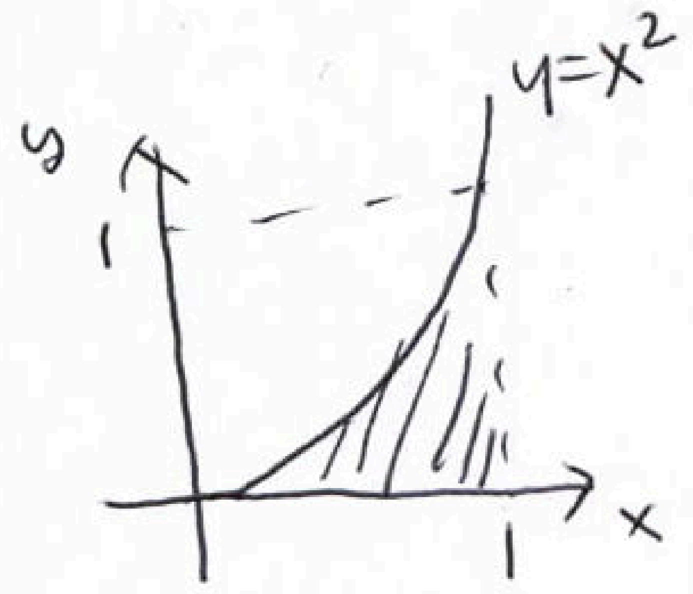
2015년 2학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안

1번. 적분영역



푸비니 정리에 의해

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x}{x^8+1}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{x}{x^8+1}\,dy\,dx$$

└ 10점

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx \qquad x^4 = t,\quad 4x^3\,dx = dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

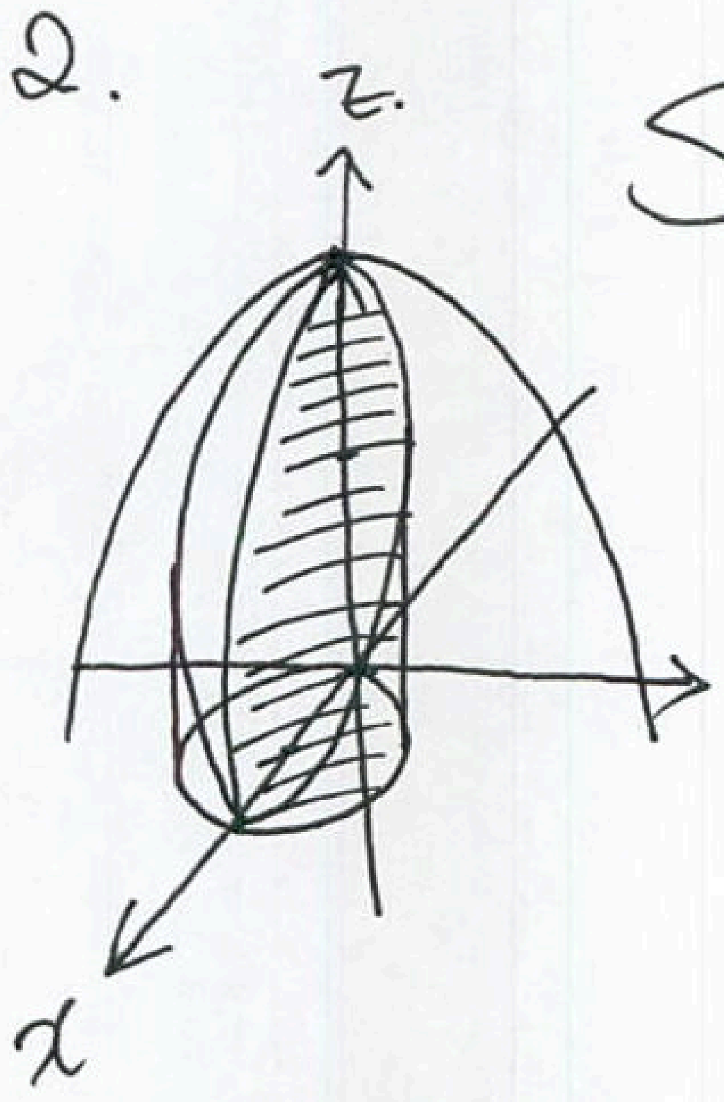
└ 15점

$$= \frac{1}{4}\arctan 1 = \frac{\pi}{16}$$

└ 20점

계산실수 부분점수 없음.

#2.



$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2x,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4-x^2-y^2\}$.

원기둥좌표계로 영역을 치환 ; $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$

- $x^2+y^2 \leq 2x \quad \longrightarrow \quad r^2 \leq 2r\cos\theta$.

  $\longrightarrow \quad r \leq 2\cos\theta, \quad \cos\theta \geq 0$.

- $y \geq 0 \quad \longrightarrow \quad r\sin\theta \geq 0$

  $\longrightarrow \quad \sin\theta \geq 0$.

- $0 \leq z \leq 4-x^2-y^2 \longrightarrow 0 \leq z \leq 4-r^2$.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2\cos\theta. \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq 4-r^2. \end{array} \right.$$

$$\iiint_S dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{4-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

15점

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} 4r - r^3 \, dr \, d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta \, d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cdot(1+\cos2\theta) - (1+\cos2\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 + 2\cos2\theta - \cos^2 2\theta \, d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2} + 2\cos2\theta - \frac{1}{2}\cos4\theta \, d\theta = \frac{5}{4}\pi.$$

5점

* $\underbrace{\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}}_{①} \underbrace{\boxed{\int_0^{2\cos\theta}}}_{②} \underbrace{\boxed{\int_0^{4-r^2}}}_{③} \underbrace{\boxed{r}}_{④} \, dz\,dr\,d\theta$ 식에서 ①, ②, ③, ④ 중

하나 틀리면 −5점. / 2개 이상 틀리면 전체 0점.

* 다른 풀이를 한 경우, 모든 과정이 맞으면 20점, 틀리면 0점.

#3. $R := \{1 \le u \le 3,\ 1 \le v \le w \le 2\}$ 이라 하자.

$(u, v, w) \xmapsto{F} (u^2, v, w^3)$ 에 대해, F의 역상 $F^{-1}: (u', v', w') \longmapsto (\sqrt{u'}, v', \sqrt[3]{w'})$

과 F 모두 일급임을 안다.

$(x, y, z) \xmapsto{G} (x+2z,\ 3y+z,\ z+x)$ 가 가역행렬로 표현되는 선형사상이므로,

$G \circ F$ 가 일급가역이다 ⊣ +5점

이제 $(u, v, w) \xmapsto{\Phi} (u^2+2w^3,\ w^3+3v,\ u^2+v)$ on R 에 대해,

$\iiint_{\Phi(R)} dx\,dy\,dz = \iiint_R |\det \Phi'|\, du\,dv\,dw$ 임을 안다.

$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2u & 0 & 6w^2 \\ 0 & 3 & 3w^2 \\ 2u & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이고, $|\det \Phi'(u, v, w)| = 42uw^2$ 이므로
⊣ +5점 ⊣ +5점

$\iiint_{\Phi(R)} dx\,dy\,dz = \int_1^3 \int_1^2 \int_1^w 42uw^2\, dv\, dw\, du = \int_1^3 \int_1^2 (42uw^3 - 42uw^2)\, dw\, du$
치환적분법, 푸비니정리 ⊣ +5점

$= \int_1^3 42u \left[\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{3}w^3\right]_1^2 du = \int_1^3 42u \cdot \frac{17}{12}\, du$

$= 238$ ⊣ +5점

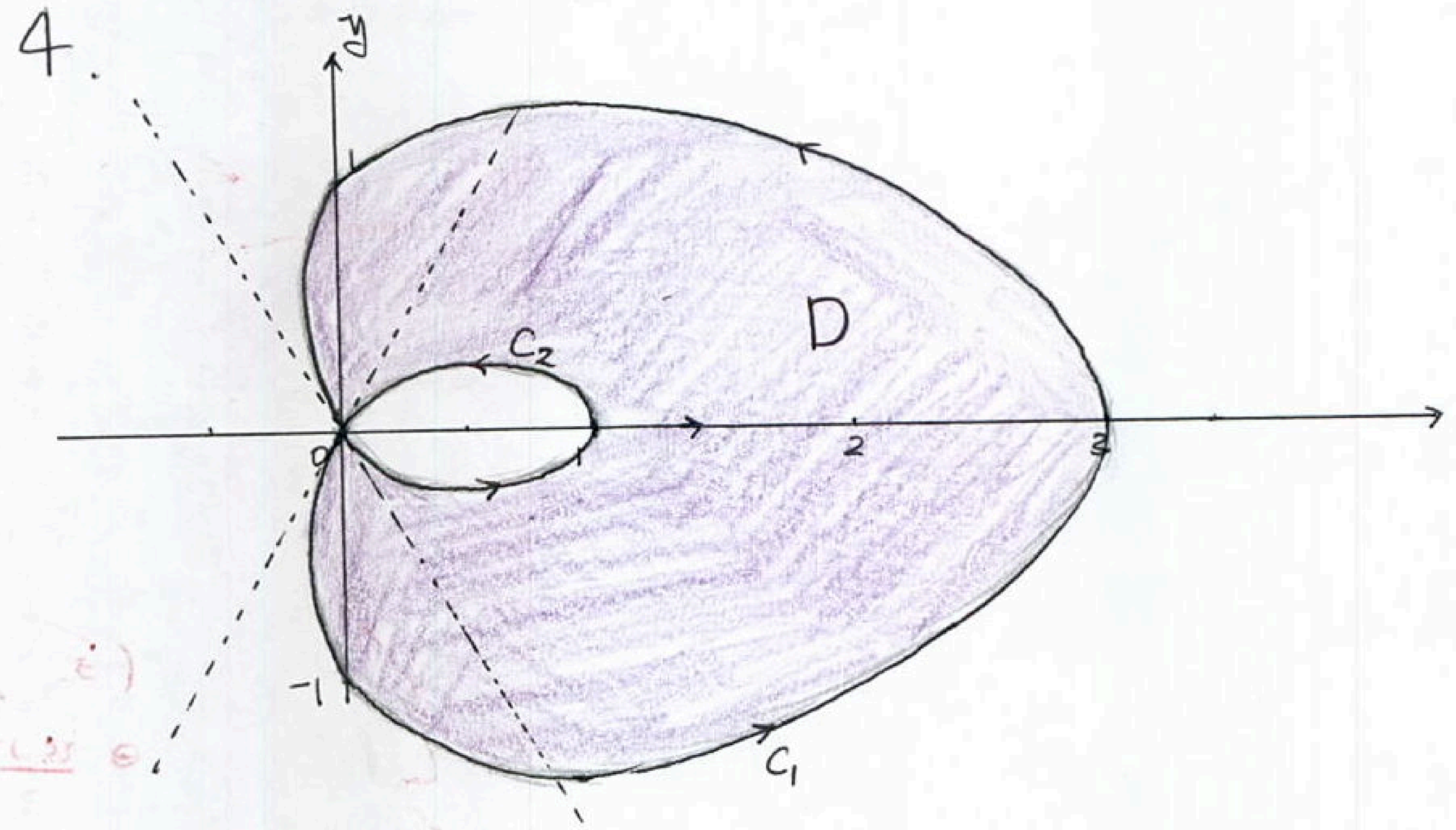
* Φ' 에 대해 사소한 실수라도 있으면 0점.

* 틀린 $\det \Phi'$ 로도 치환적분법, Fubini 정리를 제대로 썼다면 5점

* 틀린 $\det \Phi'$ 로 적분계산시 과정에 대한 점수는 무조건 0점

* Φ' 없이 $|\det \Phi'|$ 구했을 때 맞으면 +10점 틀리면 0점.

4.



$D_1 = C_1 \cup \mathrm{int}\, C_1$, $D_2 = C_2 \cup \mathrm{int}\, C_2$ 라 하면, 발산 정리에 의하여

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, ds = \iint_D \mathrm{div} F\, dV_2 = \iint_{D_1} \mathrm{div} F\, dV_2 - \iint_{D_2} \mathrm{div} F\, dV_2$$

$$= \iint_{D_1} x\, dV_2 - \iint_{D_2} x\, dV_2 \quad (\because \mathrm{div} F = x)$$

┘ 10

D_1 : $0 \le r \le 1 + 2\cos\theta$, $-\frac{2}{3}\pi \le \theta \le \frac{2}{3}\pi$

D_2 : $0 \le r \le 2\cos\theta - 1$, $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ $\quad (0 \le r \le -1 - 2\cos\theta$, $\frac{2}{3}\pi \le \theta \le \frac{4}{3}\pi)$

$$\iint_{D_1} x\, dV_2 = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \int_0^{1+2\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{3}(1+2\cos\theta)^3 \cos\theta\, d\theta$$ ┘

$$= \frac{8}{3}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

$$\iint_{D_2} x\, dV_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\theta - 1} r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}(2\cos\theta - 1)^3 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} \qquad \left(= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{3}(2\cos\theta + 1)^3 \cos\theta\, d\theta\right)$$ ┘

15

$$\therefore \int_{\partial D} F \cdot n\, ds = \frac{4}{3}\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}.$$ ┘ 25

[채점기준]

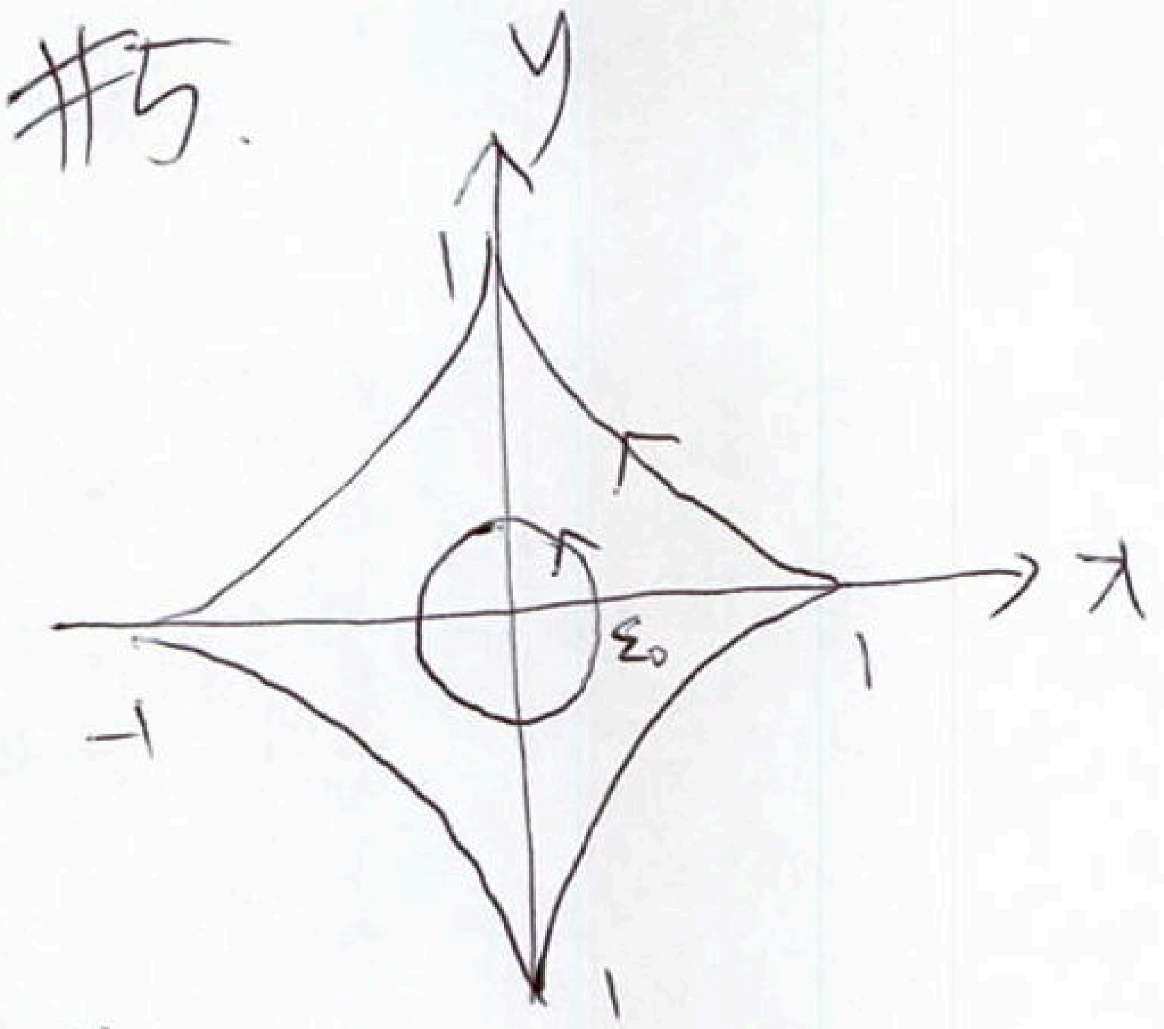
1. divF 계산이 틀리면 0점.

2. 그린 정리를 잘못 적용한 경우 0점.

3. 두 영역의 적분을 빼지 않고 더할 경우 0점. (적분범위 $0 \sim 2\pi$)

4. 발산 정리를 선적분 형태로 잘못 나타낸 경우 0점.

#5.



$B_\varepsilon = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \varepsilon^2\}$ 로 정의하면,

$B_{\varepsilon_0} \subset \mathrm{Int}\, D$ 인 $\varepsilon_0 > 0$ 가 존재한다.

$B_{\varepsilon_0} = B$ 라 하자.

∂D 와 ∂B 의 향을 반시계방향으로 하고,

벡터장

$$\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad ((x,y)\neq(0,0))$$ 로 정의하면,

(구하는 식) $= \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot ds$ 이다.

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{F}(x,y) = -\frac{y^2(x^2+y^2)^2 - xy^2\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$-\frac{3y^2(x^2+y^2)^2 - y^3\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = 0 \quad ((x,y)\neq(0,0))$$

이므로 10

그린정리에의해

$$0 = \iint_{D-B} \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2 = \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot ds - \int_{\partial B} \mathbb{F}\cdot ds$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot ds = \int_{\partial B} \mathbb{F}\cdot ds$$

∂B를 매개화 하면 $X(\theta) = (\varepsilon_0\cos\theta, \varepsilon_0\sin\theta)$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 가 되고,

$X'(\theta) = (-\varepsilon_0\sin\theta, \varepsilon_0\cos\theta)$ 가 되므로

$$\int_{\partial B} \mathbb{F}\cdot ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon_0^3\sin^3\theta}{\varepsilon_0^4},\ -\frac{\varepsilon_0^3\sin^2\theta\cos\theta}{\varepsilon_0^4}\right)\cdot(-\varepsilon_0\sin\theta, \varepsilon_0\cos\theta)\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = -\pi.$$ 20

* $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 0$ 을 구할시 계산과정 없을 경우 −5점
* 다른 풀이로 풀었을 경우 부분점수 없음.

#6

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \}$$

$$X : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto (u, v, \underbrace{\sqrt{u^2+v^2}}_{f(u,v)})$$

$$|N(u,v)| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} = \sqrt{2} \quad +5$$

$$\iint_S y^2 z^2 \, dS$$

$$= \iint_D v^2 (u^2+v^2) \cdot \sqrt{2} \, du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \cdot r\sqrt{2} \, dr d\theta \quad +5$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_1^2 \sqrt{2} r^5 dr$$

$$= \frac{21\sqrt{2}}{2} \pi \quad +10$$

※

1) 다른 매개화를 써도 면적소를 바르게 구하면 5점

2) 발산정리를 이용한 경우, 계산과정과 답이 모두 맞으면 20점.

#7

$$(\text{Flux}) = \int_{\partial R} F \cdot n \, dS = \int_R \operatorname{div} F \, dV_3$$ (∵ 발산정리)

┘5

$\operatorname{div} F = 3$ 에서

$$\int_R \operatorname{div} F \, dV_3 = \int_R 3 \, dV_3$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} \int_r^1 3r \, dz \, dr \, d\theta$$

┘10

(∵ 원기둥좌표계, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow$ $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \le (\frac{1}{2})^2$ 에서 $r^2 \le r\sin\theta$, $r \le \sin\theta$.)

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} 3r - 3r^2 \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{3}{2}\sin^2\theta - \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \int_0^{\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx \quad (x = -\cos\theta)$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3}$$

┘20

#8. 만약 벡터장 $\mathbb{G}$가 존재하여 $\text{curl}\,\mathbb{G} = \mathbb{F}$ 라면

$\text{div}\,\mathbb{F} = \text{div}(\text{curl}\,\mathbb{G}) = 0$ 이다. +10.

$\Rightarrow \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 라 하면

$\mathbb{F} = k(\vec{v}\cdot\vec{x})\cdot\vec{v} = k(v_1x+v_2y+v_3z)(v_1, v_2, v_3)$ 이므로

$\text{div}\,\mathbb{F} = kv_1^2+kv_2^2+kv_3^2 = k$ ($\vec{v}$는 단위벡터)

$\therefore \text{div}\,\mathbb{F} \neq 0$ 모순

$\therefore \mathbb{F}$는 다른 벡터장의 회전장이 될 수 없다. +10.

※ 폐곡면에 대한 적분값을 비교한 경우로 보여도 만점.

※ '$\mathbb{F}$가 항상 $\vec{v}$와 나란하므로 $\text{div}\,\mathbb{F} \neq 0$'도 $\text{div}\,\mathbb{F}$ 계산으로 인정.

① $\text{div}\,\mathbb{F}$의 사소한 계산이나 차원을 잘못쓴 경우 −5

② $\text{div}\,\mathbb{F}$의 계산을 안한경우 −10

③ '$\text{div}\,\mathbb{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbb{F}$는 다른 벡터장의 회전장이 아니다' 명제만 쓴 경우 +10

9.

(a) $\mathrm{curl}\, F = (e^{x+y+z} - x\sin xy - \cos(y+z),\ e^{x+z} - e^{x+y+z} + y\sin xy,\ -3(x^2+y^2))$ //

㊟ 각 component 별로 5점.

(b) (풀이 1)

S': $x^2+y^2 \le 4$, $z=0$, $\vec{n} = (0,0,1)$ 이라 하면, $\partial S' = \partial S$

즉 스토크스의 정리에 의해,

$\iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS = \iint_{S'} \mathrm{curl} F \cdot dS$ (+5점)

이때, $\iint_{S'} \mathrm{curl} F \cdot dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} -3(x^2+y^2)\, dx\, dy$ (매개화: $X(x,y) = (x,y,0)$)

$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -3r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$ (극좌표계 치환) (+5점)

$= -\frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2^4 = -24\pi$ (+5점)

(풀이 2)

스토크스의 정리에 의해,

$\iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds$ (∂S의 향은 반시계 방향) (+5점)

∂S: $x^2+y^2=4$, $z=0$ $\Rightarrow$ $(x,y,z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ 으로 치환. $(0\le\theta\le 2\pi)$
$= X(\theta)$

$\therefore \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(X(\theta)) \cdot X'(\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} (-16\cos^4\theta - 16\sin^4\theta - 2\sin\theta e^{2\cos\theta} + \sin(2\sin\theta)\cdot 2\cos\theta)\, d\theta$ (+5점)

$= -24\pi$ (+5점)

㊟ 향을 반대로 하여 계산한 경우 최대 5점 부여.