< 2012학년도 2학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안 >

#1. $\displaystyle\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

Sol) $\displaystyle\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

$\displaystyle= \int_0^4\int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dy\,dx\,dz$ (적분순서교환)

┘ 10 pt

$\displaystyle= \left(\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{z}}dz\right)\cdot\left(\int_0^2 2x\cos(x^2)\,dx\right)$

$= \left[\sqrt{z}\right]_0^4 \cdot \left[\sin(x^2)\right]_0^2$

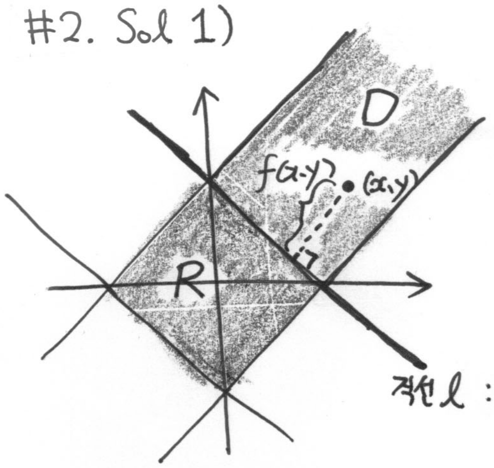
$= 2\sin(4)$

┘ 20 pt

※ 적분구간이 틀린 경우 0점

※ 적분계산 실수에 대한 부분점수 없음.

#2. Sol 1)



직선 l : $x+y=1$

$f(x,y)$ 의 값은 (D 상에서) 점 (x,y) 와 직선 l 사이의 거리와 같다:

$$f(x,y) = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}. \quad \cdots\cdots (1.1)$$

따라서 $\iint_D e^{-f(x,y)}\,dxdy = \iint_D e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dxdy$ 이다.

영역 D를

$$D_1 = \{(x,y)\in D \mid 0 \le x \le 1\} \quad 와 \quad D_2 = \{(x,y)\in D \mid x \ge 1\}$$

로 나누면,

$$\iint_D e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dxdy = \iint_{D_1} e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dxdy + \iint_{D_2} e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_{1-x}^{1+x} e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dydx + \int_1^\infty\int_{x-1}^{x+1} e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dydx$$

$$=: I_1 + I_2 \quad \cdots (1.2)$$

이고, 이때

$$I_1 = \int_0^1 \left[-\sqrt{2}\,e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\right]_{1-x}^{1+x} dx = \int_0^1 \sqrt{2}\,(1-e^{-\sqrt{2}x})\,dx$$

$$= \sqrt{2} - \left[-e^{-\sqrt{2}x}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1 + e^{-\sqrt{2}},$$

$$I_2 = \int_1^\infty \left[-\sqrt{2}\,e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\right]_{x-1}^{x+1} dx = \int_1^\infty \sqrt{2}\,(e^{-\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}(x+1)})\,dx$$

$$= 1 - e^{-\sqrt{2}}$$

이므로,

$$\therefore \iint_D e^{-f(x,y)}\,dxdy = I_1 + I_2 = \sqrt{2}. \quad \cdots\cdots (1.3)$$

※ 채점기준

① (1.1) 이 맞으면 5점

② (1.2) 와 같이 적분 영역을 올바르게 나누면 5점.

③ (1.3) 까지의 계산이 모두 맞고 답이 옳으면 10점.

Sol 2)

$$f(x,y) = \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$$ 이다. $((x,y) \in D)$ ...... (2.1)

이제 $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$ 로 치환하자. 그러면 $(u,v) = G(x,y)$ 로 둘 때

$$\begin{cases} G'(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ |\det G'| = 1 \end{cases}$$

이므로 $du\,dv = |\det G'(x,y)|\,dx\,dy = dx\,dy$ 이고, 새로운 영역 D'는

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad v \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

과 같이 주어진다. ...... (2.2)

따라서 치환적분 공식으로부터

$$\iint_D e^{-f(x,y)}\,dx\,dy = \iint_D e^{-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-(v-\frac{1}{\sqrt{2}})}\,du\,dv$$

$$= \sqrt{2}\left[-e^{-(v-\frac{1}{\sqrt{2}})}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} = \sqrt{2}.$$ ...... (2.3)

※ 채점기준

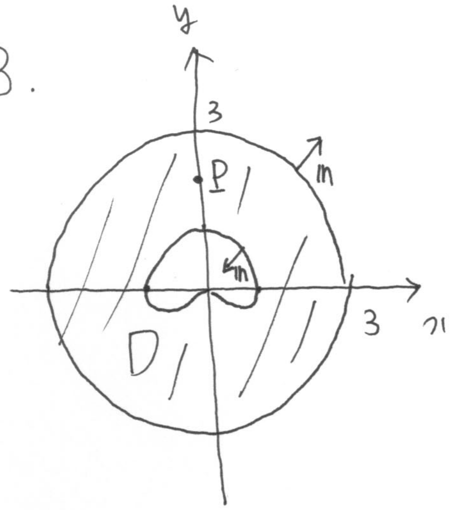
① $f(x,y)$ 에 대한 식을 옳게 구했으면 5점

② (2,2) 에서와 같이, 치환을 설정하고 그에 대응되는 올바른 야코비 행렬식 및 새로운 영역을 제대로 구했으면 5점.

③ (2,3) 에서와 같이, 계산 및 정답이 모두 올바르면 10점.

② 단, ②에서 구체적인 치환 등을 언급하지 않고 대신 $f(x,y)$ 의 기하학적 의미를 이용하여 바로 계산으로 넘어간 경우는 (2,2) 에 대한 점수가 없음.

3.



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{1+\sin\theta} \le r \le 3 \right\}$$

$$\mathbb{F}(x,y) = \mathbb{G}(x,y) + A_P(x,y)$$

$$\mathbb{G}(x,y) = \left(2x^3 + 3xy^2 + e^y \cos x ,\ y^3 + e^y \sin x \right)$$

$$P = (0,2) \quad A_P(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2} , \frac{y-2}{x^2+(y-2)^2} \right)$$

$$\operatorname{div} A_P(x,y) = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^2 - \{P\}, \quad \operatorname{div} \mathbb{G} = 6x^2 + 6y^2 \quad \text{on } \mathbb{R}^2.$$

$$\operatorname{div} \mathbb{F}(x,y) = 6(x^2+y^2) \quad \text{on } \mathbb{R}^2 - \{P\}$$

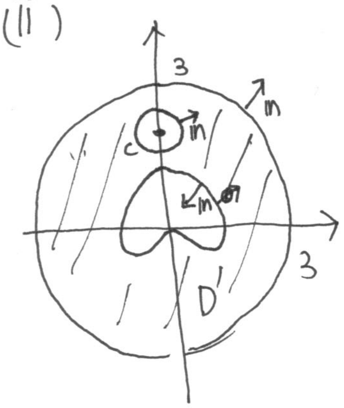
($\mathbb{F}$ 의 div 계산 5pt.)

$$\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\partial D} \mathbb{G} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{\partial D} A_P \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

(i) $$\int_{\partial D} \mathbb{G} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbb{G}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{1+\sin\theta}}^{3} 6r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{477}{2}\pi$$

(발산정리를 사용하여 식을 세우면 5pt, 올바른 계산결과도출 5pt)

(ii)



P를 중심으로 하는 반지름 $\varepsilon > 0$ 인 원을 C라 하자.

(ε을 충분히 작게 잡아 C가 D 내부에 포함되도록 하자)

원 C의 외부와 D의 교집합을 D'으로 두자.

$\operatorname{div} A_P = 0$ on D' 이므로

$$0 = \iint_{D'} \operatorname{div} A_P\, dx\, dy = \int_{\partial D'} A_P \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\partial D} A_P \cdot \mathbf{n}\, ds - \int_C A_P \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

$$\int_C A_P \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \frac{1}{\varepsilon}\, ds = 2\pi$$ 이므로 $$\int_{\partial D} A_P \cdot \mathbf{n}\, ds = 2\pi.$$

(발산정리, 가우스 정리 등을 이용하여 $\int_{\partial D} A_P \cdot \mathbf{n}\, ds = 2\pi$ 계산하면 10pt) (i), (ii) 에 의해

$$\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot \mathbb{n}\, ds = \int_{\partial D} \mathbb{G} \cdot \mathbb{n}\, ds + \int_{\partial D} A_R \cdot \mathbb{n}\, ds = \frac{481}{2}\pi.$$

* 채점기준

- $\mathbb{F}$ 가 D 위에서 정의되지 않음을 간과하고 발산정리를 이용하여 계산한 경우도 $\frac{477}{2}\pi$ 까지 계산하였다면 15점.
- 사소한 계산실수, 발산정리에서 향을 반대로 계산한 경우 등 5점감점.

#4.

(a) $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h(x,y)\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(h(x,y)\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} + h(x,y)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} - h(x,y)\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)\cdot(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{grad}\,h\cdot(x,y) = 0.$$

// 정답.

$(\because \mathrm{grad}\,h \perp (x,y))$.

+10점.

※ 채점기준: $\mathrm{grad}\,h = (-y,x)$ 등 문제에 제시되지 않은 불필요한 가정을 하면 0점.

(b) C 내부의 반지름 ε인 원판 B_ε을 생각한다.

그린 정리에 의하여, $0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint_{\mathrm{int}C-B_\varepsilon}\mathrm{rot}\,\mathbb{F}\,dV_2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_C \mathbb{F}\cdot ds - \dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon}\mathbb{F}\cdot ds$

$(\because (a))$

5점

$\therefore \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C \mathbb{F}\cdot ds = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon}\mathbb{F}\cdot ds$ (∂B_ε의 매개화: $(\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)$ $0\le t\le 2\pi$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{F}(\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)\cdot(-\varepsilon\sin t, \varepsilon\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)\left(\frac{-\varepsilon\sin t}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\right)\cdot(-\varepsilon\sin t, \varepsilon\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)\,dt$$

10점.

$= h(\varepsilon\cos t_0, \varepsilon\sin t_0)$ for some $t_0\in[0,2\pi]$

$(\because$ 적분의 평균값 정리$)$

$=$

이 적분은 ε의 선택에 의존하지 않으므로,

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \mathbb{F}\cdot ds = \lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon\cos t_0, \varepsilon\sin t_0) = h(0,0) = 1$$

// 정답.

15점.

#5.

① $\text{Area} = \iint_{x^2+y^2\le 2} 1\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 2} \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dxdy$

$\begin{pmatrix}\text{극좌표}\\\text{치환}\end{pmatrix} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2+1}\; r\, dr\, d\theta = \frac{13}{3}\pi \cdots$ 5점

②

대칭성에 의한 성질로, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. $\cdots$ 2점.

③

$\bar{z} = \frac{1}{\text{Area}} \iint_{x^2+y^2\le 2} (x^2+y^2)\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dxdy$

$= \frac{1}{\text{Area}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta$] 3점

$\underset{\boxed{4r^2+1=u}}{=} \frac{1}{\text{Area}} \cdot 2\pi \int_1^9 \frac{u-1}{4}\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{8}$

$= \frac{149}{130}$] 13점.

$\therefore \text{Ans} = \left(0, 0, \frac{149}{130}\right)$

① + ② + ③ = 20점, ①, ②, ③ 은 독립적으로 채점.

문제를 이해하지 못한 경우 0 점, Area 로 나누지 않으면 −3.

(ex) 삼중 적분, ...

6. 주어진 곡면 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\le 1)$을 매개화하면

$X(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ $(x^2+y^2\le 1)$ 가 된다. ┘5

이때 $X_x \times X_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$ 인데

커피가 떨어지는 방향으로 N이 주어짐으로

$N = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$ 이 된다. ┘5

$$\therefore \iint \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbb{F}\cdot N\, dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-y, x, -\sqrt{x^2+y^2})\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, dr d\theta$$

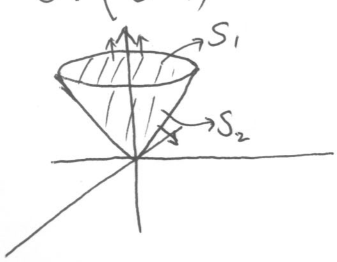
$$= \frac{2}{3}\pi.$$ ┘10

※ $X_x \times X_y$ 의 계산이 틀리면 매개화 부분만 점수있음.

※ 적분 계산 시 실수있으면 점수 없음
적분관련

※ N의 방향을 반대로 해서 $-\frac{2}{3}\pi$ 가 나온경우 (−5)

6. (별해)



S_1과 S_2로 둘러 쌓인 영역 : R

발산 정리에 의해

$$\iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV = \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot n\, dS + \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot n\, dS$$ 」5

$$\operatorname{div}\mathbb{F} = -1$$

$$\therefore \iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV = -\frac{\pi}{3}$$ 」5

$$\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (-y, x, -1)\cdot(0,0,1)\, dx dy$$

$$= -\pi$$ 」5

$$\therefore \iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iiint_R \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV - \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot n\, dS$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$ 」5

※ R, S_1, S_2 에 대한 명시없이 발산 정리만을 언급하면 점수 없음

#7

$X(t,\theta) = (t - \sin t, (1-\cos t)\cos\theta, (1-\cos t)\sin\theta)$, $0 \le t \le 2\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$

5점

$X_t = (1-\cos t, \sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta)$

$X_\theta = (0, -(1-\cos t)\sin\theta, (1-\cos t)\cos\theta)$

$\Rightarrow X_t \times X_\theta = ((1-\cos t)\sin t, -(1-\cos t)^2\cos\theta, -(1-\cos t)^2\sin\theta)$

$|X_t \times X_\theta| = (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}$

$\therefore$ 질량 $M = \iint_S \rho \, dS$

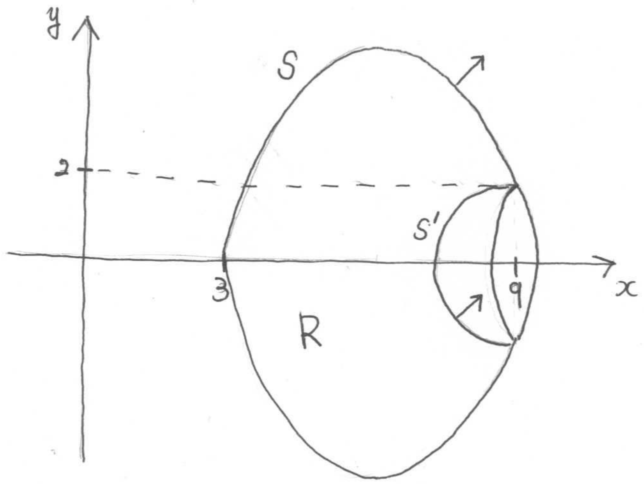
$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\, dt\, d\theta$ 10점

$= \frac{512\pi}{15}$ 10점

- $X_t \times X_\theta$ 계산에서 부호실수 -5점

- 답 틀리면 -10점

#8.



$S' = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-9)^2+y^2+z^2=2^2 ,\ x \le 9 \}$ 에 위의 그림에서와 같이 향을 주고

S와 S'으로 둘러싸인 영역을 R 이라고 하자.

입체각 벡터장의 발산 함수 $\operatorname{div} F = 0$ 이므로 .... $\boxed{5점}$

발산 정리에 의해,

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV_3 = \iint_S F \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} F \cdot d\mathbf{S}$$ 임을 얻는다. .... $\boxed{15점}$

$$\iint_{S'} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \frac{(x-9,y,z)}{2^3} \cdot \frac{-(x-9,y,z)}{2} \, dS$$

$$= -\iint_{S'} \frac{1}{4} \, dS = -2\pi$$

따라서 $$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S'} F \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$ .... $\boxed{20점}$

문제 9 번.

Let $\mathbb{F} = (z, -2y, 3y)$

$\underbrace{\text{curl}\,\mathbb{F} = (3, 1, 0)}_{①}$, $\mathbf{n} = \underbrace{-}_{④}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

Stokes 정리를 사용하면

$$\underbrace{\int_C \mathbb{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{int}\,C} \text{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\vec{S}}_{②}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \iint_{\text{int}\,C} \text{curl}\,\mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\text{int}\,C} dS \\ &= -\frac{4}{\sqrt{3}} A \end{aligned}\right\} ③$$

※ 채점 기준

① curl $\mathbb{F}$ 계산 5점

② Stokes Thm statement 5점

- curl $\mathbb{F}\, d\vec{S}$, curl $\mathbb{F} dS$ 꼴 인정
- $\iint_{\text{int}\,C} \text{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{int}\,C} \text{curl}\,\mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dV_2$ 꼴 인정

③ 계산과정 10점

- curl $\mathbb{F}$ 계산에 약간의 실수가 있는 경우도 계산과정 맞으면 인정
- 덧셈, 곱셈, 에) 와 같은 실수 −5점

④ normal vector 의 향 5점