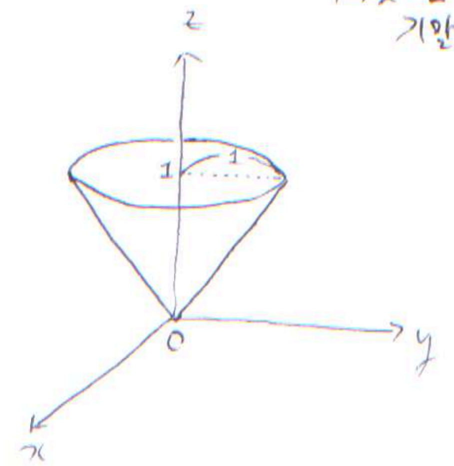
2010. 2학기
수학및연습 2
기말고사.

#1. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\,dy\,dx$



원기둥 좌표계를 사용하면 적분하려는 영역은

$$\begin{cases} r \le z \le 1 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \quad \left(\text{또는} \begin{cases} 0 \le r \le z \\ 0 \le z \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \right)$$

와 같다. 따라서,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\,dy\,dx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r}^{1} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} r - r^2\,dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

* 별해.

함수 1을 적분하는 것이므로 적분영역의 부피를 구하면 된다. 위 그림과 같이 적분 영역은 밑면의 반지름이 1, 높이가 1인 원뿔이므로,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\,dy\,dx = \frac{1}{3} \times 1 \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{3}$$

*채점 기준

- 사소한 계산 실수 -10점.
- 적분 영역이 틀린 경우 0점.

2. 먼저 질량 M 을 구해보면,

$$M = \iiint_R \mu \, dV_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta \quad \leftarrow \text{구면좌표계 치환}$$

5

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \text{ where } 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

5

따라서 질량중심의 z-좌표 $\bar{z}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_R z\mu \, dV_3 = \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho^2\sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

5

$$= \frac{16}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{8}{5}\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

10

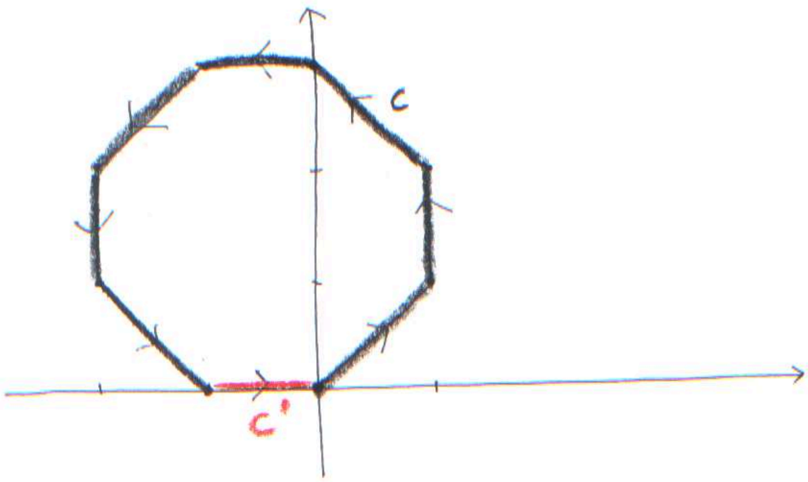
채점기준

1) 질량 식을 맞게 쓰면 5점
2) 질량을 맞게 구하면 5점
3) 질량중심 식을 맞게 쓰면 5점
4) $\bar{z}$ 를 맞게 구하면 10점

총 25점.

※ 답이 우연히 맞아도 식을 잘못 쓰면 오답처리.

3.



$C'(t) := (t, 0)$, $-1 \le t \le 0$.

그린정리에 의해,

i) $\int_{C+C'} F \cdot ds = \iint_D \text{rot}\, F \; dV_2$ (D는 C+C'의 내부영역). +10.

ii) $\text{rot}\, F = 2$ & $\iint_D dV_2 = 7$ 이므로, $\iint_D \text{rot}\, F \; dV_2 = 14$. +10.

iii) $\int_{C'} F \cdot ds = \int_{-1}^{0} (e^t, t-1) \cdot (1, 0) \; dt$

$= \int_{-1}^{0} e^t \; dt$

$= 1 - \frac{1}{e}$.

$\therefore \int_C F \cdot ds = \iint_D \text{rot}\, F \; dV_2 - \int_{C'} F \cdot ds$

$= 14 - (1 - \frac{1}{e})$

$= 13 + \frac{1}{e}$. +10.

* 채점기준.

i) 식을 정확히 쓰지 않으면 0점.

ii) $\iint_D dV_2$ 를 정확히 계산하지 않으면, -5점. (rot F 가 틀린 경우는 부분점수 없음.)

iii) $\int_{C'} F \cdot ds$ 의 답이 맞더라도, 계산과정이 틀리면, -5점 / $13 + \frac{1}{e}$ 까지 정확히 계산하지 않으면, -5점.

4. 방법 1) 발산정리를 이용하여 푼다.

$$\int_{\partial D} (\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})(\mathbb{v}\cdot\mathbb{n})\,ds = \int_{\partial D} (\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})\mathbb{v}\cdot\mathbb{n}\,ds$$

$$= \iint_D \operatorname{div}((\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})\mathbb{v})\,dV_2$$ ┘ 10점

$$= \iint_D |\mathbb{v}|^2\,dV_2$$ ┘ 15점 ($\operatorname{div}((\mathbb{r}\cdot\mathbb{v})\mathbb{v}) = |\mathbb{v}|^2$ 만 맞으면 5점)

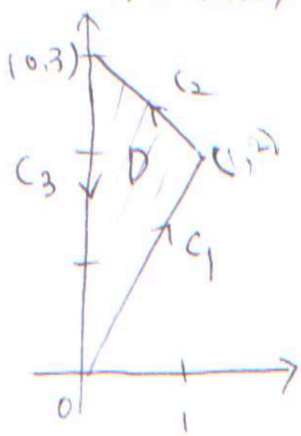
$$= \frac{3}{2}|\mathbb{v}|^2$$ ┘ 20점

채점 기준

- 최종답을 $\frac{3}{2}v^2$ 으로 쓴 경우 -5점
- 발산정리를 잘못 적용한 경우 점수 없음

방법2) 직접 계산하여 푼다.

$\mathbb{v} = (a, b)$ 라 하자. 이때 각 C_1, C_2, C_3 에 대하여 단위 법벡터를 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 라고 하면



$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \vec{n}_3 = (-1, 0)$$ 이다.

이제 C_1, C_2, C_3 을 다음과 같이 매개화를 하자.

$C_1 : (t, 2t) \quad 0 \le t \le 1$

$C_2 : (1-t, 2+t) \quad 0 \le t \le 1$

$C_3 : (0, 3-3t) \quad 0 \le t \le 1$

따라서

$$\int_{\partial D} (\mathbb{r} \cdot \mathbb{v})(\mathbb{v} \cdot \mathbb{n})\, ds = \int_0^1 (at + 2bt) \frac{1}{\sqrt{5}}(2a-b)\sqrt{5}\, dt$$

$$+ \int_0^1 (a(1-t) + b(2+t)) \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 b(3-3t)(-a) \cdot 3\, dt$$ ┘ 10점 (*)

$$= \frac{3}{2}(a^2+b^2) = \frac{3}{2}|\mathbb{v}|^2$$ 이다. ┘ 20점

채점기준

(*) 의 식이 정확히 맞으면 10점, 부분점수 없음

#5

① div $\vec{F}$ 를 계산해보자.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \sum_{\text{cyclic}} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x+y-z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\,\frac{\sum_{\text{cyclic}} x(x+y-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 0.$$

계산과정이 틀린 경우
또는 계산과정이 없는 경우
(−5점) 감점

$$\boxed{\therefore \operatorname{div}\vec{F} = 0 \text{ on } \mathbb{R}^3 - \{0\}.}$$ 10점

② 이제, $B_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le \varepsilon^2\}$, $\varepsilon > 0$ 을 생각하고, (단, B_ε는 R의 내부에 놓여있도록 충분히 작은 $\varepsilon > 0$ 을 택한다.) 영역 $R - B_\varepsilon$ 에서, 발산정리를 적용하면,

$$0 = \iiint_{R-B_\varepsilon} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\therefore \iint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S}}.$$ 5점

③ 면적분 $\iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S}$ 를 계산해 보자.

구 ∂B_ε 의 외향단위법선벡터 $\vec{n}$은 $\vec{n}(x,y,z) = \frac{1}{\varepsilon}(x,y,z)$ 로 주어지므로,

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$= \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} x+y-z \\ y+z-x \\ z+x-y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dS$$

$$= \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\varepsilon}\, dS$$

$$= \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^3\cdot\varepsilon}\, dS$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon} 1\, dS$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\,\text{surface area}(\partial B_\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\, 4\pi\varepsilon^2 = \boxed{4\pi}$$

계산과정이 없거나
계산실수인 경우
(−5점) 감점.
또는 법선벡터의 향이 반대로 잡힌경우
(−5점) 감점.

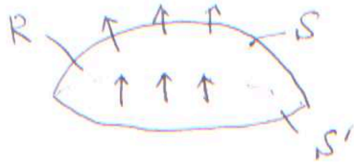
15점

#6. (풀이 1)

$$\iint_S \frac{6x^2z + 2ye^z\sin x - z^3}{\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}}\,dS = \iint_S (2xz,\ e^z\sin x,\ -z^2)\cdot \underbrace{\frac{(3x,2y,z)}{\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}}}_{\text{단위 법선 벡터}}\,dS$$

$$= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (\vec{F} = (2xz,\ e^z\sin x,\ -z^2))$$

10점



$S' = \{(x,y,z) \mid 3x^2+2y^2 \le 3,\ z=1\}$ 이라 두고

S와 S'으로 둘러싸인 영역을 R이라 하자.

발산 정리에 의해

$$\iiint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint_{S-S'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$\operatorname{div}\vec{F} = 2z - 2z = 0$ 이므로

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

20점

$$\iint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{F}\cdot \mathbb{k}\,dS = \iint_{3x^2+2y^2\le 3} (-1)\,dx\,dy$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{2}}\pi \quad \left(= -\frac{\sqrt{6}}{2}\pi\right)$$

30점.

#6. (풀이 2)

$$\iint_S \frac{6x^2z + 2ye^z\sin x - z^3}{\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}}\,dS = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

10점 └ $(\vec{F}(x,y,z) = (2xz,\ e^z\sin x,\ -z^2))$

벡터장 $\vec{G}(x,y,z) = (0,\ -xz^2,\ e^z\cos x)$ 라 두면

$\operatorname{curl}\vec{G} = \vec{F}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{G}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_C \vec{G}\cdot d\vec{s} \quad (\because \text{스토크스 정리},\ C = \{(x,y,z) \mid 3x^2+2y^2=3,\ z=1\})$$

20점 └

$$= \int_C -xz^2\,dy + \cancel{e^z\cos x\,dz}^{\,0}$$

$$= \int_C -x\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\cdot\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cos\theta\right)d\theta$$

30점 └ $= -\frac{\sqrt{6}}{2}\pi.$

* 매개화하여 직접 계산한 경우, 모두 맞으면 30점, 아니면 모두 0점.
* (풀이 2) 에서 벡터장 $\vec{G}$는 다른 형태로 나올수 있음.
* 발산 정리나 스토크스 정리 사용시 모두 완벽하게 계산&사용 된 경우만 점수 있음.
* 단위법선벡터를 명확히 (정확히) 언급하지 않거나 $\vec{F}$ 벡터장이 명확하지 않은 경우 (혹은 틀린 경우) 점수 없음.

17. (a). $\mathbb{F}(x, y, z) = (z - y,\ x\cos z,\ e^{xy} + z^2)$.

$$\operatorname{curl}\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F}$$

$$= (D_1, D_2, D_3) \times (F_1, F_2, F_3)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= (D_2 f_3 - D_3 f_2,\ D_3 f_1 - D_1 f_3,\ D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

→ 5점.

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x\cos z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z - y) - \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + z^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\cos z) - \frac{\partial}{\partial y}(z - y) \Big)$$

$$= (x e^{xy} + x\sin z,\ 1 - y e^{xy},\ \cos z + 1)$$

→ 10점.

- curl $\mathbb{F}$ 의 정의는 바르게 썼으나 외적 계산이 틀리면 0점.
- 외적의 정의 없이 계산도 틀린 경우 부분 점수 없음.

7(b)

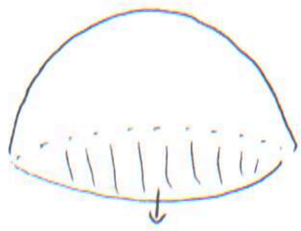
① $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$ 5

$x(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, e^{\sin t \cos t}) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\,dt$

$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$ 15

②



$\tilde{S}$라고 하자.

$\|$

$\{(x, y, z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$

$\iint_{S \cup \tilde{S}} \operatorname{curl} F\, dS = \iiint_{\operatorname{int}(S \cup \tilde{S})} \operatorname{div}(\operatorname{curl} F)\, dV_3 = 0$ 5

$\iint_S \operatorname{curl} F\, dS + \iint_{\tilde{S}} \operatorname{curl} F\, dS = 0$

$\iint_S \operatorname{curl} F\, dS = -\iint_{\tilde{S}} \operatorname{curl} F \cdot dS$

$= -\iint_{\tilde{S}} \operatorname{curl} F \cdot n\, dS$

$= -\iint_{\tilde{S}} (xe^{xy} + x\sin z,\ 1 - ye^{xy},\ \cos z + 1) \cdot (0, 0, -1)\, dS$

$= -\iint_{\tilde{S}} -1 \cdot (\cos z + 1)\, dS$ $z=0$

$= \iint_{\tilde{S}} 2 \cdot dS$

$= 2 \cdot \iint_{\tilde{S}} 1\, dS$

$= 2 \cdot \operatorname{area}(\tilde{S}) = 2 \cdot \pi$ 15

· 계산실수는 −5

스토크스정리 or 발산정리는 정확히 서술해야 함 (+5)

8. 곡면 S_f와 S_g의 면적소가 같음을 보이면 된다.

곡면 S_f의 면적소는 $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$

$$= \sqrt{1+a^2(x^2+y^2)^{a-1}}\,dxdy \text{ 이고,}$$

곡면 S_g의 면적소는

$$g_x = f_x\cos(a\arctan\frac{y}{x}) + f\cdot(-\sin(a\arctan\frac{y}{x}))\frac{a}{1+(\frac{y}{x})^2}\times(\frac{-y}{x^2})$$

$$g_y = f_y\cos(a\arctan\frac{y}{x}) - f\cdot(\sin(a\arctan\frac{y}{x}))\frac{a}{1+(\frac{y}{x})^2}\times(\frac{1}{x})$$

에서 $\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy = \sqrt{1+a^2(x^2+y^2)^{a-1}}\,dxdy$

임을 알 수 있다. 따라서 두 곡면의 면적소가 같으므로 넓이가 같다.

(Sol 2) 극좌표계로 치환할 수 있다.

S_f를 극좌표를 이용하여 매개화하면 $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^a)$

S_g를 〃 $Y(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^a\cos(a\theta))$

⇒ $X_r \times X_\theta = (-ar^a\cos\theta, -ar^a\sin\theta, r)$

$Y_r \times Y_\theta = (-ar^a(\sin\theta\sin(a\theta)+\cos\theta\cos(a\theta)), -ar^a(\cos(a\theta)\sin\theta - \cos\theta\sin(a\theta)), r)$

이 되어 $|X_r\times X_\theta| = \sqrt{a^2r^{2a}+r^2} = |Y_r\times Y_\theta|$ 이다.

따라서, 두 곡면의 면적소는 $\sqrt{a^2r^{2a}+r^2}\,drd\theta$로 같으므로 넓이가 같다.

"두 곡면의 면적소가 같음을 보이면 된다"를 증명하는 과정에서 언급해야 10점

두 면적소를 정확하게 계산하면 20점 사소한 실수는 -5점

첫번째의 경우 g_x, g_y를 구해야하며, 두번째의 경우 외적한 벡터를 반드시 구해야함