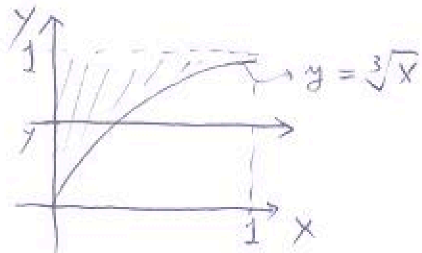
2009 학년도 2학기 수학및연습 2 기말고사모범답안

#1.

$$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+y^4}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{y^3} \sqrt{1+y^4}\,dx\,dy$$ ┘10점

(푸비니 정리.



)

$$= \int_0^1 y^3\sqrt{1+y^4}\,dy$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{2}\cdot t\,dt = \frac{1}{6}\left[t^3\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)$$ ┘15점

$\left(\begin{array}{l}\sqrt{1+y^4} = t \\ 2y^3dy = t\,dt\end{array}\right)$

* 푸비니 정리로부터 적분순서 바꾸는 것까지 10점.
나머지 계산까지 맞으면 15점.

2. 주어진 도형이 $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x \ge 0, \ y \le 0 \\ x \le 0, \ y \ge 0 \\ x, y \le 0 \end{cases}$ 인 네 영역에서 모양이 같고,

밀도 함수 역시 대칭성을 가지므로

R의 질량은 R과 $x, y \ge 0$ 인 영역의 교집합

$R_1 = \{(x, y, z) \in R \mid x, y \ge 0\}$의 질량의 4배이다.

R_1을 원기둥 좌표계로 나타내면,

$x + y \ge 1, \quad x^2 + y^2 \le 2$ 이므로

$r\cos\theta + r\sin\theta \ge 1, \quad r^2 \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \le r \le \sqrt{2}$.

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ -1 \le z \le 1$이므로

$$R\text{의 질량} = 4 \cdot R_1\text{의 질량} = 4 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{r} \cdot r \, dr \, d\theta \, dz \quad \lrcorner \ (*)$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} - \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \, d\theta \, dz$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} - 4 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \, d\theta \, dz$$

$$= 4\sqrt{2}\pi - 8 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \, d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}\pi - \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1 - \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \right) \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi - 4\sqrt{2} \log\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

◦ 채점 기준 : · (*)에 해당하는 식을 원기둥 좌표계로 적분 함수, 적분 범위가 모두 옳게 적어야 15점.

하나라도 틀리면 점수를 받을 수 없음

· (*)에 해당하는 식을 직교 좌표계로, 혹은 옮긴 하지만 이후의 적분 계산이 불가능한 형태로 나타낸 경우 10점. 반드시 반복적분의 형태로 표현해야 함.

답까지 옳게 계산한 경우 25점.

· 원기둥의 질량을 계산한 후 사각뿔의 질량을 빼서 구한 경우,

원기둥의 질량의 식을 잘 세우면 +5점.

원기둥의 질량을 옳게 계산하면 +5점.
사각뿔의 질량의 식을 잘 세우면 +5점.
사각뿔의 질량을 옳게 계산하면 +10점.

- 질량을 삼중적분의 식으로 나타내지 않고 이중적분 또는 다른 형태로 나타낸 경우, <u>삼중적분의 계산</u>을 통한 정당화 과정이 반드시 있어야 함. 없으면 <u>무조건</u> 0점.

#3.

$$S = \{ (x,t,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$$\downarrow G \qquad\qquad (x,t,\theta) \in S$$

$$R \ni (x,\ t\cos x\cos\theta,\ t\cos x\sin\theta) \longleftrightarrow (x,t,\theta)$$

$$\det G' = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t\sin x\cos\theta & \cos x\cos\theta & -t\cos x\sin\theta \\ -t\sin x\sin\theta & \cos x\sin\theta & t\cos x\cos\theta \end{pmatrix} = t\cdot\cos^2 x$$

┘ 5점.

$$(\text{R의 질량}) = \iiint_R \mu\, dV$$

$$= \iiint_S \mu(x,\ t\cos x\cos\theta,\ t\cos x\sin\theta)\cdot|t\cos^2 x|\ dx\,dt\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|x| + t^2\cos^2 x)\cdot t\cos^2 x\ dx\,dt\,d\theta$$

┘ 15점 (♡)

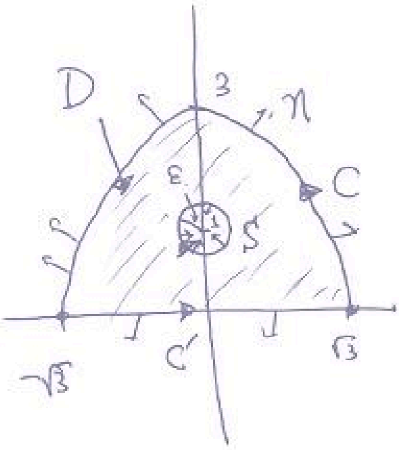
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} (xt\cos^2 x + t^3\cos^4 x)\ dx\,dt\,d\theta$$

$$= \frac{\pi^3}{8} + \frac{3}{16}\pi^2 - \frac{\pi}{2}$$

┘ 25점.

* Jacobian 계산이 틀리거나 안하면 무조건 0점.
* Jacobian 을 $|S_t \times S_\theta|$ 으로 구한경우 (♡) 식 까지 명확히 맞는 경우 10점.
  나머지는 모두 0점.

#4.



C'을 $(-\sqrt{3}, 0)$과 $(\sqrt{3}, 0)$을 잇는 선분이라 하고 S를 중심이 $(0,1)$이고 반지름이 ε인 원이라 하자. 그리고 ε이 충분히 작아서 S와 C, C' 사이의 교점이 없다고 놓자. 마지막으로 곡선 C와 C'으로 둘러싸인 면을 D라 두자.

영역 D 위에서 $A_p(x)$는 잘 정의되고, 직접 계산에 의해서

$$\operatorname{div} A_p(x) = 0$$

이다. 그러면 발산정리에 의해서

$$0 = \iint_D \operatorname{div} A_p(x)\, dV = \int_{\partial D} A_p \cdot n\, ds$$

$$= \int_C A_p \cdot n\, ds + \int_{C'} A_p \cdot n\, ds + \int_S A_p \cdot n\, ds \quad \cdots (*)$$

+10점

C'은 $C'(t) = (t, 0)$, $(-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3})$으로 매개화 하면

$$\int_{C'} A_p \cdot n\, ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} A_p(C'(t)) \cdot (0, -1) \cdot 1\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} = \frac{2}{3}\pi.$$

+5점

한편,

$$\int_{S} A_p \cdot n\, ds = \int_{x^2+(y-1)^2=\varepsilon} \frac{(x,\, y-1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{(-x,\, -y+1)}{\varepsilon}\, ds$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{x^2+(y-1)^2=\varepsilon} ds = -2\pi.$$

+ 5점

따라서

$$\int_{C} A_p \cdot n\, ds = -\int_{C'} A_p \cdot n\, ds - \int_{S} A_p \cdot n\, ds$$

$$= -\frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

+5점.

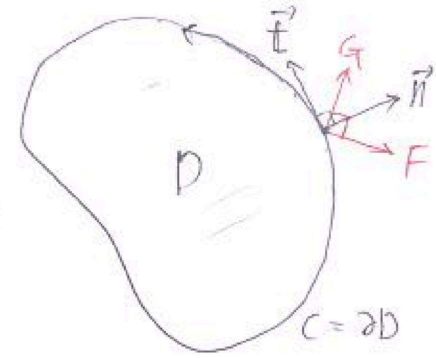
※ • 곡선 C를 잘못 이해해서 닫혀 있는 곡선으로 생각해서 문제를 풀면 −15점.

• 영역 안에 작은 원: S를 생각하지 않고 발산 정리를 쓰면 0점.

• (*) 발산정리 부분이 틀리면 이후 점수 없음.

#5. $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$G(x,y) = (-Q(x,y), P(x,y))$ 라고 두면, 오른쪽 그림으로부터 $F \cdot \vec{n} = G \cdot \vec{t}$ (10점)



이때 $\vec{t}$, $\vec{n}$ 는 각각 C의 단위접벡터, 단위법벡터이다. 벡터장 G에 대해 Green 정리를 적용하면,

$$\int_C F \cdot n \, ds = \int_C G \cdot \vec{t} \, ds$$

$$= \int_C G \cdot ds \quad \left(= \int_C -Q(x,y)\,dx + P(x,y)\,dy \right)$$

$$= \iint_D \mathrm{rot}\, G \; d\mathrm{vol}_2$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D \mathrm{div}\, F \; dx\,dy$$ (10점)

*. · 기타 다른 방법을 이용한 경우 정확하지 않으면 0점.

· Green 정리를 이용하지 않은 풀이 0점

· 미미한 계산 실수 5점 감점

문제 6.

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \leq x^2 + y^2 \leq 18 \}$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = \left(x, y, \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1} \right)$$ ┘+5점

$$f_x = \left(1, \; 0, \; \frac{\frac{x}{9}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}} \right)$$

$$f_y = \left(0, \; 1, \; \frac{\frac{y}{9}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}} \right)$$

$$\| f_x \times f_y \| = \left\| \left(\frac{-\frac{x}{9}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}}, \; \frac{-\frac{y}{9}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}}, \; 1 \right) \right\| = \frac{\sqrt{\frac{10}{81}x^2 + \frac{10}{81}y^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}}$$ ┘+5점

$$\text{질량 } M = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1} \; \frac{\sqrt{\frac{10}{81}x^2 + \frac{10}{81}y^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - 1}} \, dx\,dy$$ ┘+5점

$$= \int_0^{2\pi} \int_3^{3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{10}{81}r^2 - 1} \; r \, dr \, d\theta$$ (극좌표계 치환)

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{11}{9}} \sqrt{s} \; \frac{81}{20} \, ds \, d\theta$$ ($s^2 = \frac{10}{81}r^2 - 1$ 치환)

$$= 2\pi \cdot \frac{81}{20} \, \frac{2}{3} \left[s^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{11}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{5} \left(11\sqrt{11} - 1 \right)$$ ┘+10점

* 다른 매개화를 사용하더라도 매개화를 잘 하면 (+5점)
면적소를 잘 구하면 (+5점), 질량을 정확히 표현하면 (+5점)
적분 및 계산을 정확히 하면 (+10점).

7번.

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{F}) = 6(x, y, z) \quad \lrcorner\ 5\text{점}$$

발산정리에 의해

$$\iint_S \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{F})\cdot dS = \iiint_{int(S)} \mathrm{div}(\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{F}))\,dV_3 \quad \lrcorner\ 10\text{점}$$

$$= 18\iiint_{int(S)} dV_3 \quad \lrcorner\ 5\text{점}$$

$$= 144$$

* 감점요인

① 발산정리를 쓰지 않고 면적분으로 계산하였을 때
S를 특정 육면체로 가정하는 경우 -5점.

② 면적분으로 계산하였을 때 여섯 개의 모든 면에 대해
값을 구하지 않으면 -5점.

문제 8. (a) (15점)

$$\mathrm{vol}(R) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr \quad (+10)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2) \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (+5)$$

or

$$\mathrm{vol}(R) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \quad (+8)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2) \, r \, d\theta \, dr \quad (+2)$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (+5)$$

- 다른풀이 ① 발산정리 이용.

$$\mathrm{vol}(R) = \frac{1}{3} \iint_{\partial R} (x, y, z) \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2}$$

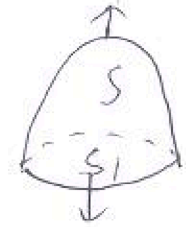
(+10) (+5)

- 다른풀이 ②

$$\int_0^1 \pi (1-z) \, dz = \frac{\pi}{2} \quad (+10)$$

이유 : 주어진 영역을 회전체로 볼 수 있으므로, 구분 구적법에 의해 (+5)

8 (b)



$S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$

라고 하고, S와 S_1으로 둘러싸인 영역을

R이라고 하자.

발산정리에 의해서,

$$\iiint_R \operatorname{div} F \, dV_3 = \iint_S F \cdot dS + \iint_{S_1} F \cdot dS \quad — ①$$

가 성립한다.

5점

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r \, dr \, d\theta = -\pi \quad — ②$$

($\because$ S_1의 법벡터는 $\vec{n} = -\vec{k}$)

5점

$\operatorname{div} F = 3$ 이므로, $\iiint_R \operatorname{div} F \, dV_3 = 3 \operatorname{vol}(R) = \frac{3}{2}\pi$ 이다. (by 8(a))

따라서 ①과, ②에 의해서

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \frac{3}{2}\pi + \pi = \frac{5}{2}\pi$$

5점

S를 직접 매개화 하여 적분하는 경우 계산이 틀리면

부분점수 없음.

#8-(6)

풀이1. Stokes's theorem 사용.

$\iint_S \mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} F\cdot d\vec{r} = \int_{\partial S}(x,y,1)\cdot d\vec{r}$ <5점>   (이 때 $F=(x+\sin yz,\ y,\ z+1)$, $\partial S: x^2+y^2=1,\ z=0$. $\therefore F(x,y,0)=(x,y,1)$)

$= \int_0^{2\pi}(\cos t,\sin t,1)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt$ (∂S를 $x(t)=(\cos t,\sin t,0)$으로 매개화 $0\le t\le 2\pi$ 이때 향은 반시계방향이다.)

$=0$ <15점>

풀이2. Stokes's theorem.

$S'=\{(x,y,0)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 이라 하고 이 곡면의 법벡터를 $\vec{n}=(0,0,1)$ 이라하면,

$\partial S=\partial S'$ 이고 두곡면의 경계의 향이 같으므로

$\iint_S \mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S} = \iint_{S'}\mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S}$ <5점>   ($\mathrm{curl}\,F=(0,\ y\cos yz,\ -z\cos yz)$).

$= \iint_{S'}(0,y,0)\cdot(0,0,1)\,dS$

$=0.$ <15점>

풀이3. 발산정리 사용.

$\iint_{S\cup S'}\mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S} = \iiint_R \mathrm{div}(\mathrm{curl}\,F)\,dV_3 = 0.$

이때, $R=\{(x,y,z) : 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$, $S'=\{(x,y,0) : x^2+y^2=1\}$.

$\therefore \iint_S \mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S} = -\iint_{S'}\mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S}$ <5점>

$= -\iint_{S'}(0,y,0)\cdot(0,0,-1)\,d\vec{S}$

$=0$ <15점>

풀이4. $\iint_S \mathrm{curl}\,F\cdot d\vec{S} = \iint_D (0,\ y\cos yz,\ -z\cos(yz))\cdot(2x,2y,1)\,dxdy$ S를 $\sigma=(x,y,1-x^2-y^2)$으로 매개화하면 $\sigma_x=(1,0,-2x)$, $\sigma_y=(0,1,-2y)$ $\therefore N=(2x,2y,1)$, $D: x^2+y^2\le 1$ (정의역)

$= \iint_D 2y^2\cos(y(1-x^2-y^2)) - (1-x^2-y^2)\cos(y(1-x^2-y^2))$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} -(1-x^2-3y^2)\cdot\cos(y-x^2y-y^3)\,dy\,dx$

$= \int_{-1}^{1}\left[-\sin(y-x^2y-y^3)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$ <15점>

*채점기준: 계산실수 5점감점.
풀이2, 풀이3의경우 법벡터방향 틀릴 때 5점감점.