

수학 및 연습 2 기말고사

2005년 12월 10일 13시 – 15시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (30점) 다음 적분값을 구하여라.

(a) $\int_0^1 \int_x^1 y \sin(\pi y^3) dy dx$

(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx$

2. (20점) 영역 $D : 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 에 대하여 사상 $G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 $(u, v) = G(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ 로 주어져 있다고 하자.

다음 각 물음에 답하여라.

(a) $\det(G')$ 을 구하여라.

(b) $G(D)$ 의 밀도함수가 $\rho(u, v) = \frac{1}{u^2+v^2}$ 로 주어질 때 $G(D)$ 의 질량을 구하여라.

3. (20점) 다음 적분을 구하여라.

$\int_C (x \cosh(2y)) dx + (2x^2 \sinh(2y)) dy$, $C : y = x$ 와 $y = x^2$ 로 둘러싸인 부분의 경계

4. (20점) $D(2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\} \subset [-2, 2] \times [-2, 2]$ 라는 사실을 이용하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \quad (\approx 0.93)$$

5. (30점) 다음 곡면 S 의 넓이와 중심을 구하여라.

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

6. (30점) $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi, 0 < \beta < \alpha$ 에 대하여 곡면 X 가 다음과 같이 매개화되었다고 하자.

$$X(u, v) = (\alpha \cos u + \beta \cos u \cos v, \alpha \sin u + \beta \sin u \cos v, \beta \sin v)$$

(a) $u_0 = v_0 = \frac{\pi}{2}$ 일때, $X(u_0, v_0)$ 에서의 접평면의 방정식을 구하여라.

(b) 곡면의 넓이를 구하여라.

7. (30점)

(a) 발산정리를 이용하여 적분

$$\iint_{\partial R} (xe^z + y \sin x + z^2) dS$$

를 구하여라. 여기서 R 은 단위공 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 이다.

(b) 벡터장 $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$ 이 포물면 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 을 빠져나가는 양(flux)을 구하여라.

이때 향을 정하는 단위법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \leq 0$ 이 되도록 주어진다.

8. (20점) 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 과 평면 $y + 2z = 2$ 가 만나는 곡선을 C 라 하자.

(a) C 를 xy 평면으로 정사영한 곡선 C_p 를 x, y 에 관한 식으로 구하여라.

(b) C_p 의 향이 반시계 방향이 되도록 C 의 향이 주어졌을 때, 적분

$$\int_C -y \, dx + x \, dy + z^3 \, dz$$

를 구하여라.