

수학 및 연습 2 (009-030) 기말고사

2003년 12월 13일 오후 1시 - 3시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (30점) 다음 반복적분의 값을 구하여라.

(a) $\int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$

(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$

2. (30점)

(a) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y + y \cos x, -x \sin y + \sin x)$ 의 잠재함수 $\varphi(x, y)$ 를 구하여라.

(b) $\int_X (\cos y + y \cos x) dx + (-x \sin y + \sin x) dy$ 를 구하여라. 여기서 X 는 xy -평면상의 반원 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 을 시계반대방향으로 도는 곡선이다.

3. (20점) C 가 꼭지점이 $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ 인 삼각형의 둘레를 시계반대방향으로 한바퀴 도는 곡선일때, 다음 적분값을 구하여라.

$$\int_C x dx - x^2 y^2 dy.$$

4. (20점) 원점 $O = (0, 0, 0)$ 에서 다음 영역의 입체각을 구하여라.

$$R := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 3x^2 + 3y^2 \geq z^2\}.$$

5. (20점) X 가 평면 $z = 1$ 과 $z = 2$ 사이에 있는 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 의 부분일때 면적분 $\iint_X y^2 z^2 dS$ 의 값을 구하여라.

6. (20점) 발산정리를 이용하여 다음 적분값을 구하여라.

$$\iint_{\partial R} (x^2 + y + z) dS.$$

여기서 R 은 단위구 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 이다.

7. (30점) 벡터장에 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) $\text{curl } \mathbf{F}$ 를 구하여라.

(b) 곡면 $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}$ 에 대하여 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하여라. 단, S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ 이도록 정한다.

8. (30점) 다음을 증명하여라.

모서리의 길이가 모두 1이고 중심이 원점인 정육면체 R 의 경계 ∂R 에 대한 벡터장 $\mathbf{E}(X) := \mathbf{A}_{(0,0,\frac{1}{10})}(X) + \mathbf{A}_{(-\frac{1}{10},0,0)}(X)$ 의 플럭스는 8π 이다. 여

기서 $\mathbf{A}_P(X) = \frac{X - P}{|X - P|^3}$ 이다.