수학 및 연습 2 기말고사

(2010년 12월 4일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 다음 반복적분을 구하시오.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$$

문제 2 (25점). 다음 영역 R 의 밀도함수가 $\mu(x,y,z)=z$ 일 때, R 의 질량중심의 z-좌표 $\overline{z}$ 를 구하시오.

$$R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$$

문제 3 (30점). 좌표평면 위의 점

$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (0,3),\ (-1,3),\ (-2,2),\ (-2,1),\ (-1,0)$$

에 대하여 점 $(0,0)$ 부터 점 $(-1,0)$ 까지 순서대로 선분으로 연결한 곡선을 C 라 하자. 이때 곡선 C 를 따르는 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y)=(e^x-y)\mathbf{i}+(x-e^{y^2})\mathbf{j}$$

의 선적분 값을 구하시오.

문제 4 (20점). 좌표평면에서 $\mathbf{r}(x,y)=(x,y)$ 은 위치벡터장이다. 점 $(0,0),\ (1,2),\ (0,3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 내부 영역을 D 라 하자. 좌표평면 위의 임의의 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대하여

$$\int_{\partial D}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,ds$$

의 값을 구하시오. (단, $\mathbf{n}$ 은 영역 D 의 경계에서의 표준 단위법벡터장이다.)

문제 5 (30점). 좌표공간에서 R 은 두 영역

$$x^2+y^2+(z-1)^2\le 4^2,\quad x^2+y^2+(z+1)^2\le 4^2$$

의 합집합이고, 벡터장 $\mathbf{F}$ 가

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\big((x+y-z)\mathbf{i}+(y+z-x)\mathbf{j}+(z+x-y)\mathbf{k}\big)$$

일 때, $\iint_{\partial R}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. (단, ∂R 의 향은 외향 단위법벡터로 주어진다.)

문제 6 (30점). 곡면 $S: 3x^2+2y^2+z^2=4,\ z\ge 1$ 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_S \frac{6x^2z+2ye^z\sin x-z^3}{\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}}dS$$

문제 7 (25점). 곡면 $S: x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(z-y)\mathbf{i}+x\cos z\mathbf{j}+(e^{xy}+z^2)\mathbf{k}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, S 의 향은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$ 이 되도록 정한다.)

(a) (10점) $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ 를 구하시오.

(b) (15점) $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

문제 8 (20점). 영역 D 는 오른쪽 반평면 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$ 에 포함되며 일급곡선 유한개로 둘러싸인 영역이고, a 는 실수이다. 두 함수

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{a/2},\quad g(x,y)=f(x,y)\cos\left(a\arctan\frac{y}{x}\right)$$

에 대하여 다음 두 곡면의 넓이가 같음을 보이시오.

$$S_f=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\}$$
$$S_g=\{(x,y,g(x,y))\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\}$$