수학 1 중간고사

(2022 년 4 월 16 일 오후 1:00–3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150 점)

문제 1. [15 점] 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

(a) (5 점) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

(b) (5 점) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n^2+2)(n^2-4)}{(n^2+1)(n^2-2)n}$

(c) (5 점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

문제 2. [10 점] 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log\, n)^{10}}$$

문제 3. [15 점] 모든 실수 x 에 대하여 정의된 두번 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수에 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 를 만족한다. 원점에서 f 의 2 차 근사다항식이 $3 + 8x + \frac{1}{2}x^2$ 일 때, $f(x)$ 의 역함수 $g(y)$ 에 대하여 $y = 3$ 에서 $g(y)$ 의 2 차 근사다항식을 구하시오.

문제 4. [15 점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^x - 1} \right)$$

문제 5. [20 점] 원점에서 함수 $f(x) = e^x \cos x$ 의 3 차 근사다항식을 구하고, 3 차 테일러 나머지항 $R_3 f(x)$ 에 대하여 $|R_3 f(1)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{12} e^{\frac{\pi}{4}}$ 가 성립함을 보이시오.

⟨ 연습용 여백 ⟩

문제 6. [15점] $\cosh x$ 에 대하여 테일러 정리를 적용하여 다음 정적분 값을 오차가 10^{-3} 이하가 되도록 구하시오. (단, 근삿값은 유리수로 구하시오.)

$$\int_0^1 \frac{\cosh x - 1}{x^2}\, dx$$

문제 7. [10점] 좌표평면에서 극좌표계 (r, θ) 로 주어진 두 곡선

$$r = 1 + \sqrt{2}\sin\theta, \quad r = 2 + \cos\theta - \sin\theta$$

의 모든 교점을 직교좌표계 (x, y) 로 나타내시오.

문제 8. [15점] 삼차원 좌표공간에서 직교좌표계 (x, y, z) 로 나타낸 다음 두 영역

$$A : z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad B : z \leq 1$$

에 대하여, A 를 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 표현하고 A 와 B 가 겹치는 부분의 부피를 구하시오.

문제 9. [20점] 자연수 n 에 대하여, 좌표평면에서 극좌표계로 표현된 곡선 $r = \sin(n\theta)$ 의 그래프가 가지는 잎의 개수를 a_n 이라고 하자. 이때 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$$

문제 10. [15점] 자연수 n 에 대하여, 삼차원 좌표공간에서 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 나타낸 곡선

$$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \varphi = \arcsin(1/n), \quad \rho = 1\}$$

의 길이를 l_n 이라 할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{2^n}$ 의 합을 구하시오.