<2014년 여름학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안>.

#1. (a)

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dz \, dy \, dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \cdot \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$ 5

$$= \frac{\pi}{6}(e-1)$$ 10

(b)

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} \, dy \, dz \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x \frac{\sin 2z}{4-z} \, dz \, dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} x \frac{\sin 2z}{4-z} \, dx \, dz$$ 5

푸비니 정리

$$= \int_0^4 \frac{1}{2} \cdot \sin 2z \, dz = \frac{1}{4}(1-\cos 8)$$ 10

(c)

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2+1)^{3/2}}\, r\, dr\, d\theta$$ 5

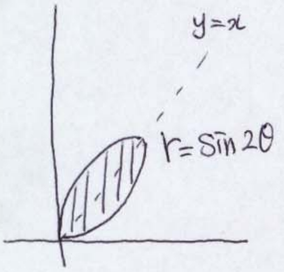
극좌표 치환

$$= \frac{3}{4}\pi$$ 10

#2. $\mathbb{F}(x,y) = (-y, x)$라 하면 $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 2$이므로 그린 정리에 의해

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \iint_{\mathrm{int}(C)} 2\,dV_2$$

이다. ┘+5점



int(C)는 왼쪽 그림의 색칠된 영역이므로

$$\iint_{\mathrm{int}(C)} 2\,dV_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin 2\theta} 2r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta$$ ┘+10점

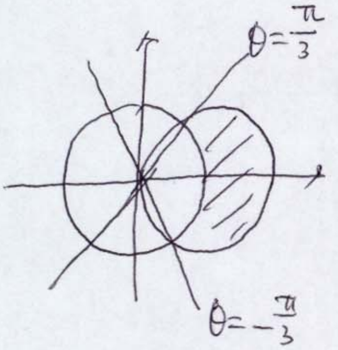
$$= \frac{\pi}{4}$$ ┘+5점

이다.

(채점기준) – 선적분을 직접 계산 할 경우, 마지막 적분식까지 맞아야 +15점. 답도 맞을 경우 +5점.

3. $F(x,y) = \left(y^3 - yx^2 + \frac{1}{x}e^{\arctan x^2},\ y^4\cos y + xy^2 - x^3\right)$

$$\int_C F\cdot ds \underset{\text{그린정리}}{=} \iint_D \operatorname{rot} F\, dV_2 = \iint_D (-2x^2 - 2y^2)\, dV_2$$ 5점



$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \Rightarrow r^2 \geq 1 \\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq 2r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$\underset{\text{극좌표치환}}{=} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} -2r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$ 5점

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (16\cos^4\theta - 1)\, d\theta$$ 5점

$$= -\frac{5}{3}\pi - \frac{7}{4}\sqrt{3}$$ 5점

#4. (a) $\displaystyle\int_{\partial D} u \,\mathrm{grad}\, u \cdot ds \underset{\uparrow}{=} \iint_D \mathrm{rot}\,(u \,\mathrm{grad}\, u)\, dV_2$ 5점

그린정리

$$= \iint_D \mathrm{rot}\left(u \frac{\partial u}{\partial x},\ u \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV_2$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) dV_2$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \right) dV_2$$

$$= \iint_D 0 \ dV_2 = 0$$ 5점

※ rot (u grad u) 에 대한 정확한 계산식이 없을경우에

그린정리 부분에만 점수 부여

(b) $\displaystyle\int_{\partial D} u \,\mathrm{grad}\, u \cdot n \, ds \underset{\uparrow}{=} \iint_D \mathrm{div}\,(u \,\mathrm{grad}\, u)\, dV_2$ 5점

발산정리

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) dV_2$$

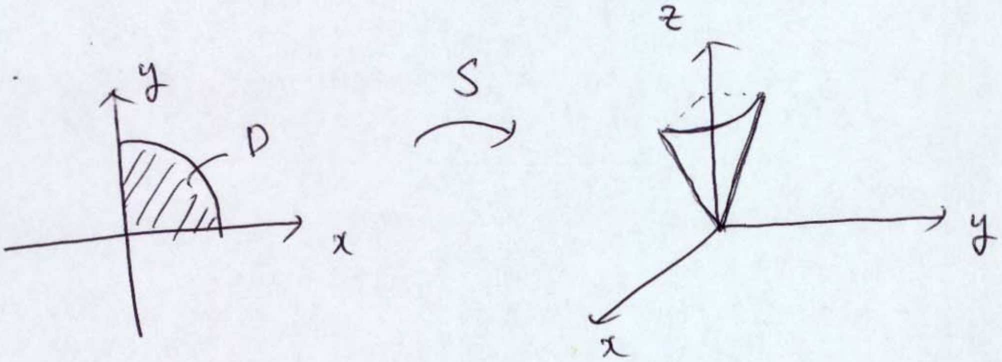
$$= \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dV_2$$

$$\underset{\uparrow}{=} \iint_D \left(|\mathrm{grad}\, u|^2 + u \nabla^2 u \right) dV_2$$ 5점

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |\mathrm{grad}\, u|^2$, $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \nabla^2 u$.

$$\therefore \iint_D |\mathrm{grad}\, u|^2 dV_2 = \int_{\partial D} u \,\mathrm{grad}\, u \cdot n \, ds - \iint_D u \nabla^2 u \, dV_2$$

#5.



$$S(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$S_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad S_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$N = -S_x \times S_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$ 5

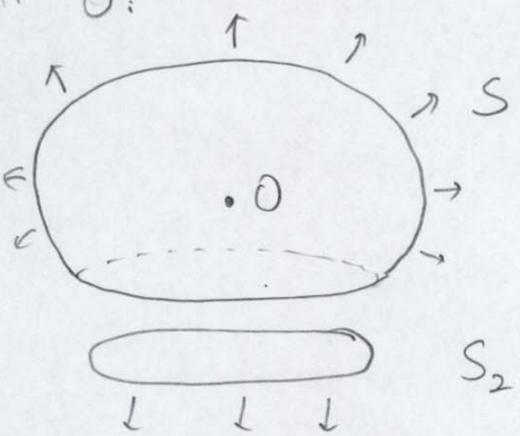
$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \; dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta - r^2 \; dr\,d\theta$$ 10

$$= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$$ 20

* 발산 정리를 사용한 경우, 계산이 틀리면 점수 없음.

6.



S : $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{6}+\frac{(-1)^2}{2}\le 1$, $z=-1$

인 평면을 S_2라 하자.

$S \cup S_2$가 폐곡면이고,

내부에 원점이 있으므로

가우스 정리에 의해 $\iint_{S\cup S_2} F\cdot dS = 4\pi$ 5점

S_2 : $x^2+y^2\le 3$, $z=-1$, $n=(0,0,-1)$

$$\iint_{S_2} F\cdot dS = \iint_{x^2+y^2\le 3} \frac{(x,y,-1)}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 3} (x^2+y^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (r^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr\,d\theta$$

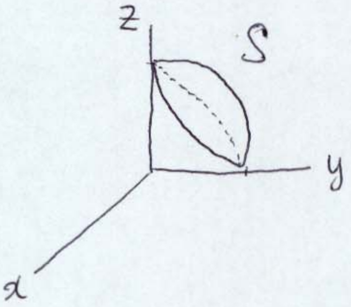
$$= 2\pi\left[-(r^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \pi .$$ 15점

$$\iint_S F\cdot dS = 4\pi - \iint_{S_2} F\cdot dS = 3\pi .$$ 20점

#7. 곡면 S의 질량은

$$\iint_S f\,dS$$

로 주어진다.



구면 좌표계로 곡면 S의 매개화를 주면 면적소 dS는

$$dS = \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

로 주어지고 매개화의 정의역은 $\{(\varphi, \theta) \mid 0 \le \varphi \le \theta, 0 \le \theta \le \pi\}$ 이다. 따라서

$$\iint_S f\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{\theta} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$ +10점

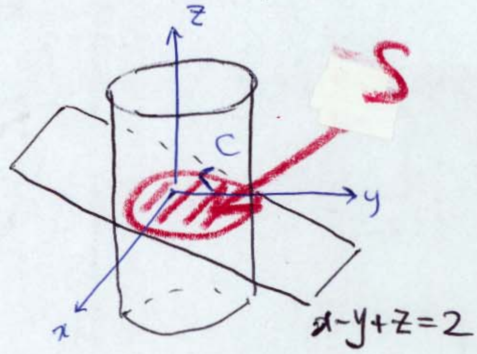
$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1 - \cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{5}{32}\pi$$ +10점

이다.

(채점기준) - 곡면의 매개화를 찾은 후 정확한 적분영역과 피적분 함수를 적은 경우 +10점, 답도 맞은 경우 +10점

[#8] $\vec{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$ 이라 두면



스토크스 정리에 의해,

$$\int_C \vec{F}\cdot ds = \iint_S \text{curl}\,F\cdot dS \quad +3$$

$$\text{curl}\,F = (0,\ 0,\ 3(x^2+y^2)) \quad +2$$

S의 매개화 : $(x,\ y,\ 2-x+y)$

$$\therefore (\text{준식}) = \iint_{x^2+y^2\le 4} (0, 0, 3x^2+3y^2)\cdot(1,-1,1)\,dx\,dy$$

(C의 향에 의해 유도되는 S의 향은 (1,-1,1) 방향) +2

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{3}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=2} = \boxed{24\pi} \quad +3$$

(채점기준) • 스토크스 정리를 서술하면 +3점

• curl을 올바르게 계산하면 +2점

• S를 잘 매개화하고 면적분을 매개변수에 관한 적분으로 잘 구한 경우 +2점

• 계산을 끝까지 마무리하여 정답에 도달하면 +3점.

• 향을 반대로 계산한 경우 −2점.

[#9] $\mathbb{F}(x,y,z) = A_{P_1}(x,y,z) + A_{P_2}(x,y,z) + G(x,y,z)$

단, 여기서 $P_1 = (2,0,0)$, $P_2 = (0,0,\frac{1}{2})$,

$$G(x,y,z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$$

※ 입체각 벡터장의 성질 $\displaystyle\int_S A_p(x)\cdot dS = \begin{cases} 0 & \text{if } p\in \text{ext}(S) \\ 4\pi & \text{if } p\in \text{int}(S) \end{cases}$

따라서 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 에 대하여 $\displaystyle\int_S A_{P_1}\cdot dS = 0$ +5

$$\int_S A_{P_2}\cdot dS = 4\pi$$ +5

이제 $\displaystyle\int_S G\cdot dS = \int_{x^2+y^2+z^2\le 1} \operatorname{div} G \, dV_3$

$$= \int_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3(x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz$$ +5

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{3}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{12}{5}\pi$$ +5

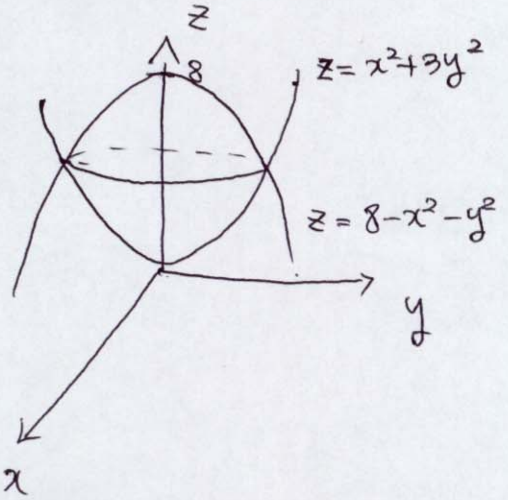
따라서, 총 flux는 $0 + 4\pi + \frac{12}{5}\pi = \frac{32}{5}\pi$

※ 채점기준

- 입체각 벡터장의 성질을 사용할 때, 두 점을 나누어 생각하지 않은 경우 감점 -5점.
  - 단, 단순히 $\operatorname{div}(A_{P_1}+A_{P_2}) = 0$ 이므로 두 입체각 벡터장의 적분값 합이 0이라 기술하는 경우, 입체각 벡터장 부분의 점수 없음.
- G의 면적분을 발산정리로 올바르게 표현하면 +5점
- 〃 계산까지 올바르게 $\frac{12}{5}\pi$을 얻으면 +5점

[#10] $\quad z = x^2 + 3y^2 , \quad z = 8 - x^2 - y^2$

$$F(x,y,z) = (2x + x^2 + e^{y^3 \sin yz} , \ (2-3z^2)y + \cos y , \ z(\sin y - 2x) + z^3)$$



$$\iint_{\partial R} F \cdot ds = ?$$

발산 정리에 의해 $\quad \iint_{\partial R} F \cdot dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV \quad - ①$ $\quad$ 5

$\Rightarrow \operatorname{div} F = 2 + 2x + (2 - 3z^2) - \sin y + \sin y - 2x + 3z^2$

$= 4$

$① = \iiint_R 4 \, dV_3 = 4 \operatorname{vol}(R)$

$$\operatorname{vol}(R) = \iint_{x^2+2y^2 \leq 4} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$ 5

$$= \iint_{x^2+2y^2 \leq 4} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, dx\,dy \quad - ②$$

Let, $x = \sqrt{2} r \cos\theta$, $\quad y = r \sin\theta$, $\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. $\quad 0 \leqq r \leqq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow ② = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (8 - 4r^2) \sqrt{2} r \, dr\,d\theta$$ 5

$$= 2\pi \times \sqrt{2} \times \left((4r^2 - r^4) \Big|_0^{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2}\pi \times (8 - 4) = 8\sqrt{2}\pi$$

$\therefore \iint_{\partial R} F \cdot dS = \iiint_R 4 \, dV_3 = 4 \cdot 8\sqrt{2}\pi = 32\sqrt{2}\pi$ $\quad$ 5