

수학 및 연습 2 기말고사
(12월 15일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하십시오.(총점 200점)

1. (30점) 주어진 영역 D 에서 다음 적분값을 구하라.

(a) $\iint_D e^{-x^2} dx dy, \quad D: x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 2.$

(b) $\iint_D \sqrt{1+y^5} dx dy, \quad D: \sqrt[4]{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$

(c) $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz,$
 $D: -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2.$

2. (a) (15점) 다음 두 적분을 구하라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

- (b) (10점) (a)의 결과를 이용하여, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $g(x) = Ae^{-Bx^2}$ 을 찾아라. (단, $A, B > 0$ 이다.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx = 1.$$

3. (30점) 다음 곡면 S 의 넓이와 중심을 구하라.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}.$$

4. (30점) 평면 위의 타원판 $D = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

- (a) D 의 밀도함수가 $\mu(x, y) = x^2 + 2y^2$ 일 때, D 의 질량을 구하라.

- (b) D 의 경계를 C 라 할 때,

$$\int_C ((xy+1)e^{xy} - 3x^2y - 2y^2) dx + (e^{\sin y} + x^2 e^{xy}) dy$$

를 구하라.

5. (30점) 좌표공간에서 입체각 벡터장

$$\mathbb{A} := \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

가 주어져 있다.

- (a) 원점을 중심으로 반지름이 ϵ 인 꼭찬 공 $B(\epsilon) := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon^2\}$ 에 대하여, \mathbb{A} 가 $B(\epsilon)$ 의 경계를 빠져나가는 양을 구하라.

- (b) 원점을 포함하는 영역을 R 이라고 할 때, $R - \{(0, 0, 0)\}$ 에서 $\operatorname{div} \mathbb{A}$ 를 구하라.

- (c) \mathbb{A} 가 원점을 포함하는 영역 R 의 경계를 빠져나가는 양을 구하라.

6. (25점) 3차원 공간의 열린집합에서 정의된 2급 벡터장 \mathbb{F} 에 대하여 다음 명제가 맞으면 증명을, 틀리면 간단한 반례를 들라.

- (a) (10점) 벡터장 \mathbb{F} 가 다른 벡터장의 회전장이면 $\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$ 이다.

- (b) (15점) $\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$ 이면, \mathbb{F} 는 다른 벡터장의 회전장이다.

7. (30점) 3차원 공간에 주어진 벡터장

$$\mathbb{F} = (y(z-1), x(z+1), z^2-1)$$

에 대하여 다음 질문에 답하라.

- (a) \mathbb{F} 의 회전장 $\operatorname{curl} \mathbb{F}$ 를 구하라.

- (b) 다음 식으로 주어진 곡면 S 에 대해 $\left| \iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} \right|$ 를 구하라. (S 의 향은 편향대로 정의하여도 좋다.)

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1 \leq z \leq 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$