수학 및 연습 2 기말고사

(2013년 12월 7일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (15점)**.** 영역 $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 - 16 \le z \le 9 - x^2 - y^2\}$ 의 부피를 구하시오.

문제 2 (20점)**.** 평면에서 네 직선 $2x - y = 0,\ 2x - y = \dfrac{\pi}{2},\ 2x + y = 0,\ 2x + y = \dfrac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역 D 의 밀도함수가 $f(x,y) = (4x^2 - y^2)\sin(2x + y)$ 로 주어져 있다. 이 영역 D 의 질량 M 을 구하시오.

문제 3 (20점)**.** 극좌표계로 표현된 심장형 곡선 $r = 1 + \cos\theta$ 로 둘러싸인 영역 D 의 중심의 좌표를 구하시오.

문제 4 (20점)**.** xy-평면의 영역

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \le x \le 2, \quad \frac{1}{x} \le y \le 2 \right\}$$

의 경계를 C 라 할 때, 선적분

$$\int_C (3yx^2\sqrt{1 + yx^3} - y^2 e^{xy})\,dx + (x^3\sqrt{1 + yx^3} - xye^{xy})\,dy$$

의 값을 구하시오.

문제 5 (20점)**.** 곡선 $x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 1$ 로 둘러싸인 영역 D 의 넓이를 구하시오.

문제 6 (10점)**.** 다음과 같이 매개화된 곡면 위의 점 P 에 접하는 평면을 구하시오.

$$X(u,v) = (u^2 - v^2, u + v, u^2 + 4v), \quad P = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

문제 7 (15점)**.** 구면 $S : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 에 함수 $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ 가 주어졌을 때, $\displaystyle\iint_S f\,dS$ 를 구하시오.

문제 8 (20점)**.** 중심이 $(2,0,0)$ 이고, 반지름의 길이가 1 인 xz-평면 상의 원을 z 축 주위로 회전시켜 얻은 곡면 T 위에서 함수 $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 를 적분하시오.

문제 9 (20점)**.** 어떤 곡면 S 가 $z = 4$ 에서 $x^2 + y^2 = 4$ 를 경계로 갖는다. 곡면 S 와 평면 $z = 4$ 로 둘러싸인 영역 R 의 부피가 3 이라 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ 에 대하여 다음을 구하시오.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(단, 곡면 S 는 $z \ge 4$ 인 영역에 위치하고, 그 향은 영역 R 을 벗어나는 방향으로 주어진다.)

문제 10 (20점)**.** 공간 상에 폐곡면 S 가 주어져 있고, 그 내부 $\mathrm{int}(S)$ 의 각 점 (x, y, z) 마다 밀도함수가 $\mu(z)$ 로 주어져 있다. 함수 $p(z) = \int_0^z \mu(\tilde{z})\, d\tilde{z}$ 에 대하여 곡면 S 위에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = -p(z)\,\mathbf{n}$ 을 생각하자. (여기서 $\mathbf{n}$ 은 곡면 S 의 단위법벡터장이다.) 영역 $\mathrm{int}(S)$ 의 질량을 m 이라고 할 때,

$$\left(\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}\, dS,\ \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{j}\, dS,\ \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS \right) = (0, 0, -m)$$

임을 보이시오.

[**주의**] 밀도함수 $\mu(z)$ 는 변수 z 에만 의존하는 함수로 모든 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의되어 있고, 단위법벡터장 $\mathbf{n}$ 은 $\mathrm{int}(S)$ 의 바깥을 향하도록 주어진다.

$\rightsquigarrow$ 이 문제는 [**아르키메데스의 원리**] 와 관련이 있다.

문제 11 (20점)**.** 곡면 $S : z^2 = x^2 + y^2,\ (x, y \geq 0,\ -1 \leq z \leq 0)$ 의 경계선에서 아래 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z(1 + \cosh x),\ \cosh y - e^z,\ \sinh x)$$

의 선적분을 스토크스 정리를 이용하여 구하시오. (단, 곡선 ∂S 는 점 $(1, 1, 0)$ 에서 바라봤을 때, 반시계방향으로 돌고 있다.)