수학 및 연습 2 기말고사

2004년 12월 11일 오후 1시 – 3시

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 삼차원 공간의 영역 V 를 다음과 같이 정의했을 때 V 의 부피를 구하여라:

$$V = \{(x, y, z)|\ 0 \le x \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{1 + y^3}\}.$$

2. (20점) $\frac{1}{8}$-구면 $X : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ 의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = z$ 일 때, 이 $\frac{1}{8}$-구면의 질량중심의 z 좌표 $\bar{z}$ 를 구하여라.

3. (20점) 이중적분을 이용하여 적분값 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ 를 구하여라.

4. (20점) 곡면 S 를 매개화된 곡면

$$X(r, \theta) = (r \cos\theta, 2r \sin\theta, r), \quad (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

이라고 했을 때

(a) S 는 어떤 곡면인가? (이 곡면의 x, y, z 방정식을 구하고 이를 대강 그려라.) (8점)

(b) 벡터장 $\mathbf{F} = \dfrac{y}{2z}\mathbf{i} - \dfrac{2x}{z}\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ 에 대하여 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하여라. 이때 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$ 이 되도록 주어진다. (12점)

5. (20점) 반지름 $c > 0$ 인 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ 에서 원기둥 $x^2 + y^2 = cy$ 의 내부에 있는 부분의 넓이를 구하여라. (주의: 두 부분이 있다.)

6. (20점) 공간에서 점(1,1,2) 를 중심으로 하고 단위벡터 $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ 에 수직이며 반지름이 r 인 원판의 경계를 C_r 이라 할 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ 에 대하여 다음 극한값을 구하여라. (이때 C_r의 향은 원점에서 볼 때 시계방향이 되도록 정한다.)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

7. (20점) B^+ 를 반공(upper half ball) $\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$ 라고 하자. B^+ 안의 점 (x, y, z) 의 밀도가 함수 $\mu(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 로 주어질 때 B^+ 의 질량을 구하여라.

8. (20점) 좌표평면에서 중심이 0 이고 반지름이 a 인 원을 시계 반대방향으로 한바퀴 도는 곡선을 C 라 할 때, 선적분 $\int_C (y^3 + \sin x)dx + (e^y - x^3)dy$ 의 값을 구하여라.

9. (20점) 타원기둥면 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 평면 $x + y + z = 1$ 이 교차하는 곡선을 C 라고 하자. 이때 선적분 $\displaystyle\int_C -y dx + x dy + z^9 dz$ 를 구하여라. (곡선 C 의 향은 xy 평면으로 정사영한 것의 향이 시계 반대방향이 되도록 정한다.)

10. (20점) S_1 을 원판 $\{x^2 + y^2 \le 1, z = 0\}$ 이라 하고 S_2 를 반구면 $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}$ 이라 하자. S_2 의 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 로 정하고, $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k}$ 라고 하자.

(a) $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS$ 의 값을 구하여라. (8점)

(b) 발산정리와 (a)의 값을 이용하여 $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하여라. (12점)