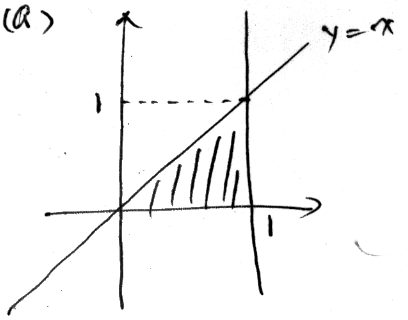
2008년 계절학기
「수학 및 연습 2」
기말 고사

1. (a)



$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dy\, dx$$

5점

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}.$$

10점

(b) 원기둥 좌표계 치환

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

5점

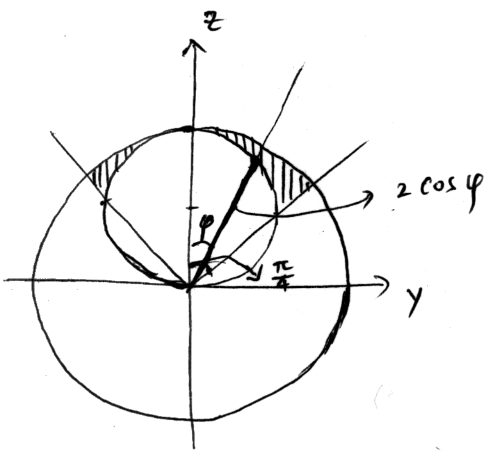
$$= 2\pi \int_0^2 \left[r^3 z \right]_r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2r^3 - r^4)\, dr$$

$$= \frac{16}{5}\pi$$

10점.

2.



$$\text{부피} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

10점

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left[\frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right]_{2\cos\varphi}^{2} \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{3}\sin\varphi - \frac{8}{3}\cos^3\varphi \sin\varphi \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \left[-\frac{8}{3}\cos\varphi + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

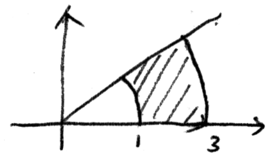
15점.

$$= \frac{\pi}{3}(13 - 8\sqrt{2})$$

20점

3. 곡면 S를 $X(x, y) = (x, y, x^2+y^2)$ 으로 매개화하자.

(x, y)의 영역 $D := \{(x, y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x\}$



$X_x = (1, 0, 2x)$, $X_y = (0, 1, 2y)$

에서 $X_x \times X_y = (-2x, -2y, 1)$ 이므로 $dS = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dx\,dy$

5

$\therefore \iint_S \arctan\frac{y}{x}\, dS = \iint_D \arctan\frac{y}{x} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dx\,dy$ 10

$= \iint_{D'} \theta \cdot r\sqrt{4r^2+1}\, dr\,d\theta$ (극좌표 치환)

$D' := \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$ 15

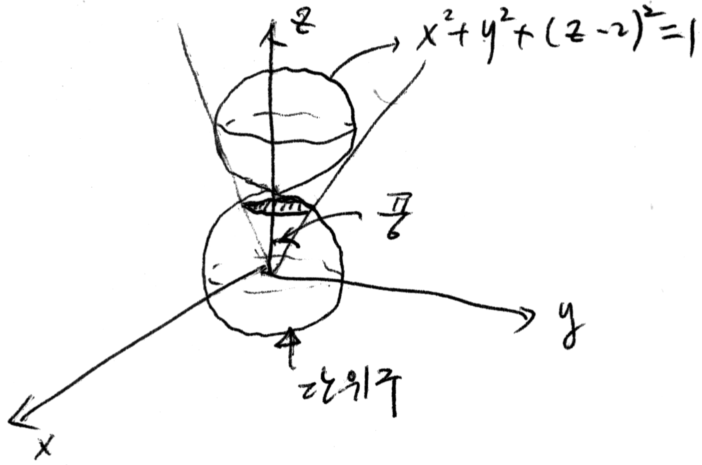
$= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$

$= \frac{\pi^2}{384}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})$ 20

<채점기준>

- dS를 구하지 않고 그냥 $dS = r\,dr\,d\theta$ 등의 잘못된 면적소를 사용하면 무조건 0점
- $D \to D'$ 에서 범위 틀리면 그 이후 점수 없음.

4 문제의 편의를 위해 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$ 인 구를 생각하여도 입체각을 구할 수 있다.



구하는 영역의 넓이는 $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 이므로

입체각은

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

<채점 기준>

- z 축으로 구를 옮겨서 잘 생각했으되 φ, θ 의 범위가 틀리면 -5 점
- 그 외 논리적이지 않은 풀이 점수 없음

  ex) $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ 등의 범위

$\boxed{5}$ $X(t,\theta) = (t-\sin t,\ (1-\cos t)\cos\theta,\ (1-\cos t)\sin\theta)$

$0 \le t \le 2\pi,\quad 0 \le \theta \le \pi$

$\Rightarrow\ |X_t \times X_\theta| = 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}$ 5

$\therefore\ \text{Area} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt\,d\theta = \cdots = \frac{32}{3}\pi$ 10

중심을 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$라 놓으면 대칭성에 의하여

$\bar{x} = \pi$ 13, $\bar{y} = 0$ 16 (직접 계산해도 됨)

$$\bar{z} = \left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)^2 \sin\frac{t}{2}\sin\theta\,dt\,d\theta\right] \times \frac{1}{\text{Area}}$$

$$= \frac{3}{32\pi}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{\cancel{128}^{\,4}}{15} = \frac{16}{5\pi}$$ 20

$\therefore$ 중심 $= \left(\pi,\ 0,\ \frac{16}{5\pi}\right)$

<채점기준>

- Area를 구할 때 계산 틀리면 -5점
- 회전체의 넓이가 아닌 길이 등 요구하지 않은 답을 구할 경우 점수 없음

6. $X_u = (v\cos u - vu\sin u,\ v\sin u + vu\cos u,\ v)$

$X_v = (u\cos u,\ u\sin u,\ u)$

$X_u \times X_v = (vu^2\cos u,\ vu^2\sin u,\ -vu^2)$

$|X_u \times X_v| = \sqrt{2}\,vu^2$ 10

$\mu(x,y,z) = \sqrt{v^2u^2+v^2u^2} = \sqrt{2}\,vu.$

$질량 = \iint \mu(x,y,z)\,dS$

$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,vu \cdot \sqrt{2}\,vu^2\,du\,dv$

$= \frac{8}{3}\pi^4$ 5

$\bar{x} = \frac{1}{질량}\iint x\,\mu(x,y,z)\,dS$

$= \frac{1}{질량}\int_0^1\int_0^{2\pi} 2v^3u^4\cos u\,du\,dv$

$= \frac{1}{질량}(16\pi^3 - 24\pi) = \frac{6}{\pi} - \frac{9}{\pi^3}$ 5

$\bar{y} = \frac{1}{질량}\iint y\,\mu(x,y,z)\,dS$

$= \frac{1}{질량}\int_0^1\int_0^{2\pi} 2v^3u^4\sin u\,du\,dv$

$= \frac{1}{질량}(-8\pi^4 + 24\pi^2) = -3 + \frac{9}{\pi^2}$ 5

$\bar{z} = \frac{1}{질량}\iint z\,\mu(x,y,z)\,dS$

$= \frac{1}{질량}\int_0^1\int_0^{2\pi} 2v^3u^4\,du\,dv$

$= \frac{1}{질량}\left(\frac{32}{10}\pi^5\right) = \frac{6}{5}\pi$ 5

$\therefore$ 질량중심 $= \left(\frac{6}{\pi} - \frac{9}{\pi^3},\ -3 + \frac{9}{\pi^2},\ \frac{6}{5}\pi\right)$

7. $\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y\cos x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + y^2 \sin x)$

$= 1 + 2y$ 5

$\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \overset{\text{발산정리}}{=\!=\!=} \iint_D \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV_2$

$= \iint_D (1+2y)\, dV_2$ 5

$\overset{\text{극좌표}}{\underset{\text{치환}}{=\!=\!=}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$ 5

$= \pi.$ 5

8번 그린정리에 의하여 $\int_{\partial R} \mathbb{F}\, ds = \iint_R \operatorname{rot}\mathbb{F}\, dV$ ①

$\operatorname{rot}\mathbb{F} = e^x - \frac{x}{y}$ 이므로

$$\iint_R \operatorname{rot}\mathbb{F}\, dV = \int_1^2\int_0^3 \left(e^x - \frac{x}{y}\right) dx\,dy = (e^3-1) - \frac{9}{2}\log 2$$ ②

* 채점기준

① 과정 10점

② 과정 5점

나머지 계산 5점

9번 | 발산정리에 의하여 $\iint_{\partial R} \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV$ ①

$\operatorname{div}\mathbb{F} = e^z$ 이므로

$$\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV = \int_0^1 \int_{-(1-z)}^{1-z} \int_{-(1-z)}^{1-z} e^z\, dx\, dy\, dz$$ ②

$$= 8e - 20$$

* 채점 기준

① 과정 10점

② 과정 5점

나머지 계산 5점

10번

(a) $\operatorname{curl}\mathbb{F} = (-2e^{z}\sin y,\ 2e^{2z},\ 0)$

(b) 스토크스 정리에 의하여 $\int_{\partial S} \mathbb{F}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\mathbb{F}\,d\mathbb{S}$ ①

S를 $X(s,t) = (s, t, t^2)$ 으로 매개화하면

$\mathbb{N} = X_s \times X_t = (0, -2t, 1)$ 가 ∂S의 향에 부합된다. ②

따라서

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbb{F}\,d\mathbb{S} = \int_0^1\int_0^1 (-2e^{t^2}\sin t,\ 2e^{2t^2},\ 0)\cdot(0,-2t,1)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1\int_0^1 -4te^{2t^2}\,dt\,ds = \underline{1-e^2}$$

* 채점기준

(a) 5점

(b) ①과정 5점, ②과정 5점, 나머지과정 5점

※ 사소한 실수 : -2점