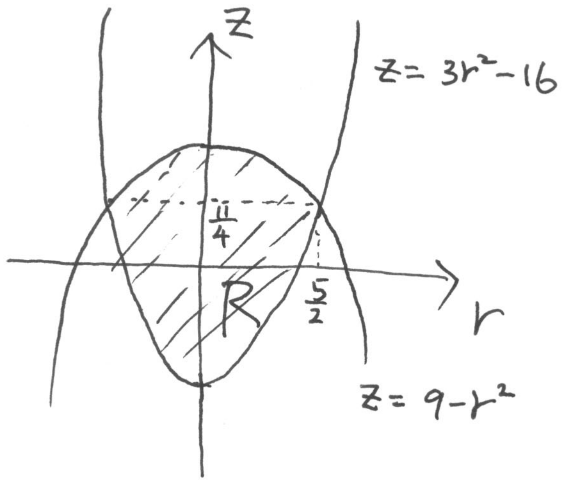
2013년 2학기 수학 및 연습 2 기말고사

#1.



, $r^2=x^2+y^2$

$$3x^2+3y^2-16 \le 9-x^2-y^2 \Rightarrow 3r^2-16 \le 9-r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \le \frac{25}{4} \Rightarrow 0 \le r \le \frac{5}{2}$$

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} 1 \cdot dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{5}{2}} \int_{3r^2-16}^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \quad \cdots (*)$$ 5점

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{5}{2}} 25r - 4r^3\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{625}{8} - \frac{625}{16}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{625}{16} = \frac{625}{8}\pi$$ 15점

$\boxed{\text{채점기준}}$

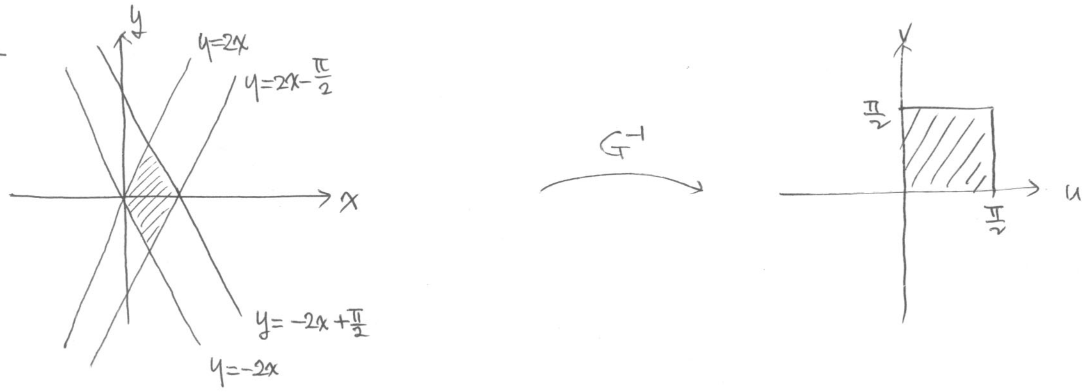
1. (*) 대신에 · $\int_{\frac{11}{4}}^{9} \pi(9-z)\,dz + \int_{-16}^{\frac{11}{4}} \pi\left(\frac{z+16}{3}\right) dz$

· $\int_0^{2\pi} \int_{-16}^{\frac{11}{4}} \int_0^{\sqrt{\frac{z+16}{3}}} r\,dr\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{11}{4}}^{9} \int_0^{\sqrt{9-z}} r\,dr\,dz\,d\theta$

도 인정. (계산 가능한 적분식으로 표현해야 함)

2. 다른 부분점수 없음.

#2



$\begin{cases} u = 2x+y \\ v = 2x-y \end{cases}$ 라 치환하면, $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{4} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$ 이고, $0 \le u, v \le \frac{\pi}{2}$ 이다. 5점

$(x, y) = G(u, v) = \left(\dfrac{u+v}{4}, \dfrac{u-v}{2} \right)$ 가 된다.

$\det G'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$질량\ M = \iint_D (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} uv \cdot \sin u \cdot |\det G'|\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} uv \sin u\,du\,dv$$ 15점

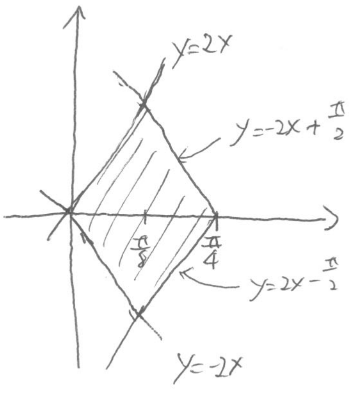
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\,dv \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin u\,du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8} \cdot \left(\left[-u\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{32}$$ 20점

※ $\frac{1}{4}du\,dv = dx\,dy$ 를 언급한 경우 적분식이 틀려도 10점.

치환을 하지 않고 적분을 계산한 풀이.



$$M = \iint_D (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}}\int_{-2x}^{2x} (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dy\,dx + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{2x-\frac{\pi}{2}}^{-2x+\frac{\pi}{2}} (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dy\,dx$$

5점

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\int_{-2x}^{2x} (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \Big[-(4x^2-y^2)\cos(2x+y) - 2y\sin(2x+y) - 2\cos(2x+y)\Big]_{-2x}^{2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} -4x\sin(4x) - 2\cos(4x) + 2 \quad dx$$

$$= \Big[x\cos(4x) - \frac{3}{4}\sin(4x) + 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{3}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{2x-\frac{\pi}{2}}^{-2x+\frac{\pi}{2}} (4x^2-y^2)\sin(2x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \Big[-(4x^2-y^2)\cos(2x+y) - 2y\sin(2x+y) - 2\cos(2x+y)\Big]_{2x-\frac{\pi}{2}}^{-2x+\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} +(4x-\pi) + \left(\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(-\frac{\pi^2}{4} + 2x\pi\right) + 2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\ dx$$

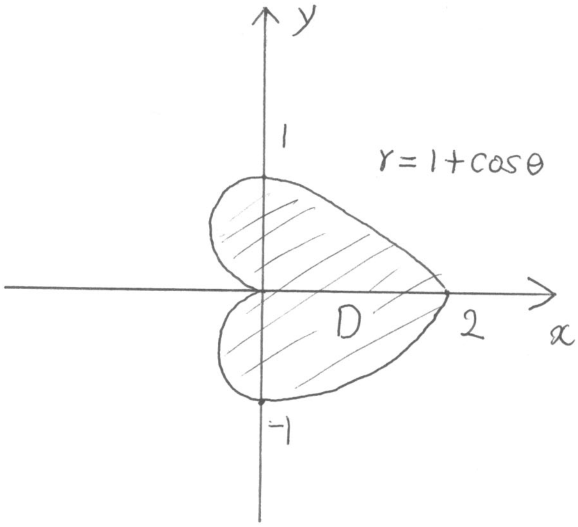
$$= \Big[2x^2 - \pi x + \left(\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{16}\pi^2 + \frac{1}{2}x\pi\right) - \left(x - \frac{3}{8}\pi\right)\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{16} - 0 + \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{32} + \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}.$$

$$M = \frac{\pi^2}{32}$$

20점

3.



영역 D 에서 기하학적 중심을 $(\bar{x}, \bar{y})$ 라 하자. 그러면 Area D = A 라 할 때 $\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,dV$, $\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,dV$ 이다.

$$A = \text{Area } D = \iint_D 1\,dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta = \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \text{(5점)}$$

영역 D는 x축에 대칭이므로 $\bar{y} = 0$. $\cdots$ (5점)

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,dV$$
$$= \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta \quad \cdots \text{(5점)}$$
$$= \frac{1}{A}\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^3}{3}\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{A} \times \frac{5}{4}\pi = \frac{2}{3\pi} \times \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{6} \quad \cdots \text{(5점)}$$

따라서 $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{6}, 0\right)$

---

(1) $\bar{y} = 0$ 은 식 또는 그림을 통해 정당화를 했을 경우도 5점

(2) 영역 D의 넓이를 잘못 구하더라도 구해 놓은 넓이에 대해 $\bar{x}$, $\bar{y}$를 잘 구했으면 $\bar{x}$ 의 경우 10점, $\bar{y}$의 경우 5점

문제 4

$$F(x,y) = \left(3yx^2\sqrt{1+yx^3} - y^2e^{xy},\ x^3\sqrt{1+yx^3} - xye^{xy}\right)$$

$$\operatorname{rot} F = y \cdot e^{xy}$$

그린 정리에 의해,

$$\int_C F \cdot ds = \iint_D \operatorname{rot} F \, dx\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{x}}^{2} y e^{xy} \, dy\, dx \cdots (1)$$

↲ (+10점)

rot F 구하는 과정에서 계산이 틀리면 5점 감점.

∵ 푸비니 정리

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{y}}^{2} y e^{xy} \, dx\, dy$$

↲ (+5점)

$$= \frac{1}{2}e^4 - 2e$$

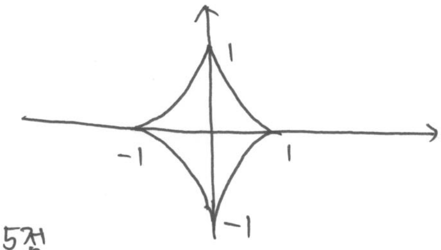
↲ (+5점)

* (1)에서 푸비니 정리를 이용하지 않고, 부분적분을 이용하는 경우 과정과 결과가 모두 맞으면 +10점.
과정이 맞더라도 계산 결과가 틀리는 경우 5점 감점.

문제 5

그린 정리에 의해

$$\text{Area}(D) = \underbrace{-\int_{\partial D} y\,dx}_{①} = \underbrace{\int_{\partial D} x\,dy}_{②} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy}_{③}.$$



5점

이다. 이때, ∂D를 $X(t) = (\cos^5 t, \sin^5 t)$, $0 \le t \le 2\pi$ 로 매개화하면

$x = \cos^5 t$ $\qquad$ $y = \sin^5 t$

$dx = 5\cos^4 t \cdot (-\sin t)\,dt$ $\qquad$ $dy = 5\sin^4 t \cdot \cos t\,dt.$ 이므로

$① = \int_0^{2\pi} 5\cos^4 t \sin^6 t\,dt$, $② = \int_0^{2\pi} 5\sin^4 t \cos^6 t\,dt$, $③ = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 5\cos^4 t \sin^4 t\,dt.$

10점

$$③ = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2^4}\cdot(2\sin t\cos t)^4\,dt = \frac{5}{2^5}\int_0^{2\pi} \sin^4 2t\,dt$$

$$= \frac{5}{2^7}\int_0^{2\pi} (2\sin^2 2t)^2\,dt = \frac{5}{2^7}\cdot\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)^2\,dt$$

$$= \frac{5}{2^7}\cdot\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t)\,dt$$

$$= \frac{5}{2^7}\cdot\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 4t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 8t\right)dt$$

$$= \frac{5}{2^7}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = \frac{15}{2^7}\pi = \frac{15}{128}\pi$$

①, ② 도 비슷하게 계산.

20점.

별해) D를 $X(r,\theta) = (r\cos^5\theta, r\sin^5\theta)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 라고 하면

$$|X'(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \cos^5\theta & -5r\cos^4\theta\sin\theta \\ \sin^5\theta & 5r\sin^4\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 5r\sin^4\theta\cos^6\theta + 5r\sin^6\theta\cos^4\theta$$

$$= 5r\sin^4\theta\cos^4\theta \text{ 이다.}$$

따라서, $\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dV_2 = \iint_D |X'(r,\theta)|\,dr\,d\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi} 5r\sin^4\theta\cos^4\theta\,dr\,d\theta = \frac{15}{128}\pi$

5점 $\qquad$ 10점 $\qquad$ 20점.

$\boxed{6}$. $X_u = (2u,\ 1,\ 2u)$

$X_v = (-2v,\ 1,\ 4)$.

$X_u \times X_v = (4-2u,\ -8u-4uv,\ 2u+2v)$. (5점)

$X(u_0, v_0) = p = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$ 를 만족하는 u_0, v_0를

구하면, $u_0 = 0,\ v_0 = \frac{1}{2}$ 이다. (2점)

따라서 점 p에서 접평면의 법선벡터 $N = X_u \times X_v(0, \frac{1}{2})$

$= (4, 0, 1)$ 이다.

따라서, 점 p에서 접평면은 $4(x+\frac{1}{4}) + 0\cdot(y-\frac{1}{2}) + 1\cdot(z-2) = 0$

이다. (3점).

* $X_u \times X_v$ 계산이 틀린 경우, 답이 맞더라도 점수 없음.

* 법선벡터를 구하지 않고 다른 방법으로 푼 경우

답이 틀리면 부분점수 없음.

[#7] 구면 S의 매개화 $X(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi+1)$

$(0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ ┘ 5점

구면의 면적소 $dS = |X_\varphi \times X_\theta|\, d\varphi\, d\theta = \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$

$$\therefore \iint_S f\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\,\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

┘ 10점

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\,\sin\varphi\, d\varphi\right)$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{2}{3}(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$$

┘ 15점

(채점기준) ① 구면의 매개화가 올바르면 5점

다른 예) • $X_1(\varphi,\theta) = (\sin 2\varphi\cos\theta, \sin 2\varphi\sin\theta, 2\cos^2\varphi)$

• $X_2(z,\theta) = (\sqrt{2z-z^2}\cos\theta, \sqrt{2z-z^2}\sin\theta, z)$ ┘ 5

② 면적분을 계산할 때 매개변수의 적분범위, 적분식, 면적소가 모두 올바르게

구해지면 그에 해당하는 점수 +5점

• X_1의 경우 $dS = 4\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta$ ┘ 10

③ 면적분 식에서 최종계산 결과까지 올바르게 도달하면 +5점 ┘ 15

※ 구면의 매개화가 위반쪽만 된경우 ($X(x,y) = (x, y, 1+\sqrt{1-x^2-y^2})$)

이 반쪽에 해당하는 면적분값 $\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$ 이 올바르게 계산되면 5점부여.

아래반쪽에 대하여서도 올바른 값 $\frac{4}{3}\pi$를 구하고 두 값을 합쳐 답이 나오면 15점.

※ 면적분을 3차원 적분으로 오인하여 계산하면 점수없음.

#8.

매개화: $X(\varphi,\theta) = ((\cos\varphi+2)\cos\theta,\ (\cos\varphi+2)\sin\theta,\ \sin\varphi),\quad (0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ +5

면적소: $X_\varphi = (-\sin\varphi\cos\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$

$X_\theta = (-(\cos\varphi+2)\sin\theta,\ (\cos\varphi+2)\cos\theta,\ 0)$

$X_\varphi\times X_\theta = (-(\cos\varphi+2)\cos\varphi\cos\theta,\ -(\cos\varphi+2)\cos\varphi\sin\theta,\ -(\cos\varphi+2)\sin\varphi)$

$\therefore\ |X_\varphi\times X_\theta| = \cos\varphi+2.$

+5

적분값:

$$\iint_T f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi+2}\cdot(\cos\varphi+2)\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 2\pi^2.$$

+10.

채점기준.

* 매개화가 완전히 틀린 경우, 0점. (즉, 원환면이 아닌 경우를 포함.)
* 매개화가 올바르지는 않지만 원환면인 경우 (예: 평행이동된 경우, 축이 바뀐 경우.) 매개화에 대한 점수는 없으나 이후 점수는 인정.
* 면적소가 틀린 경우, 면적소에 대한 점수는 없으나 그 전후 점수는 인정.
* 사소한 실수는 5점 감점.

예) ① 매개변수의 범위를 잘못 지정한 경우.
② 함수 f를 잘못 본 경우.
③ 계산 실수를 한 경우.

#9.

D를 $x^2+y^2 \le 4$, $z=4$ 인 곡면이라 하자.

이때, $\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV = \iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot dS$

$= \iint_S \mathbb{F}\cdot dS + \iint_D \mathbb{F}\cdot dS$

(5점).

이때, $\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV = \iiint_R 3\,dV = 3\cdot 3 = 9$. (10점).

그리고, $\iint_D \mathbb{F}\cdot dS = \iint_D (x,y,z)\cdot(0,0,-1)\,dS$

$= \iint_D -z\,dS$

$= -4\iint_D dS = -4\cdot 4\pi = -16\pi$ (20점).

따라서, $\iint_S \mathbb{F}\cdot dS = 9+16\pi$.

「향이 틀리면 5점 감점.
계산 실수 5점 감점.」

10.

① $$\iint_S F\cdot i\, dS = \iint_S -p(z)\vec{n}\cdot i\, dS$$

$$= \iint_S -p(z)\, i\cdot\vec{n}\, dS \quad (*)$$ 5

$$= \iint_S -p(z)\, i\cdot d\vec{S} \quad (*)$$

S가 폐곡면이므로
발산정리 사용가능

$$= \iiint_{\mathrm{int}S} \operatorname{div}(-p(z)\, i)\, dV_3 \quad (**)$$

$$= \underbrace{\iiint_{\mathrm{int}S} \frac{\partial(-p(z))}{\partial x}\, dV_3}_{(**)} = 0$$

② $$\iint_S F\cdot j\, dS = 0$$ ($\because$ ①과 마찬가지 이유) 5

③ $$\iint_S F\cdot k\, dS = \iint_S -p(z)\cdot k\cdot\vec{n}\, dS$$

$$= \iint_S -p(z)\cdot k\, d\vec{S}$$

$$= \iiint_{\mathrm{int}S} \operatorname{div}(-p(z)\cdot k)\, dV_3$$

$$= \iiint_{\mathrm{int}S} -\mu(z)\, dV_3.$$

$$= -m$$ 10

- $(*)$: $n\cdot i = i\cdot n$ 을 명시한 경우 (+5점)
- $(**)$: $(**)$ 과정을 생략하고 발산정리 언급 없을시 추가점수 없음.
  $(**)$ 과정을 생략하고 발산정리 언급이 있다면 최대 10점

#11.

$$\operatorname{curl} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ z(1+\cosh x) & \cosh y - e^{z} & \sinh x \end{vmatrix}$$

$$= (e^{z}, 1, 0) \quad \text{5점}$$

곡면 S를 매개화하면 $X(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2})$ 이므로,

$X_x = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $X_y = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ 이 되어

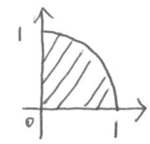
$$N = X_x \times X_y$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \text{ 이다.} \quad \text{5점}$$

그러면, 스토크스 정리에 의해,

$$\int_{\partial S} \mathbb{F} \cdot ds = \iint_S \operatorname{curl} \mathbb{F} \cdot dS$$

$$= \iint_D \operatorname{curl} \mathbb{F}(X(x,y)) \cdot N \, dx\,dy$$

(D: )

$$= \iint_D (e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, 1, 0) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (e^{-r}\cos\theta + \sin\theta) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2}{e}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{e} \quad \text{10점}$$

- 매개화를 다르게 했어도 향이 정확하면 인정.
- 폐곡면을 이용했을 시 향이 모두 정확해야 인정.