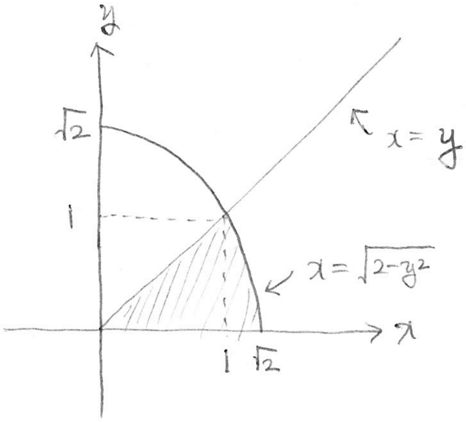
<2011년도 가을학기 수학 및 연습 2 기말고사 모범답안>

#1. 극좌표 치환적분을 활용한다.



$$\begin{aligned} y &\le x \le \sqrt{2-y^2} \\ 0 &\le y \le 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &\le r \le \sqrt{2} \\ 0 &\le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5점.

$$\therefore \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

10점.

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\log(1+r^2)\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}\log 3$$

15점.

채점기준). 극좌표 치환 이외의 다른 방법으로 했을 경우,
답이 틀리면 무조건 0점.

2.

Sol) T의 영역은 $x^2+4y^2 \le 4$, $x^2+3y^2 \le z \le 4-y^2$ 으로 주어지므로

$$Vol(T) = \iiint_{\substack{x^2+4y^2 \le 4, \\ x^2+3y^2 \le z \le 4-y^2}} dV_3$$

5점

$$= \iint_{x^2+4y^2 \le 4} \left((4-y^2)-(x^2+3y^2)\right) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (4-x^2-4y^2)\, dxdy$$

$x = 2r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 로 치환하면 $dxdy = 2rdrd\theta$

10점

$$\therefore\ Vol(T) = \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (4-x^2-4y^2)\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-4r^2)\cdot 2r\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (8r-8r^3)\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4\pi$$

20점

채점기준

- T의 영역을 나타내는 범위를 잘못 구했을 경우 무조건 0점.
- 단순 계산 실수 -5점

(별해) (발산 정리를 이용하는 경우)

$S_1 : (z = 4-y^2) \cap T$, $S_2 : (z = x^2+3y^2) \cap T$ 로 두면,

발산 정리에 의해

$$Vol(T) = \iiint_{\text{int } T} dV_3 = \iiint_{\text{int } T} \operatorname{div}(x,0,0)\, dV_3$$

$$= \iint_T (x,0,0)\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (x,0,0)\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} (x,0,0)\cdot d\vec{S}$$

(단, T가 폐곡면이므로 S_1의 향은 $\vec{n}_1 \cdot \vec{k} > 0$,
S_2의 향은 $\vec{n}_2 \cdot \vec{k} < 0$ 으로 둘 수 있다.)

i) $\iint_{S_1} (x,0,0)\cdot d\vec{S}$:

$X_1(x,y) = (x, y, 4-y^2)$ 을 S_1의 매개화로 두면,

$\vec{N}_1 = X_{1x} \times X_{1y} = (1,0,0) \times (0,1,-2y) = (0, 2y, 1)$

$\therefore \iint_{S_1} (x,0,0)\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (x,0,0)\cdot(0,2y,1)\, dx\,dy = 0$ 10점

ii) $\iint_{S_2} (x,0,0)\cdot d\vec{S}$:

$X_2(x,y) = (x, y, x^2+3y^2)$ 을 S_2의 매개화로 두면

$\vec{N}_2 = X_{2x} \times X_{2y} = (1,0,2x) \times (0,1,6y) = (-2x, 6y, 1)$

S_2의 향이 $\vec{n}_2 \cdot \vec{k}$ 로 주어지므로,

$$\iint_{S_2} (x,0,0)\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (x,0,0)\cdot(2x,-6y,-1)\, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+4y^2 \le 4} 2x^2\, dx\,dy$$

$x = 2r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ 로 치환
$dx\,dy = 2r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\cdot 4r^2\cos^2\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 16r^3\cos^2\theta\, dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\, d\theta = 4\pi$$

i), ii) 에서, $Vol(T) = 4\pi$ // 20점

채점기준

- 각각의 경우에서 곡면의 향과 발산 정리를 이용한 계산이 다 맞을 경우 각각 10점.
- 사소한 계산 실수 -5점

#3

(a) $$\text{area}(R) = \int_{-1}^{0}\int_{\sinh x}^{\cosh x} 1\,dy\,dx \quad \rfloor 5$$

$$= [\sinh x - \cosh x]_{-1}^{0} = [-e^{-x}]_{-1}^{0} = e-1 \quad \rfloor 10$$

적분 범위를 제대로 쓰면 5점

계산까지 맞으면 10점

(b) $$\int_{-1}^{0}\int_{\sinh x}^{\cosh x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x(\cosh x - \sinh x)\,dx$$

$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_{-1}^{0} = -1 \quad \rfloor 3$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{\sinh x}^{\cosh x} y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (\cosh^2 x - \sinh^2 x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \rfloor 3$$

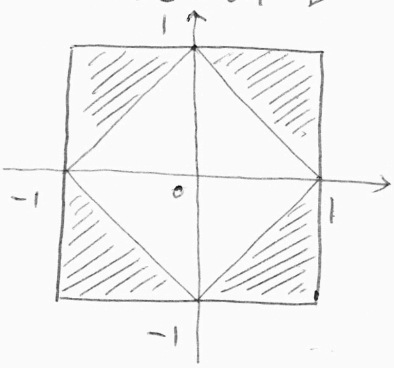
$$\therefore\ \bar{x} = \frac{-1}{\text{area}(R)} = \frac{1}{1-e} \quad \rfloor 5, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}}{\text{area}(R)} = \frac{1}{2(e-1)} \quad \rfloor 5$$

적분값을 제대로 구하면 각각 3점.

- 최종 답까지 맞아야 정답으로 인정.
- (a) 에서 영역의 넓이를 잘못 구해도 (b) 에서 풀이가 바르면 점수 인정.
- 적분영역이 다르면 (a), (b) 모두 0점.
- 발산정리, 그린정리를 이용해서 풀어도 됨. (부분점수 다 인정.)

문제 4.

좌표평면의 영역 D



D 가 원점을 포함하지 않으므로

발산 정리를 이용하여 구한다.

$\mathrm{div}\, G = 3x^2 + 3y^2$ ······ (5점)

이므로

$$\int_{\partial D} G \cdot n \, ds = \iint_D (3x^2+3y^2)\, dV_2$$ (10점)

$$\iint_D (3x^2+3y^2)\, dV_2 = \int_0^1 \int_{1-x}^1 (3x^2+3y^2)\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{-1}^{x-1} (3x^2+3y^2)\, dy\, dx$$
$$+ \int_{-1}^0 \int_{x+1}^1 (3x^2+3y^2)\, dy\, dx + \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-x-1} (3x^2+3y^2)\, dy\, dx$$

(또는, 대칭성에의해 (1사분면에서 적분한값) × 4

$$4 \int_0^1 \int_{1-x}^1 (3x^2+3y^2)\, dy\, dx$$
)

(15점)

식과 영역을 정확하게 쓴 경우

계산하면, $$4 \int_0^1 \int_{1-x}^1 (3x^2+3y^2)\, dy\, dx = 4 \times \frac{3}{2} = 6.$$

(20점)

※ 단, $D = D_1 - D_2$ $\left(\begin{array}{ll} D_1 = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\} & \square \\ D_2 = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\} & \diamond \end{array} \right)$

로생각하여

$$\int_{\partial D} G \cdot n \, ds = \underline{\iint_{D_1} \mathrm{div}\, G \, dV_2} - \underline{\iint_{D_2} \mathrm{div}\, G \, dV_2}$$ 로 쓴 경우, 감점.

(D_1, D_2 에서 G와 divG 가 정의되지 않으므로)

#5.

풀이 1. $S(u,v) = (\cosh u,\ \sinh u \cdot \cos v,\ \sinh u \cdot \sin v)$ → 매개화

$1 \le \cosh u \le 2 \ (0 \le u \le u_0)$, $0 \le v \le 2\pi$. → 범위

$(0 \le u \le \ln(2+\sqrt{3}))$

$S_u = (\sinh u,\ \cosh u \cdot \cos v,\ \cosh u \cdot \sin v)$

$S_v = (0,\ -\sinh u \cdot \sin v,\ \sinh u \cdot \cos v)$

$N = S_u \times S_v = (\sinh u \cdot \cosh u,\ -\sinh^2 u \cdot \cos v,\ -\sinh^2 u \cdot \sin v)$

$|N| = \sinh u \cdot \sqrt{2\cosh^2 u - 1}$. → 면적소

$$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{u_0} \cosh u \sinh u \sqrt{2\cosh^2 u - 1}\,du\,dv.$$ → 계산

$$= \frac{\pi}{3}(7\sqrt{7} - 1)$$

풀이 2. $S(y,z) = (\sqrt{1+y^2+z^2},\ y,\ z)$ → 매개화

$y^2+z^2 \le 3$. → 범위

$S_y = \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2+z^2}},\ 1,\ 0\right)$

$S_z = \left(\frac{z}{\sqrt{1+y^2+z^2}},\ 0,\ 1\right)$

$N = S_y \times S_z = \left(1,\ \frac{-y}{\sqrt{1+y^2+z^2}},\ \frac{-z}{\sqrt{1+y^2+z^2}}\right)$

$|N| = \frac{\sqrt{1+2y^2+2z^2}}{\sqrt{1+y^2+z^2}}$ → 면적소

$$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{y^2+z^2 \le 3} \sqrt{1+y^2+z^2} \cdot \frac{\sqrt{1+2y^2+2z^2}}{\sqrt{1+y^2+z^2}}\,dy\,dz.$$ → 계산

$$= \frac{\pi}{3}(7\sqrt{7} - 1)$$

* 채점기준.

① 매개화, 범위, 면적도 : 각 5점.

계산 : 10점. (부분점수 없음)

② 매개화가 틀리면 0점.

③ 범위가 틀리면 계산 0점, 그러나 올바른 매개화로 면적도를 잘 구했으면

매개화와 면적도에 대한 점수는 얻을수 있음.

④ 계산을 완료하지 못한경우 5점 감점. (단, 적분 계산은 완료해야 함)

⑤ 축을 바꿔서 매개화 한 경우 구체적으로 축을 바꿨다고 명시하지 않을경우 5점감점.

5. 다른 매개화의 예.

$\boxed{\text{풀이13}}$ $S(x,\theta) = (x,\ \sqrt{x^2-1}\cos\theta,\ \sqrt{x^2-1}\sin\theta)$ → 매개화

$1 \le x \le 2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$ → 범위.

$S_x = (1,\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos\theta,\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sin\theta)$

$S_\theta = (0,\ -\sqrt{x^2-1}\sin\theta,\ \sqrt{x^2-1}\cos\theta)$

$N = S_x \times S_\theta = (x,\ -\sqrt{x^2-1}\cos\theta,\ -\sqrt{x^2-1}\sin\theta)$.

$|N| = \sqrt{2x^2-1}$. → 면적소

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 x\sqrt{2x^2-1}\,dx\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}(7\sqrt{7}-1)$$

→ 계산.

$\boxed{\text{풀이14}}$ $S(r,\theta) = (\sqrt{1+r^2},\ r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ → 매개화.

$0 \le r \le \sqrt{3},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$ → 범위

$S_r = (\frac{r}{\sqrt{1+r^2}},\ \cos\theta,\ \sin\theta)$

$S_\theta = (0,\ -r\sin\theta,\ r\cos\theta)$

$N = S_r \times S_\theta = (r,\ -\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\cos\theta,\ \frac{-r^2}{\sqrt{1+r^2}}\sin\theta)$

$|N| = \frac{\sqrt{2r^4+r^2}}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{r\sqrt{2r^2+1}}{\sqrt{1+r^2}}$ → 면적소.

$$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+r^2}\cdot\frac{r\sqrt{2r^2+1}}{\sqrt{1+r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}(7\sqrt{7}-1)$$

→ 계산.

$\boxed{\text{풀이5}}$ $S(\varphi, \theta) = (\sec\varphi,\ \tan\varphi\cos\theta,\ \tan\varphi\sin\theta)$ → 매개화

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$ → 범위

$S_\varphi = (\sec\varphi\tan\varphi,\ \sec^2\varphi\cos\theta,\ \sec^2\varphi\sin\theta)$

$S_\theta = (0,\ -\tan\varphi\sin\theta,\ \tan\varphi\cos\theta)$

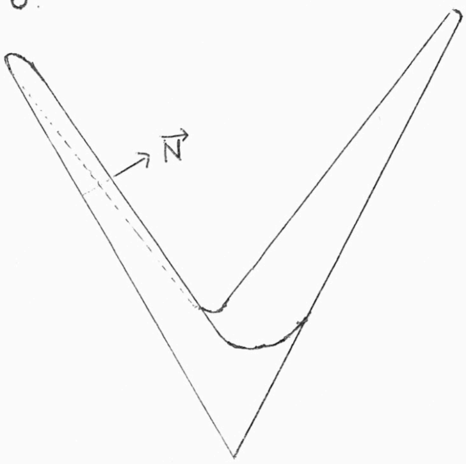
$N = S_\varphi \times S_\theta = (\tan\varphi\sec^2\varphi,\ -\sec\varphi\tan^2\varphi\cos\theta,\ -\sec\varphi\tan^2\varphi\sin\theta)$

$|N| = \sec\varphi\tan\varphi\sqrt{\tan^2\varphi + \sec^2\varphi}$ → 면적소

$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\varphi \cdot \sec\varphi\cdot\tan\varphi\sqrt{\tan^2\varphi + \sec^2\varphi}\ d\varphi\, d\theta$ → 계산

$= \frac{\pi}{3}(7\sqrt{7} - 1)$

6.



S

곡면 S를 매개화하면 $X(x,y) = (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$ 5 ①

$X_x = \left(1, 0, \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $X_y = \left(0, 1, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$X_x \times X_y = \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) = \vec{N}$ $(\because \vec{n}\cdot\vec{k} \geq 0)$

$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}\, dxdy = \iint_D 4(x^2+y^2)\, dxdy$ 5 ②

$(X, Y) = (2x+y, 2x+3y) =: G(x,y)$ 로 치환하면

$(x,y) = G^{-1}(X,Y) = \frac{1}{4}(3X-Y, -2X+2Y)$ 5 ③

$\det(G^{-1})' = \det G^{-1} = \frac{1}{4}$ 5 ④

$$\iint_D 4(x^2+y^2)\, dxdy = \iint_{X^2+Y^2\leq 4} 4\left(\frac{1}{16}(3X-Y)^2 + \frac{1}{16}(-2X+2Y)^2\right) |\det G^{-1}|\, dXdY$$

$$= \frac{1}{16}\iint_{X^2+Y^2\leq 4} (13X^2+5Y^2-14XY)\, dXdY$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (13r^2\cos^2\theta + 5r^2\sin^2\theta - 14r^2\cos\theta\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\pi$$ 5 ⑤

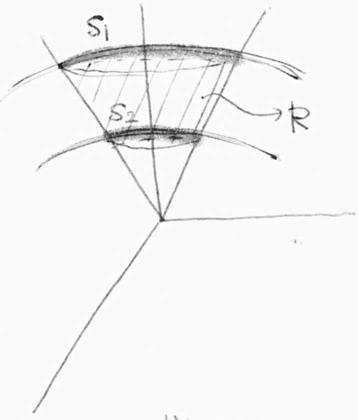
* ② 는 ① 이 맞아야 인정.

④ 는 ③ 이 맞아야 인정.

* ①, ② 와 ③, ④ 는 독립적.

* ⑤ 는 ①, ②, ③, ④ 가 모두 맞아야 인정.

7(a)



원뿔의 내부와 큰 타원면의 내부 그리고 작은 타원면의 외부로 이루어진 영역을 R 이라 하자.

그러면 $\partial R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

여기서 S_3는 옆면.

발산정리에 의해

$$\iiint_R \operatorname{div} A \, dV = \iint_{\partial R} A \cdot dS$$

입체각 벡터장 A의 $\operatorname{div} A$ 는 0 이므로

$$0 = \iint_{S_1} A \cdot dS - \iint_{S_2} A \cdot dS + \iint_{S_3} A \cdot dS$$

($\because$ 두 곡면의 향은 원점에서 멀어지는 방향).

이 때, $\iint_{S_3} A \cdot dS = 0$

$$\left(\because \; X(x,y) = \left(x, y, \sqrt{k(x^2+y^2)}\right) \right.$$
$$N = \left(\frac{kx}{\sqrt{k(x^2+y^2)}}, \frac{ky}{\sqrt{k(x^2+y^2)}}, -1 \right)$$
$$\left. \Rightarrow X \cdot N = 0 \right)$$

$$\therefore \iint_{S_1} A \cdot dS = \iint_{S_2} A \cdot dS$$

(기준) • 발산정리의 정확한 사용 +10

(향의 오류가 있을 경우 −5)

• S_3 에서의 적분이 0 이 됨을 잘 보이면 +5.

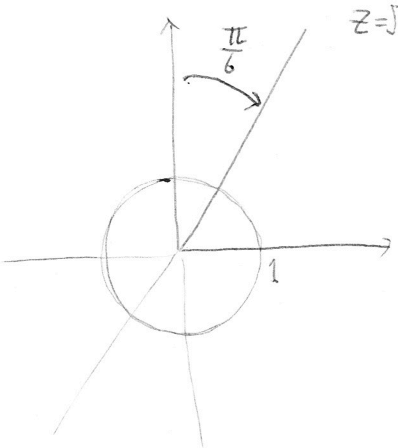
• 입체각임을 계산하지 않고 바로 쓰면 0 점.(점수 없음).

• 발산정리를 쓰지 않고 직접 계산할 경우 다 맞으면 15점, 아니면 0 점.

7 (b)

(a) 에 의해서

주어진 타원면에서의 면적분은 $x^2+y^2+z^2=1$ 에서의 면적분과 같다.



면적분 값은

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$ ┘ +5

$$= (2-\sqrt{3})\pi$$ ┘ +5

8 a)

$$\text{curl}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ y^3+\sin(xz) & e^{y^3}-x^3 & e^z-1 \end{pmatrix} + 4$$

$$= \left(0\ ,\ x\cos(xz)\ ,\ -3(x^2+y^2)\right)$$

(각 2점)

※ 정의 없이 계산이 틀린 경우

1개 맞으면 2점

2개 맞으면 4점.

단, 0 만 맞은경우 0점

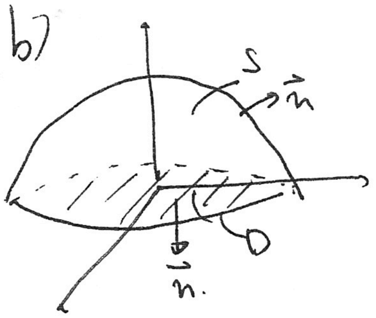
---

8. b) 정의을 이용하여 계산한경우

끝까지 맞은 경우만 인정.

Sol(1)

b)



$D := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \le 1, \ z = 0 \}$

$\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,\vec{F}) = 0$ 이므로 발산정리에 의하여

$$\int_S \mathrm{curl}\,\vec{F}\, d\vec{S} + \int_D \mathrm{curl}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

OR.

$S \cup D$는 폐곡면이므로 스토크스 정리에 의하여

$$\int_S \mathrm{curl}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_D \mathrm{curl}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \int_S \mathrm{curl}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = - \int_D \mathrm{curl}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \le 3^2} (0, x, -3(x^2+y^2)) \cdot (0, 0, -1)\, dx\,dy \quad +10$$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \le 3^2} 3(x^2+y^2)\, dx\,dy$$

$$= - \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r^2 \, r\, dr\, d\theta = -2\pi \cdot \left[\frac{3}{4} r^4 \right]_0^3$$

$$= -\frac{243}{2}\pi \quad +10$$

※ 향이 틀리면 5점 감점

Sol 2)

$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=9, z=0\}$

스토크스 정리에 의하여

$$\int_S \text{curl}\vec{F}\, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

∂S을 $c(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ $0 \le t \le 2\pi$ 로 매개화하면

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t)\, dt \rfloor +10$$

$$= \int_0^{2\pi} (27\sin^3 t, e^{9\sin^2 t} - 27\cos^3 t, 0) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -81\sin^4 t - 81\cos^4 t + 3\cos t\, e^{9\sin^2 t}\, dt$$

① $\int_0^{2\pi} \cos t\, e^{9\sin^2 t} dt = \int_0^{\pi} \cos t\, e^{9\sin^2 t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \cos t\, e^{9\sin^2 t} dt$

$$= \int_0^{\pi} \cos t\, e^{9\sin^2 t} dt - \int_0^{\pi} \cos t\, e^{9\sin^2 t} dt$$

$$= 0$$

② $\int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4t)\, dt$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$\therefore \int_S \text{curl}\vec{F} \cdot d\vec{S} = -81 \times \frac{3}{2}\pi = -\frac{243}{2}\pi \rfloor +10$

※ 향이 틀리면 5점 감점

※ 계산 까지 전부 맞아야 20점, 답은 맞았으나, ①이 틀리거나 없으면 5점 감점

#9.

$$\operatorname{div} \mathbb{H}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(5x^3 + 12xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + e^y \sin z) + \frac{\partial}{\partial z}(5z^3 + e^y \cos z)$$

$$= (15x^2 + 12y^2) + (3y^2 + e^y \sin z) + (15z^2 - e^y \sin z)$$

$$= 15(x^2 + y^2 + z^2)$$

발산정리에 의해

$$\iint_S \mathbb{H} \cdot d\mathbb{S} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbb{H} \, dV_3$$ 10 점

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbb{H} \, dV_3 = \iiint_R 15(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

구면좌표계로 치환

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 15\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$ 15점

$$= 372\pi$$ 20 점

* 채점기준.

① $\operatorname{div} \mathbb{H}$ 와 발산정리를 정확히 제시하였으면 10 점

② 구면좌표계 치환 +5 점 (① 이 맞았을 경우)

③ 답이 맞으면 +5 점 (①과 ②가 맞았을 경우)

④ 직접 매개화 했을 때 답이 틀리면 0 점

⑤ $\operatorname{div} \mathbb{H}$ 을 잘못 구하면 0 점