

수학 및 연습 2 기말고사

2006년 12월 9일 13시 - 15시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 \sin(1+x^2) dx dy.$$

2. (20점) 극형식으로 주어진 곡선 $r = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)의 내부를 D 라 할 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D xy dA.$$

3. (25점) 입체 $R: (x-y)^2 + (4y-z)^2 + (z-x)^2 \leq 1$ 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iiint_R |x-y| dV.$$

4. 좌표평면 상에서 x -축과 싸이클로이드

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

로 둘러싸인 영역을 D 라 하자.

- (a) (15점) D 의 넓이를 구하시오.

- (b) (15점) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (6x + e^y, 4y - \ln(x+1))$ 가 D 의 경계 ∂D 를 통과하는 양(flux)을 구하시오.

5. (25점) 곡면 S 가 구의 일부분으로서 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq \frac{1}{2}$)로 정의된다. 곡면 S 의 무게중심의 z -좌표를 구하시오.

6. (25점) 닫힌 일급 정규 곡면 S 와 점 P 에 대하여 다음을 증명하시오.

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{X-P}{|X-P|^3} \cdot dS = \begin{cases} 1 & P \text{ 가 } S \text{ 의 내부에 있으면,} \\ 0 & P \text{ 가 } S \text{ 의 외부에 있으면.} \end{cases}$$

7. (25점) 곡면 S 를 원뿔면 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 중 $z \geq 0$ 인 부분이라 하고 곡면의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 로 주어진다 고 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2z, y + e^x, x^2 + y^2 + z)$ 가 S 를 빠져나가는 양을 구하시오.

8. 주어진 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{r(x^2 + y^2)}, \frac{-xz}{r(x^2 + y^2)}, 0 \right)$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오. 단, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- (a) (15점) \mathbf{F} 의 회전장 $\text{curl } \mathbf{F}$ 를 구하시오.

- (b) (15점) 곡면 $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$)에 대하여

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS$$

를 구하시오. 단, S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 가 되도록 정한다.