2014년 2학기 수학 및 연습 2. 기말고사 모범답안.

1. 푸비니 정리에 의해

$$\int_0^1\int_1^e \frac{\log x}{x} e^{y\log x}\,dx\,dy = \int_1^e\int_0^1 \frac{\log x}{x} e^{y\log x}\,dy\,dx$$

┘ 10점

$$= \int_1^e \left[\frac{1}{x}e^{y\log x}\right]_0^1 dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}e^{\log x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = e-2$$

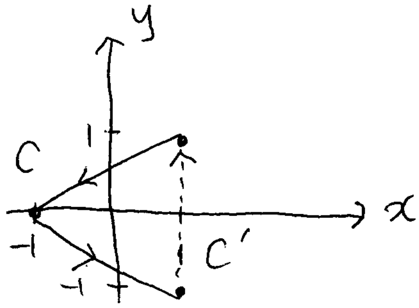
┘ 20점.

$\boxed{\#2}$

(pf1) 그린정리 이용.

Let $\vec{F}(x,y) := \left(2x\arctan y,\ \frac{x^2}{1+y^2}\right)$.

$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x}{1+y^2} = 0.$ ⌟ 5점.



Let $\operatorname{int}(C \cup C') \equiv D$.

then by 그린정리, $\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\, dV_2 = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{s}.$

$\underset{0.}{\shortparallel}$

$\therefore \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{s}$ ⌟ 10점

$\left(C'\text{의 매개화 : } (1,t)\ (-1\le t\le 1)\right) \Rightarrow \quad = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$= -\arctan(1) + \arctan(-1)$ ⌟ 15점

$= -\frac{\pi}{2}$ ⌟ 20점.

(pf2) 선적분 기본정리 이용.

Let $\varphi(x,y) := x^2\arctan(y)$ then $\nabla\varphi = \vec{F}$ ⌟ 5점

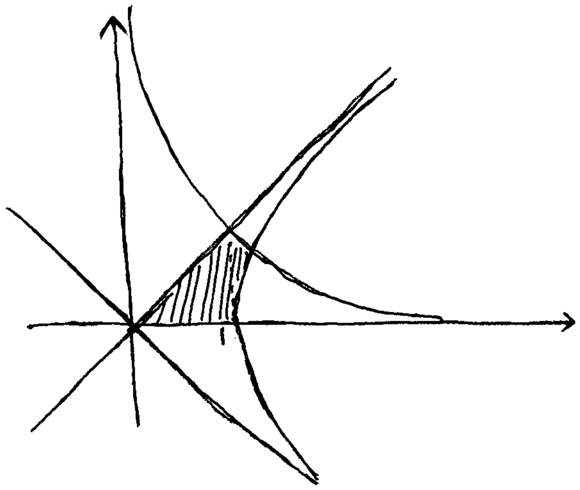
$\therefore$ By 선적분 기본정리, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \varphi(-1,0) - \varphi(1,1) + \varphi(1,-1) - \varphi(-1,0)$

$= \varphi(1,-1) - \varphi(1,1)$ ⌟ 10점

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ ⌟ 20점.

※ 부호틀릴경우, 부분점수 없음.

3. $y=0$, $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x^2-y^2=1$.



방법 1) $u=x^2-y^2$, $v=xy$ $\Rightarrow$ $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$ ┘+5점

$G(u,v)=(x,y)$, $G^{-1}(x,y)=(u,v)$

$$(G^{-1})'(x,y)=\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$|G'(u,v)| = \frac{1}{|(G^{-1})'(x,y)|} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\therefore \iint_D \frac{x^4-y^4}{1+xy}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{u}{1+v}\,du\,dv$$ ┘+5점

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^1 u\,du\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{1+v}\,dv\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log 2 = \frac{\log 2}{4}$$

┘+10점

(*) 적분영역을 3사분면까지 하여 $\frac{1}{2}$을 곱한 경우 − 10 점.

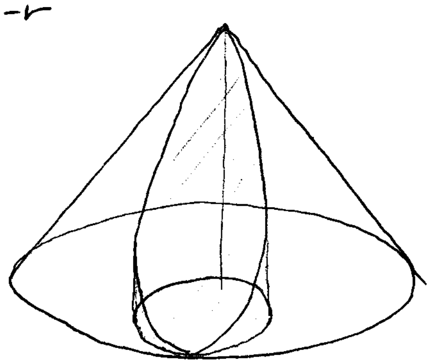
문제 4.

$$x^2+y^2-2x \le 0, \quad x^2+y^2-z^2+4z \le 4, \quad 0 \le z \le 2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2-2r\cos\theta \le 0, \quad r^2 \le (z-2)^2, \quad 0 \le z \le 2 \quad (\text{원기둥 좌표계})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le r \le 2\cos\theta, \quad 0 \le z \le 2-r$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\theta, \quad 0 \le z \le 2-r$$



$$\therefore \text{부피} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{2-r} r \, dz \, dr \, d\theta \quad \rfloor \text{10점}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (2r-r^2) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos\theta - \frac{8}{3}\cos^3\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2+2\cos 2\theta - \frac{2}{3}\cos 3\theta - 2\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \left(2\theta + \sin 2\theta - \frac{2}{9}\sin 3\theta - 2\sin\theta\right)\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

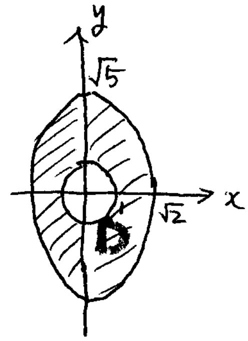
$$= 2\pi + \frac{4}{9} - 4$$

$$= 2\pi - \frac{32}{9} \quad \rfloor \text{20점}$$

※ 채점기준 : 다른 방법(발산 정리 등)을 사용하였을 경우에도 식이 맞으면 10점, 답까지 맞으면 20점. 그 외 부분점수 없음.

(#5) (a) $\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) + (xy^2, x^2y+x)$

$= \mathbb{F}_1(x,y) + \mathbb{F}_2(x,y) + \mathbb{F}_3(x,y)$



$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \mathrm{rot}\,\mathbb{F}_1 + \mathrm{rot}\,\mathbb{F}_2 + \mathrm{rot}\,\mathbb{F}_3$

$= 0 + 0 + 1 = 1$ 이므로 ┘10

$\therefore \iint_D \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2 = \mathrm{area}(D) = \pi(\sqrt{10}-1)$ ┘15

(b) $B_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$이라 두면 그린 정리에 의해.

$$\int_C \mathbb{F}\cdot ds - \int_{B_1} \mathbb{F}\cdot ds = \iint_D \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2 = (\sqrt{10}-1)\pi$$ ┘5

$$\int_{B_1} \mathbb{F}\cdot ds = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t + \cos t\sin^2 t, \sin t + \cos t + \cos^2 t \sin t + \cos t) \cdot(-\sin t, \cos t)\, dt$$ ┘10

$$= \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2 t + \cos t \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t)\right] dt$$

$= 3\pi.$

$$\therefore \int_C \mathbb{F}\cdot ds = (\sqrt{10}-1)\pi + 3\pi = (\sqrt{10}+2)\pi$$ ┘15

※ (참고사항) • (a)에서 rot $\mathbb{F}$의 값이 틀린 경우 무조건 (답이 맞더라도) 0점!

• (b)에서 원점을 포함한 영역을 잡고 $\vec{F}$에 대해 그린정리를 쓴 경우 0점!

• (b)에서 F_1, F_2, F_3로 나누어 선적분을 구한 경우, 각 경우당 5점씩 배점

• (b)에서 향을 잘못 생각하여 3π를 뺀 경우 5점 감점.

• B_1 대신에 B_ε을 사용하고, ∂B_ε에서의 복잡한 적분을 $\varepsilon \to 0$으로의 극한으로 계산한 풀이도 인정. 다만 $\iint_{(x^2+y^2 \ge \varepsilon^2 \text{ and } \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5} \le 1)} \mathrm{rot}\,\mathbb{F}\, dV_2 = \sqrt{10}\pi$ 같이 틀린 표현이 있으면 5점 감점.

6. $\iiint_R \operatorname{div} \mathbb{A}\, dV_3 = \iint_{\partial R} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ 임을 보인다.

$\operatorname{div} \mathbb{A} = 0$ 이므로 (좌변) $= \iiint_R 0\, dV_3 = 0.$ +5

주어진 영역 R의 경계 ∂R에 대하여

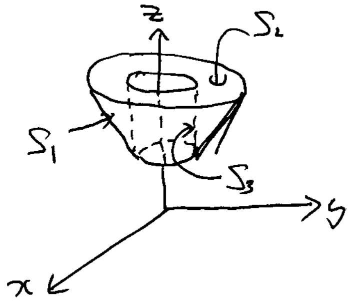
S_1 을 ∂R의 바깥쪽 옆면 $(z = \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \le z \le 2)$,

S_2 를 ∂R의 윗면 $(z=2,\ 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2)$,

S_3 을 ∂R의 안쪽 옆면 $(\sqrt{x^2+y^2} = 1,\ 1 \le z \le 2)$

이라 하자. 이때 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial R$.

(단, 각 면의 향은 ∂R을 벗어나는 방향으로 정한다.)



그러면

$$(\text{우변}) = \underbrace{\iint_{S_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}}_{=:\alpha} + \underbrace{\iint_{S_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}}_{=:\beta} + \underbrace{\iint_{S_3} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}}_{=:\gamma}$$

S_1 위의 임의의 점 (x,y,z)에 대하여, S_1은 원점을 지나는 (x,y,z) 방향의 직선 일부를 포함한다. 따라서 S_1의 법벡터 $\mathbb{n}$은 (x,y,z) ~~[illegible]~~ 에 수직이다. 이때 $\mathbb{A}\cdot\mathbb{n} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\cdot \mathbb{n} = 0.$

$\therefore \alpha = \iint_{S_1} \mathbb{A}\cdot\mathbb{n}\, dS = 0.$

(혹은, S_1을 $X(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$로 매개화한 후

$X_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $X_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ 에서

$N = -X_x \times X_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$

이므로 $\cancel{\alpha = \iint}$ $\alpha = \iint_{1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2} \mathbb{A}\cdot \mathbb{N}\, dxdy = 0$) +5

S_2의 단위법벡터장은 $\mathbb{n} = (0,0,1)$

$\beta = \iint_{S_2} \mathbb{A}\cdot\mathbb{n}\, dS = \iint_{S_2} \frac{(x,y,2)}{\sqrt{(x^2+y^2+4)^3}}\cdot (0,0,1)\, dS$

$= \iint_{1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2} \frac{2}{\sqrt{(x^2+y^2+4)^3}}\, dxdy$ $\left(\begin{array}{l} S_2\text{를 } (x,y,2)\text{로 매개화 } (1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2) \\ \to |N| = |(1,0,0)\times(0,1,0)| = |(0,0,1)| = 1 \end{array}\right)$

$= 2\int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{r}{\sqrt{(r^2+4)^3}}\, dr d\theta = 2\cdot 2\pi \cdot \int_5^8 \frac{1}{2 s^{3/2}}\, ds$ ($r^2+4 = s$로 치환)

$= 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ +5

S_3의 단위법벡터장은 $n=(-x,-y,0)$.

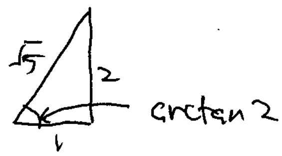
$$\gamma = \iint_{S_3} A\cdot n\, dS = \iint_{S_3} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\cdot(-x,-y,0)\,dS$$

$$= -\iint_{S_3} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dS$$

$$= -\int_1^2\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^3}}\,d\theta\, dz$$

(S_3을 $(\cos\theta, \sin\theta, z)$로 매개화 $\{0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le z\le 2\}$
$\rightarrow |N| = |(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\times(0,0,1)|$
$= |(\cos\theta, \sin\theta, 0)| = 1$.)

$$= -2\pi\int_1^2 \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}} = -2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\,dt$$



$$= -2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \cos t\, dt = -2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

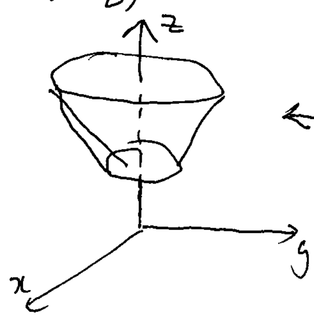
−5

$\therefore$ (우변) $= \alpha+\beta+\gamma = 0 =$ (좌변).

* 면적분 계산에서 곡면의 향이 틀리면 해당 계산의 점수 없음.

* 영역이 뭔지 몰라도, $\operatorname{div} A = 0$ 임을 알고 (좌변) $=0$ 임을 구하면 5점 인정.

* 영역을 다음과 같이 생각한 경우에 한하여, $\alpha = \iint_{S_1} A\cdot dS$ (밑면) 의 계산에 대한 부분점수 인정. (즉, 최대 10점)



← 중간의 원기둥을 제외하지 않은 경우 ($1\le\sqrt{x^2+y^2}$ 고려 X)

* 가우스 정리를 이용하면 점수 없음. (발산 정리의 결과 임)

*기타 부분점수 없음.

#7.

Sol 그래프가 $x=y=0$ (z축) 에 대칭이므로, 곡면의 중심은 $x=y=0$ 위에 있다. 즉, $\bar{x}=\bar{y}=0$.

— +5점

$dS = |X_x \times X_y|\, dx\, dy = \sqrt{8x^2+16y^2+2}\; dx\, dy. \cdots$ — +5점

$x=\sqrt{2}r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi$ 로 두면,

$\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \sqrt{2}r$ 이므로,

$$dS = \sqrt{8x^2+16y^2+2}\; dx\, dy = \sqrt{16r^2+2}\cdot\sqrt{2}\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{8r^2+1}\cdot r\, dr\, d\theta.$$

$$\therefore A\bar{z} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{8r^2+1}\cdot r\cdot 2r^2\, dr\, d\theta \quad (z=2r^2)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^9 \frac{1}{8}\sqrt{t}\left(\frac{t-1}{4}\right) dt\, d\theta \quad \left(\because t=8r^2+1,\ 2r\,dr=\frac{1}{8}dt,\ 2r^2=\frac{t-1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_1^9 t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\, dt. \quad (\text{Fubini 정리})$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

— +10점

$$= \frac{149}{30}\pi.$$

• 대칭성이 아닌 방법으로 $A\bar{x}$, $A\bar{y}$를 직접 계산했을 시 논리가 맞아야 +5점

• 피적분함수 ($A\bar{z}$ 계산 때) 전에 사소한 계산 실수라도 0점

• 임의의 변환에서, 면적소를 구해도 +5점

• 대칭 언급에서 논리에 오류 있을시 0점

문제 8. $\mathbf{F} = (\sin x - y, \cos y + z^2, e^z + x^2)$라 하자. 그러면 $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = (-2z, -2x, 1)$이고, +5점.

또 $y=z$평면에서 C에 둘러싸인 영역을 D라 하면,

스토크스정리에 의해 주어진 식 $\int_C \mathbf{F}\cdot ds = \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 이다. +5점.

D를 xy평면에 정사영한 영역을 E라 하면, E는 $\frac{x^2}{8} + 2y^2 \le 1$인 타원이고,

매개화 $X: E \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (u,v,v)$를 통해 D의 매개화를 얻는다.

$N = X_u \times X_v = (0,-1,1)$이므로 곡선 C의 향과 어울린다.

따라서 $\iint_D (-2z, -2x, 1)\cdot d\mathbf{S} = \iint_E (2x+1)\,dx\,dy$ 이다.

E는 $\frac{x^2}{8} + 2y^2 \le 1$인 타원이므로, $x = 2\sqrt{2}\,r\cos\theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$로

치환적분하면,

$$\iint_E (2x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2}\,r\cos\theta + 1)\cdot 2r \; d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \text{ 이다.}$$ +10점.

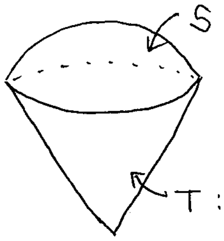
* 스토크스 정리를 사용하지 않고 선적분으로 계산한 경우 답안의 완성도에 따라 점수 인정.

* 적분계산시 사소한 계산실수 −5점.

* 다른 매개화를 사용한 경우 완성도에 따라 점수 인정.

9. (a)

풀이1)



T : $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$

$S \cup T$ 에 대해 발산정리를 사용
$(R=\mathrm{Int}(S\cup T))$
$$\iiint_R \operatorname{div}F\,dV_3 = \iint_S F\cdot dS + \iint_T F\cdot dS$$
5점

(☆) $\iiint_R \operatorname{div}F\,dV_3 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{10}{3}\pi$ — 5점

$\iint_T F\cdot dS = 0$ (F와 T의 법선벡터가 수직이므로 $F\cdot n=0$) — 5점

풀이2)

K : $x^2+y^2\le 1$, $z=1$

$S \cup K$에 대해 발산정리를 사용
$(R'=\mathrm{Int}(S\cup K))$
$$\iiint_{R'} \operatorname{div}F\,dV_3 = \iint_S F\cdot dS + \iint_K F\cdot dS$$
5점

(☆☆) $\iiint_{R'} \operatorname{div}F\,dV_3 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{43}{12}\pi$ — 5점

$\iint_K F\cdot dS = -\frac{\pi}{4}$ — 5점

풀이3) 직접 매개화해서 면적분

$$\iint_S F\cdot dS = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \sin^3\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\,d\theta$$ — 5점

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{10}{3}\pi$$ — 10점

* 1, 2 에서 발산정리를 정확하게 알고있지 않다고 판단되면 0점

(ex. $\iint_S F\cdot dS = \iiint_{\mathrm{Int}S} \operatorname{div}F\,dV_3$ 주어진 S는 폐곡면이 아니므로 옳지않음)

(☆) $$\iiint_R \operatorname{div}F\,dV_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} 5(2\sin^2\varphi\cos^2\theta)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

(☆☆) $$\iiint_{R'} \operatorname{div}F\,dV_3 = \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} 5(r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\iint_K F\cdot dS = \iint_K F\cdot(0,0,-1)\,dS = -\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dS = -\frac{\pi}{4}$$

9(b)

풀이1) 스토크스정리

i) $\iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{s}$ — 5점

ii) ∂S : $x^2+y^2=1$, $z=1$, 향은 반시계방향 (즉, $x(t)=(\cos t, \sin t, 1)$, $0 \le t \le 2\pi$) — 5점

(0,0,√2)에서 보았을 때

iii) $\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(x(t)) \cdot x'(t)\, dt = (2\pi) \cdot e$ — 5점

풀이2) 9-(a)에서의 곡면에 대해 발산정리 사용 $(K : x^2+y^2 \le 1,\ z=1)$

$\iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS = -\iint_K \mathrm{curl} F \cdot dS$ $(\because \mathrm{div}(\mathrm{curl} F)=0$ 이므로$)$ — 5점

$-\iint_K \mathrm{curl} F \cdot dS = (2\pi) \cdot e$ (정답이 맞아야함) — 10점

* 직접 $\iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS$를 계산한 경우 답이 맞아야만 점수인정

* 옳지 않은 논리로 $(2\pi)e$가 나오면 점수없음.

* 풀이1)에서 iii)은 i)과 ii)가 맞았을 때만 인정.