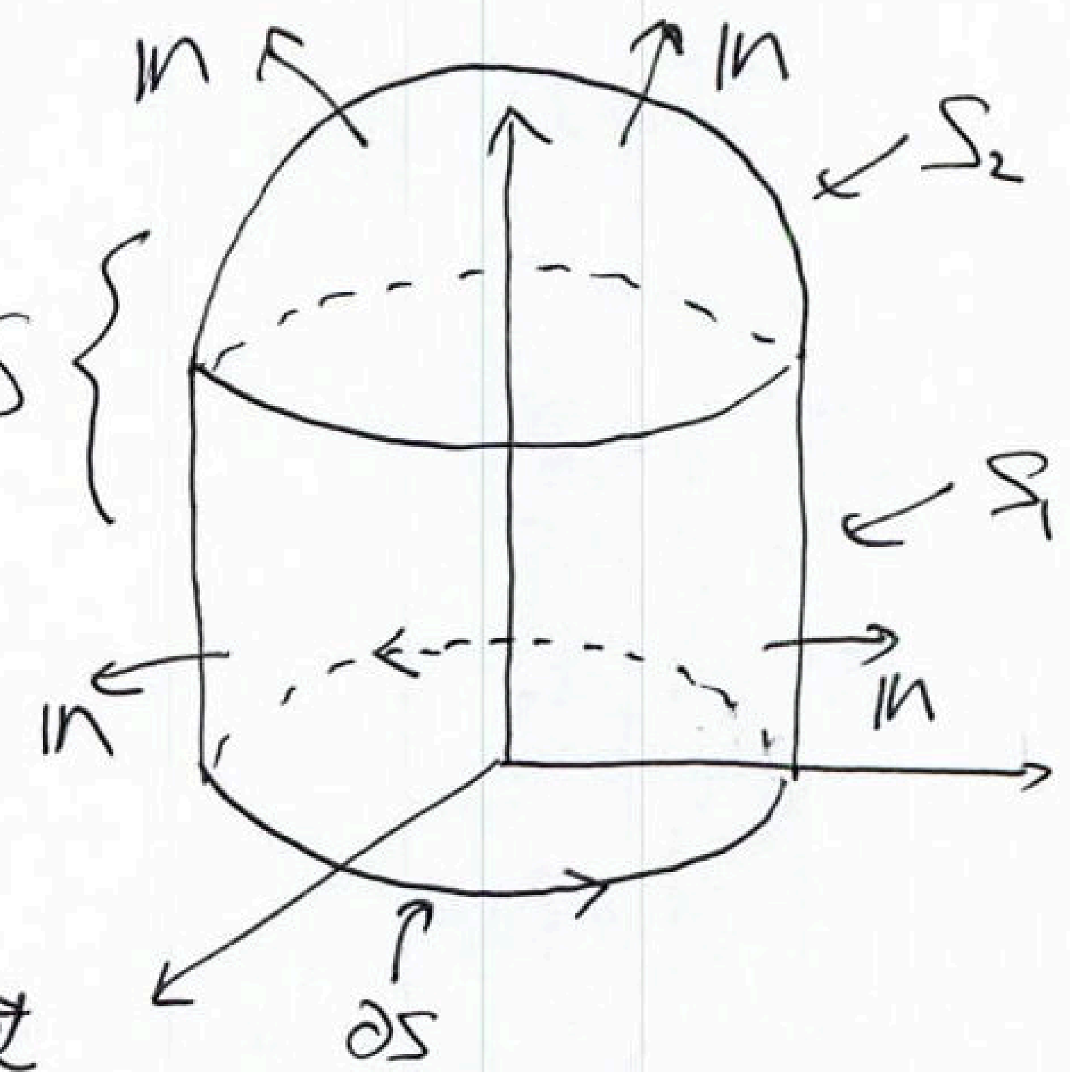
$$= \int_0^{2\pi} (8\sin^3 t + e^{2\cos t},\ \sin(2\sin t) - 8\cos^3 t,\ e^{2\cos t + 2\sin t} + \cos(4\cos t\sin t))$$
$$\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt$$

$= \cdots$ 열심히 계산 $\cdots = -24\pi.$ +5.

* ∂S의 향이 틀리면 2점 감점

* (a)가 틀리면 (b) 최대 5점.

10. <u>방법 1</u>.



곡면 S 를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

이때 곡선 ∂S : $x^2+y^2=4$, $z=0$

이고, 그 향은 $(0,0,1)$ 에서 바라보았을 때

반시계 방향이다. 따라서 ∂S 를 매개화하면

$(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ $\quad 0 \le t < 2\pi$

이다. +5 그러면

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (\text{스토크스 정리}) \ +5$$

$$= \int_0^{2\pi} (0,\ 2\sin t,\ 0) \cdot (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 \sin t \cos t \, dt = 0. \ +10$$

* ∂S의 향이 틀리면 5점 감점.

<u>방법 2</u>. 곡면 D : $x^2+y^2 \le 4$, $z=0$ 이라 하면, D의 향은 $\mathbf{n}=(0,0,1)$

이라 할 때, +5 ∂S와 ∂D가 일치하고 그 향이 같으므로, 스토크스 정리에

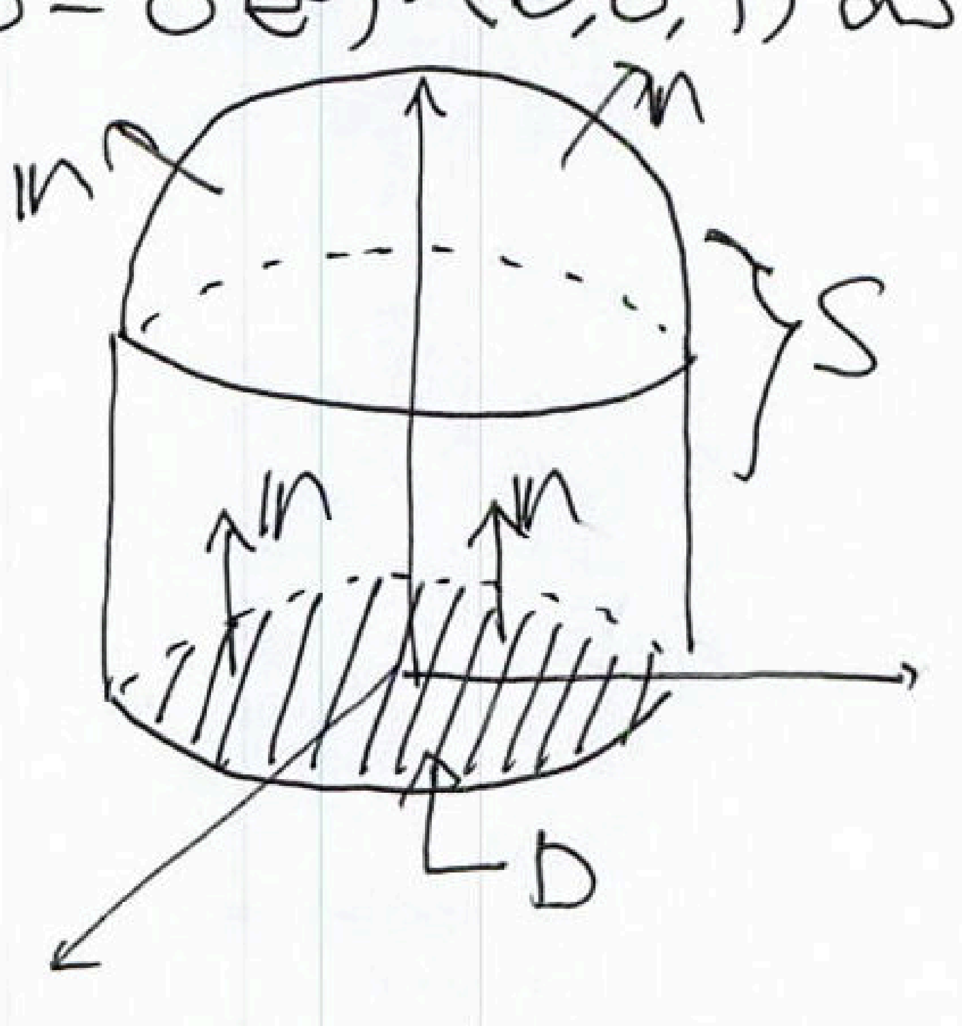
의하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 이다. +5 이때

$\operatorname{curl} \mathbf{F} = ($ ☺ , ☹ , $y \sin z - z e^y)$ 이므로,

$$\iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_D (☺,\ ☹,\ y \sin 0 - 0 e^y) \cdot (0,0,1)\, dS$$

$$= \iint_D 0 \, dS = 0. \ +10$$



* D의 향이 틀리면 5점 감점.