

# 수학 및 연습 2 기말고사

(2015년 7월 27일 11:00-13:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 다음 반복적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \left( \sqrt{1+y^4} + y^2 \sin(y^3 - 1) \right) dy dx$$

문제 2. [20점] 좌표평면에서  $x$ -축과  $y$ -축 그리고 직선  $x+y=2$  로 둘러싸인 제 1사분면의 영역을  $A$  라고 하자. 변환  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  가  $(u, v) = G(x, y) = (x+y, x^2-y)$  와 같이 정의될 때, 영역  $G(A)$  위에서 함수  $f(u, v) = \frac{u+v}{\sqrt{1+4u+4v}}$  의 적분값을 구하시오.

문제 3. [20점] 좌표공간에서 부등식

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad z \geq 0$$

을 모두 만족시키는 영역의 부피를 구하시오.

문제 4. [20점] 평면에서 포물선  $y^2 = 2x + 4$  와 직선  $x = 3$  에 의해 둘러싸인 영역을  $D$  라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

가  $D$  의 경계를 빠져나가는 양(flux)을 계산하시오.

문제 5. [20점] 함수  $P(x, y) = y \arctan y - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$ ,  $Q(x, y) = x^2 e^{-y^2}$  에 대하여 벡터장  $\mathbf{F}$  를  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\text{rot } \mathbf{F}$  를 구하시오.

(b) (10점) 선적분  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  를 구하시오. 여기서 곡선  $C: |x| + |y| = 1$  의 향은 반시계방향이다.

문제 6. [20점] 영역  $D$  는 점  $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$  를 꼭지점으로 하는 삼각형의 내부이다. 곡면

$$S: z = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D$$

에서 함수  $f(x, y, z) = \frac{\sin x}{x}$  ( $(x, y, z) \in S$ ) 의 평균값을 구하시오.

문제 7. [20점] 구면  $S(4): x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$  에서 다음 적분값을 구하시오. (답만 쓰면 0점)

$$\iint_{S(4)} \frac{dS}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}}$$

문제 8. [20점] 좌표공간에서 포물면  $z = 4 - x^2 - y^2$  과  $xy$ -평면으로 둘러싸인 영역  $R$  과 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$  에 대하여  $\iint_{\partial R} \text{grad}(\text{div} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$  의 값을 구하시오. (단, 이때  $\partial R$  의 향을 정하는 단위 법벡터  $\mathbf{n}$  은 영역  $R$  을 벗어나는 방향으로 택한다.)

문제 9. [20점] 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 + e^{x+z}, \sin(y+z) - x^3, e^{x+y+z} + \cos(xy))$  에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $\text{curl } \mathbf{F}$  를 구하시오.

(b) (10점) 곡면  $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, z \geq 0$  에 대하여  $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  를 구하시오.  
(단, 이때 향을 정하는 단위 법벡터  $\mathbf{n}$  은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$  이 되도록 주어진다.)

문제 10. [20점] 곡면  $S_1: x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2$  와 곡면  $S_2: x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z \geq 2$  의 합으로 이루어진 곡면을  $S$  라고 하자. 이때 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \sin x + z e^y, xy \sin z + y, z(x+y))$  에 대하여  $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  를 구하시오. (단,  $S$  의 향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$  이도록 정한다.)