수학 및 연습 2 기말고사

(2011년 12월 10일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (15점)**.** 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$$

문제 2 (20점)**.** 좌표공간에서 위로는 포물기둥 $z = 4 - y^2$ 을 경계로 하고, 아래는 타원 포물면 $z = x^2 + 3y^2$ 을 경계로 하는 입체 T 의 부피를 구하시오.

문제 3 (20점)**.** 좌표평면에 $y = \cosh x,\ y = \sinh x,\ x = 0,\ x = -1$ 로 둘러싸인 영역 R 이 있다.

(a) (10점) R 의 넓이를 구하시오.

(b) (10점) R 의 중심을 구하시오.

문제 4 (20점)**.** 좌표평면의 영역 $D\ :\ |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |x| + |y| \ge 1$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(x^3 - 2ye^{x^3+y^2},\ y^3 + 3x^2e^{x^3+y^2}\right) + \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

에 대하여 $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\, ds$ 를 구하시오.

문제 5 (25점)**.** 쌍곡면 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ $(1 \le x \le 2)$ 에서 밀도함수가 $f(x,y,z) = x$으로 주어질 때, 그 질량을 구하시오.

문제 6 (25점)**.** 좌표평면에서 $(2x+y)^2 + (2x+3y)^2 = 4$로 둘러싸인 영역을 D 라 하고, D 를 정의역으로 하는 함수 $f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ 의 그래프로 주어진 곡면을 S 라 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, z^2)$가 곡면 S 를 빠져나가는 양을 구하시오. (단 , 이 때 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \ge 0$ 으로 주어진다.)

문제 7 (25점)**.** 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) 좌표공간에서 원점을 중심으로 하는 두 타원면과 원뿔 $z \ge \sqrt{k(x^2+y^2)}$ 내부의 교집합을 각각 S_1 과 S_2 라 하자. 곡면 S_1 과 S_2가 서로 만나지 않을 때, 입체각벡터장 $\mathbf{A}(X) = \dfrac{X}{|X|^3}$ 를 S_1 위에서 적분한 값과 S_2 위에서 적분한 값이 같음을 보이시오. (단, $k > 0$ 이고, 두 곡면의 향은 원점에서 멀어지는 방향이다.)

(b) (10점) 입체각벡터장 $\mathbf{A}(X)$ 를 원뿔 $z \ge \sqrt{3(x^2+y^2)}$ 내부에 놓여있는 타원면

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

위에서 면적분한 값을 쓰시오.

문제 8 (30점)**.** 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^3 + \sin xz, e^{y^2} - x^3, e^z - 1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ 를 구하시오.

(b) (20점) 곡면 $S : \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{4^2} = 1, z \ge 0$ 에 대하여, $\displaystyle\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.
(단 , 이 때 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \ge 0$ 으로 주어진다.)

문제 9 (20점)**.** 중심이 원점이고 반지름이 1과 2인 구면으로 둘러싸인 영역을 R이라고 하고 그 경계면을 S라고 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3 + 12xy^2, y^3 + e^y \sin z, 5z^3 + e^y \cos z)$에 대하여 다음 적분값을 구하시오.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$