문제 1

5점 : a_n을 구함.
10점 : a_n을 잘 구한 후 답이 맞음

$y' = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\cos\frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ 직선 : $y - \sin\frac{1}{n} = \frac{n}{2}\cos\frac{1}{n}\cdot\left(x - \frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow y = 0$: $a_n = -\frac{2}{n}\tan\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2}$으로 극한 비교판정을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 수렴.

2.

(a) $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^k} = 0 \right.$ 임을 이용$\left. \right)$

충분히 큰 모든 자연수 n에 대해 $\frac{\log n}{\sqrt[4]{n}} < 1$ 이 성립한다.

따라서 $\frac{\log n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$ 가 성립한다. 비교판정법에 의해 $\sum \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$ 가 수렴하므로 주어진 급수도 수렴한다.

· 답만 맞고 풀이가 틀리면 0점.

· 예시답안과 달라도 맞는 풀이이면 5점.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3\cdot5\cdots(2n+3)!} \cdot \frac{3\cdot5\cdots(2n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로

비율판정법에 의해 주어진 급수는 ~~수렴한다~~. 절대수렴한다. 따라서 (일반)수렴도 한다

· 답만 맞고 풀이가 틀리면 0점.

· 예시 답안과 달라도 풀이가 맞으면 5점

(c) $f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} = e^{(-1-\frac{1}{x})\log x}$ 라고 놓고, 이 함수를 미분하면

$$f'(x) = e^{(-1-\frac{1}{x})\log x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\log x + \left(-1-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} \cdot \left(\frac{\log x - 1 - x}{x^2} \right)$$

이고, 충분히 큰 모든 실수 x에 대해 $f'(x) < 0$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\left\{ \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 은 (적당히 큰 모든 자연수 n에 대해) 감소수열이고,

0으로 수렴한다. 따라서 교대급수 정리에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

· 답만 맞고 풀이가 틀리면 0점.

· 예시 답안과 달라도 풀이가 맞으면 5점.

문제 3

4점: 수렴반경을 구함 or 수렴하는 열린구간을 구함
각 3점: 경계에서의 수렴판정

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)4^{n+1}} \cdot \frac{n\cdot 4^n}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow$ 수렴반경 $= 2$, $-2<x<2$: 수렴

$x=2$ 이면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: 발산

$x=-2$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: 발산

$\Rightarrow$ $-2<x<2$

답.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)\log((n+1)^2+1)} \cdot \frac{n\cdot\log(n^2+1)}{(1-x)^n} = 1-x$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\log((x+1)^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}} = 1$

$\Rightarrow$ $-1<1-x<1$: 수렴 $\Rightarrow$ $0<x<2$: 수렴

$x=0$ 이면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n^2+1)}$: 발산 by 극한비교판정법

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\log n^2} \right.$: 발산, $\left. \lim_{n\to\infty} \frac{n\log n^2}{n\log(n^2+1)} = 1. \right)$

$x=2$ 이면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\log(n^2+1)}$: 수렴 by 교대급수판정법

$\Rightarrow$ $0<x\leq 2$

답

4. $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ 이라 하면, 주어진 급수 $\sum \dfrac{x^n}{a_n} = \sum b_n x^n$ 의 수렴반경은

극한 $\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|}$ 가 존재한다면 $r = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 이다.

(a_n)은 양항 수열이므로 $r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 임을 알 수 있다.

(풀이 1) 점화식 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ 의 양 변을 a_{n+1} (>0) 으로 나누면 (※)

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 + \frac{3a_n}{a_{n+1}}$$

이고, $n\to\infty$ 인 극한을 취하면 $r = 2 + \dfrac{3}{r}$ 을 얻는다. (※)
양 변에 r을 곱하여 정리하면 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 이므로 $r = -1$ or 3 인데,
(a_n)이 양항수열이므로 $r = 3$이 된다.

(풀이 2) $a_n = \dfrac{5}{4}\times 3^n + \dfrac{3}{4}\times(-1)^n$ 임을 수학적 귀납법으로 보이자.

① $n = 0, 1$ 일 때는 $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ 이므로 성립.
② $n = k, k+1$ 일 때 $a_n = \dfrac{5}{4}\times 3^n + \dfrac{3}{4}\times(-1)^n$ 이면,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 2a_{k+1} + 3a_k \\ &= 2\left(\frac{5}{4}\times 3^{k+1} + \frac{3}{4}\times(-1)^{k+1}\right) + 3\left(\frac{5}{4}\times 3^k + \frac{3}{4}\times(-1)^k\right) \\ &= \frac{5}{4}\times\left(2\times 3^{k+1} + 3\times 3^k\right) + \frac{3}{4}\times\left(2\times(-1)^{k+1} + 3\times(-1)^k\right) \\ &= \frac{5}{4}\times 3^{k+2} + \frac{3}{4}\times(-1)^{k+2} \end{aligned}$$

이므로 $n = k+2$ 일 때도 성립한다.
①, ②와 수학적 귀납법에 의해 $a_n = \dfrac{5}{4}\times 3^n + \dfrac{3}{4}\times(-1)^n$.
이 경우 $r = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3$ 임을 알 수 있다.

(채점 기준) - (극한이 존재한다면,) $r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 임을 언급 (5점)
- 방법 1 or 2를 이용하여 $r = 3$을 올바르게 계산 (10점)

- 논리적 비약이 심한 경우 (-5점), 계산 실수 (-2점).

(참고) (※)와 (※)는 증명이 필요한 부분이지만 감점하지 않았습니다.

(☆)의 증명 : 수학적 귀납법에 의해 성립.

(☆)의 증명 :

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - 3 = \frac{3a_n}{a_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{3 - \frac{a_{n+1}}{a_n}}{3 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$= \frac{a_n}{a_{n+1}}\left(3 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

그런데 $a_{n+1} \geq 2a_n$ 이므로,

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - 3\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 3\right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 3\right|$$

$$\leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}\left|\frac{a_2}{a_1} - 3\right| = \frac{3}{2^{n+1}}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 3.$$

5. (a) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $(|x|<1)$ 이므로, (교재 p.90)

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$을 대입할 수 있고

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다. $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ 이므로, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - (1+x) = e^x - 1 - x$ 이므로

$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ 이다. ($f(0)=1$, 수렴반경 $=\infty$)

$\therefore$ 거듭제곱급수 기본정리에 의해,

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)x - (e^x-1-x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$$

이고 이 급수의 수렴반경은 ∞이다. $x=1$을 대입하면 $f'(1) = 1$.

(c) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ $(|x|<1)$ 이므로, (교재 p.67)

$x = \frac{1}{2}$을 대입하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} = \log \frac{3}{2}$.

(b) (추가 풀이) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} = 1.$$

(채점 기준) — 올바른 거듭제곱급수 수렴 (2점)

— 수렴반경 언급 (2점) — 정답 (1점)

— (b)의 추가 풀이는 부분점수 6점 부여.

6. (a) $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$ 라 하면

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}, \quad f(x) = F(\sin x)$$

이므로 연쇄법칙에 의해

$$f'(x) = F'(\sin x)\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

이다. 이는 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 양수이므로 f는 순증가 함수이고 f가 미분가능하므로 역함수 정리에 의해 역함수 $x = g(y)$가 존재하고 미분가능하다.

(b) $g(y) = x$일 때 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $g''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$.

$g(0) = 0$ 이므로, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 0$.

(채점기준) — (a) $f'(x)$를 잘 구했으면 (5점).
- 증명을 마무리하면 (5점).
- (b) $g'(0)$ (2점), $g''(0)$ (3점).
- (b)는 정답이 맞더라도 (a)가 틀린 경우 점수 없음.

7.

[모범답안]

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n} \ (|y|<1) \text{ 이므로,}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.1} \log(1+3x^3)dx &= \int_0^{0.1} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x^3)^n}{n}dx \quad (\because\ 0 \le x \le 0.1 \implies |3x^3|<1) \\
&= \int_0^{0.1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n} x^{3n}dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{0.1} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n} x^{3n}dx \quad (\because \text{ 거듭제곱급수 기본정리}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n} \cdot \frac{0.1^{3n+1}}{3n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{3}{1000}\right)^n \frac{1}{10n(3n+1)}
\end{aligned}$$

을 얻는다. 이때

$$a_n := (-1)^{n-1}\left(\frac{3}{1000}\right)^n \frac{1}{10n(3n+1)}$$

라고 하면, $a_n a_{n+1} < 0$, $|a_n| > |a_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이 만족됨을 알 수 있다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 교대급수 정리의 조건을 만족하는 급수이다. 이때

$$|a_2| = \frac{3^2}{10^6} \cdot \frac{1}{140} \le 10^{-6}$$

이므로,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1\right| \le |a_2| \le 10^{-6}$$

이다. 따라서 근삿값을 $a_1 = \frac{3}{1000} \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{40000}$으로 택하면 오차가 10^{-6} 이하이다.

[채점기준]

- $\log(1+y)$ 또는 $\log(1+3x^2)$을 거듭제곱급수의 형태로 나타내면 **+4점**
- 주어진 적분을 급수의 형태로 올바르게 고쳤을 때 **+5점**
- 교대급수 정리의 세 조건이 만족됨을 언급하면 **+1점**
- $|a_2| \le 10^{-6}$ 또는 $|a_3| \le 10^{-6}$ 등을 언급한 후에 근삿값으로 a_1 또는 $a_1 + a_2$를 제시하면 **+5점**
    - $*$ 그러나 오차가 10^{-6} 이하가 되는지를 아예 확인하지 않고 근삿값만 제시하면 **+0점**

8.

[모범답안]

주어진 극한값을 구하기 위해 우선 log를 취한 극한값을 구한다.

(방법1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(\log x)\log(1-x) &= \lim_{x\to 0+} x(\log x)\frac{\log(1-x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}(\log x^x)\frac{\log(1-x)}{x}\\ &= (\log 1)\cdot(-1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(방법2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(\log x)\log(1-x) &= \lim_{x\to 0+}\frac{\log(1-x)}{\frac{1}{\log x}}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x(\log x)^2}} \quad \left(\because \lim_{x\to 0+}\log(1-x) = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\log x} = 0, \text{로피탈의 정리}\right)\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{x(\log x)^2}{1-x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1-x}\left(x^{1/2}\log x\right)^2\\ &= 1\cdot 0 \quad (\text{3장 2절 1번 (11) 연습문제})\\ &= 0.\end{aligned}$$

따라서, 주어진 극한값은 $\lim_{x\to 0+}(1-x)^{\log x} = e^0 = 1$이다.

[채점기준]

- 극한값 1을 구하면 **+5점**
- 구하는 과정에서 논리적인 결점이 없었을 시 **+10점**
  - * $\lim_{x\to 0+}(\log x)\log(1-x) = 0$임을 아무런 과정없이 주장하면 **+0점**
  - * $\lim_{x\to 0+}\frac{x(\log x)^2}{1-x} = 0$임을 아무런 과정없이 주장하면 **+0점**
  - * $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x} = 0$과 같이 잘못된 주장을 포함하면 **+0점**

9 (a) $f(x)=o(x^n)$ 이고 $g(x)=o(x^n)$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=0$$ 2점

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n}=0$ 이고 $f(x)-g(x)=o(x^n)$ 이다. 3점

(*) $o(x^n)$의 정의를 바르게 표현하지 못한 경우 0점.

(*) $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$ 등을 정의로 이용한 경우 미분가능성에 대한 언급이 없으므로 0점.

(b) $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ 1점 $$=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}x^{2n}$$ 3점

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ 1점 $$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}(-1)^n x^{2n}$$ 3점

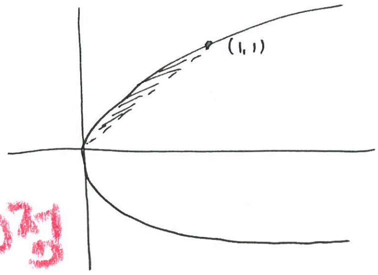
따라서 $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x-\sinh^{-1}x)=x^2+\frac{5}{8}x^6+\frac{63}{128}x^{10}+o(x^{10})$$

따라서 $$\sin^{-1}x-\sinh^{-1}x=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{56}x^7+\frac{63}{1408}x^{11}+o(x^{10})$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{56}x^7+o(x^{10})$$ 이다.

따라서 10차 근사다항식은 $\frac{x^3}{3}+\frac{5}{56}x^7$. 2점

#10. $r = \dfrac{1}{\sec\theta - \cos\theta} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$



$\therefore r^2\sin^2\theta = r\cos\theta$, 직교좌표계로 표현하면 $x = y^2$

10점

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6}$.

5점