수학 및 연습 2 기말고사

(2009년 12월 5일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (15점)**.** 다음 반복적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+y^4}\,dydx$$

문제 2 (25점)**.** 다음 영역 R 의 밀도함수가 $\mu(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 일 때, R 의 질량을 구하시오.

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 2,\ |x|+|y| \ge 1,\ -1 \le z \le 1\}$$

(도움말 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C = \log|\csc x - \cot x| + C$)

문제 3 (25점)**.** xy-평면 위의 곡면 $0 \le y \le \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 를 x 축을 중심으로 $360°$ 회전하여 만든, 다음 영역 R 의 밀도함수가 $\mu(x,y,z) = |x| + y^2 + z^2$ 일 때, R 의 질량을 구하시오.

$$R = \{(x,\ t\cos x\cos\theta,\ t\cos x\sin\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

문제 4 (25점)**.** 좌표평면 위의 점 $P(0,1)$ 에 대하여 벡터장 $\mathbf{A}_P(X) = \dfrac{X-P}{|X-P|^2}$ 를 생각하자. 곡선 C 가 $y = 3-x^2$, $y \ge 0$ 으로 주어졌을 때, 플럭스 $\displaystyle\int_C \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{n}\,ds$ 를 구하시오. (이 때, C 의 단위법벡터장 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} \ge 0$ 가 되도록 주어진다.)

문제 5 (20점)**.** 경계가 폐곡선 C 로 주어진 이차원 평면 위의 영역 D 와 D 위에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

이를 이용하여 발산정리

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdy$$

가 성립함을 보이시오.(단, $\mathbf{n}$ 은 C 의 단위법벡터장이다.)

문제 6 (25점)**.** 다음에 주어진 곡면 S 를 매개화하고, 곡면 S 의 밀도함수가 $\mu(x,y,z) = z$ 로 주어졌을 때 S 의 질량을 구하시오.

$$S : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1$$

문제 7 (20점)**.** 곡면 S 가 원점을 중심으로 하고 한 모서리의 길이가 2 인 정육면체일 때, 삼차원 공간에 주어진 벡터장 $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ 에 대하여 $\displaystyle\iint_S \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

문제 8 (각 15점)**.** 곡면 $S : z = 1-x^2-y^2$, $z \ge 0$ 와 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+\sin(yz), y, z+1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, S 의 단위법벡터장 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \ge 0$ 가 되도록 주어진다.)

(a) 영역 $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1-x^2-y^2\}$ 의 부피를 구하시오.

(b) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.

(c) $\displaystyle\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.