

# 수학 및 연습 2 기말고사

(2008년 7월 28일 11:00 - 13:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 다음 적분의 값을 구하시오.

(a)  $\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2} dx dy$

(b)  $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$

$$D: -2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$$

문제 2 (20점). 다음 부등식을 만족하는 영역의 부피를 구하시오.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

문제 3 (20점). 다음 면적분의 값을 구하시오.

$$\iint_S \arctan \frac{y}{x} dS$$

$$S: z = x^2 + y^2, \quad 1 \leq z \leq 9, \quad 0 \leq y \leq x$$

문제 4 (10점). 반지름이 1 이고 중심이 (2, 0, 0) 인 구면의 원점에서 바라 보았을때, 입체각을 구하시오.

문제 5 (20점). 사이클로이드를  $180^\circ$  회전하여 만든 다음 곡면의 넓이와 중심을 구하시오.

단,  $\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sin(\frac{t}{2}) dt = \frac{128}{15}$  은 이용해도 좋다.

$$X(t, \theta) = (t - \sin t, (1 - \cos t) \cos \theta, (1 - \cos t) \sin \theta), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

문제 6 (30점). 밀도함수가  $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  일때 다음 곡면의 질량과 질량중심을 구하시오. 단,  $\int_0^{2\pi} u^4 \cos u du = 32\pi^3 - 48\pi$  와  $\int_0^{2\pi} u^4 \sin u du = -16\pi^4 + 48\pi^2$  은 이용해도 좋다.

$$X(u, v) = (vu \cos u, vu \sin u, vu), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1$$

문제 7 (20점).  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  이고,

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y \cos x, y^2 + y^2 \sin x)$$

일때  $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  를 구하시오. (단,  $\mathbf{n}$  은  $\partial D$  에서 외부를 향하는 단위 법벡터장이다.)

문제 8 (20점).  $R$  은 (0, 1), (3, 1), (3, 2), (0, 2) 을 꼭지점으로 하는 사각형으로 둘러싸인 영역이고,

$$\mathbf{F}(x, y) = (x \ln y, e^x)$$

일 때,  $\int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  를 구하시오.

문제 9 (20점).  $R$  은 (1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1) 을 꼭지점으로 하는 사각뿔로 둘러싸인 영역일때,  $R$  의 경계  $\partial R$  에 대한 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^z, e^z \cos y, e^z \sin y)$$

의 플럭스를 구하시오.

문제 10 (20점). 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{2z}, e^z \sin y, e^z \cos y)$  에 대해,

(a)  $\text{curl } \mathbf{F}$  를 구하시오.

(b) 곡면  $S: z = y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  의 경계  $\partial S$  에, 위에서 바라보았을때 반시계 방향으로 향이 주어졌을때,  $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  를 구하시오.