2021학년도 여름계절학기

수학 1중간고사

모범답안 및 채점 기준

수리과학부 조교실

#1 · $s>1$ 인 경우

$0 < \dfrac{1}{n^s+sn} < \dfrac{1}{n^s}$ 이고 $\sum \dfrac{1}{n^s} < \infty$ 이므로

비교판정법에 의해 $\sum \dfrac{1}{n^s+sn} < \infty$ 이다. (4점)

· $s=1$ 인 경우

$\sum \dfrac{1}{2n} = \infty$ (2점)

· $s<1$ 인 경우

$\dfrac{1}{n^s+sn} \geq \dfrac{1}{(s+1)n} > 0$ 이고 $\sum \dfrac{1}{(s+1)n} = \infty$ 이므로

비교판정법에 의해 $\sum \dfrac{1}{n^s+sn} = \infty$ 이다. (4점)

따라서 $s>1$ 일 때 수렴한다.

#2 (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{5}} \sin\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^{-\frac{9}{10}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{\sin\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \text{ 이므로}$$

극한비교판정법에 의해 $\sum n^{-\frac{9}{10}}$ 과 수렴, 발산이 일치하고 ┘5점

$\sum n^{-\frac{9}{10}}$ 가 발산하므로 발산한다. ┘ 5점.

(b) $\frac{\log x}{e^x} > 0$

$\left(\frac{\log x}{e^x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}e^x - \log x \cdot e^x}{e^{2x}} < 0$ 이므로 감소.

⇒ 적분판정법에 의해 $\int_{2021}^{\infty} \frac{\log x}{e^x} dx$ 와 $\sum \frac{\log n}{e^n}$ 은 수렴, 발산이 일치 ┘5점

$n \gg 1$ 일 때 $0 < \frac{\log n}{e^n} \leq \frac{n}{e^n} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ 이므로 비교판정법에 의해

$\sum \frac{\log n}{e^n}$ 은 수렴한다. ∴수렴 ┘5점.

(* 비교판정법을 훙내내어 $0 < \frac{\log x}{e^x} < \frac{1}{x^2}$ 이고 $(x \gg 1)$

$\int \frac{1}{x^2} dx < \infty$ 이므로 $\int \frac{\log x}{e^x} dx < \infty$ 이다.

등의 풀이는 점수를 부여하지 않았음.)

#3 (a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\log n}{(n+1)(\log(n+1))}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\log n}{\log(n+1)} = 1$ 이므로

수렴반경은 1이다. ┘5점

$x=1$ 일 때, $f(x)=\frac{1}{x\log x}$ 은 감소, 미분가능, $f(x)>0$ 이므로

적분판정법에 의해 $\int_3^\infty \frac{1}{x\log x}dx$ 와 $\sum \frac{1}{n\log n}$ 의 수렴, 발산이 일치하고

$\int_3^\infty \frac{1}{x\log x}dx = \left[\log\log x\right]_3^\infty = \infty$ 이므로 발산한다. ┘2점

$x=-1$ 일 때 $\sum \frac{1}{n\log n}(-1)^n$ 에서 $a_n=\frac{1}{n\log n}$ 이라 하면

$a_n>0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $a_n > a_{n+1}$ 이므로 교대급수판정법에 의해

$\sum \frac{(-1)^n}{n\log n}$ 은 수렴한다. ┘2점

$\therefore$ $-1 \le x < 1$ 에서 수렴. ┘1점

(b) $x+2=y$ 로 쓰면 $\sum \frac{n}{3^{n+1}}\cdot y^n$ 이 되고

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+1}}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$ 이므로 수렴반경은 3이다. ┘5점

$y=3$ 일 때, $\sum \frac{n}{3}$ 은 일반항 판정법에 의해 발산. ┘2점

$y=-3$ 일 때, $\sum \frac{n}{3}(-1)^n$ 은 일반항 판정법에 의해 발산. ┘2점

$\therefore$ $-3<y<3$ 일 때 수렴하고 이는 $-5<x<1$ 이다. ┘1점

(* 수렴반경을 구하지 않고 비율판정법을 이용한 경우 $x>0$ 인 경우와 $x<0$ 인 경우로 나누지 않으면 비율판정법을 이용할 수 없기에 $x<0$ 인 경우 따로 설명해야 점수를 부여.)

4. [15] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (|x|<1)$ 라 하면

(미분) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$

(적분) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x) \quad (|x|<1)$ +5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{2^n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$\therefore$ 정답 $= \frac{1}{2} + \log 2$. +10

(사소한 계산실수 : −5점)

5. $0<x\le 1$에서 $\sin x>0$, $\arcsin x>0$이므로 $(\sin x)^{\arcsin x}$가 잘 정의된다.

이 범위에서 $(\sin x)^{\arcsin x}=e^{\arcsin x\cdot\log(\sin x)}=e^{\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{\log(\sin x)}{1/x}}$가 성립한다.

로피탈의 정리를 사용하면 $\lim_{x\searrow 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1}=1$, $\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(\sin x)}{1/x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{\sin x}(-x\cos x)=0$이다.

지수함수는 연속이므로, $\lim_{x\searrow 0}(\sin x)^{\arcsin x}=\lim_{x\searrow 0}e^{\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{\log(\sin x)}{1/x}}=e^{\lim_{x\searrow 0}\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{\log(\sin x)}{1/x}}=e^{1\cdot 0}=\boxed{1}$

(x가 음수이면 주어진 식이 잘 정의되지 않는다.)

채점기준 : 중간에 부족한 논리가 있으면 0점. ($\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{\sin x}=0$ 등.)

$\lim_{x\to 0}\arcsin x\cdot\log(\sin x)=0$을 구하고, $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\arcsin x}=0$이라 썼으면 2점 감점.

6. (a) $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$이므로, $\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}$

$$\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$$

(b) 역함수 정리에 의해 $y=f(x)$이면, $\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$이다.

$f(x)=\tanh x$를 대입하면, $\frac{d}{dy}\tanh^{-1}y=\frac{1}{\frac{d\tanh x}{dx}}=\frac{1}{1-\tanh^2 x}=\frac{1}{1-y^2}$이다.

채점기준: (a)에서 주어진 세 식 중 둘이 같은 것을 보이면 2점

(b)는 부분점수 없음

7. $f(x) = 3x \cdot \arctan x$ 라 하면

[15]

$$f(1/\sqrt{3}) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$ 이므로

$$f(x) = 3x \cdot \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \quad (|x|<1).$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = f(1/\sqrt{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{각 항이 유리식이므로 ok}}.$$

각 항이 유리식이므로 ok +10

$$\Rightarrow \left|\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right| \le \left|\frac{(-1)^N}{2N+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^N\right| = \frac{1}{3^N \cdot (2N+1)}.$$

(∵ 교대급수)

$N=5$일 때 $\frac{1}{3^N \cdot (2N+1)} < 10^{-3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

+5.

8. $f(x) = \sin(x^2)$, $f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x$,

$f''(x) = -\sin(x^2)\cdot 2x\cdot 2x + \cos(x^2)\cdot 2$,

$f'''(x) = -\cos(x^2)\cdot(2x)^3 - \sin(x^2)\cdot 8x - \sin(x^2)\cdot 2x\cdot 2$

이므로 $f(\sqrt{\pi}) = 0$, $f'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$, $f''(\sqrt{\pi}) = -2$ 이다.

따라서 $f(x)$의 $x = \sqrt{\pi}$ 에서의 2차 근사 다항식은

$T_2 f(x) = 0 + \frac{-2\sqrt{\pi}}{1}(x-\sqrt{\pi}) + \frac{-2}{2!}(x-\sqrt{\pi})^2$ 이다. 따라서 근삿값은 $-\frac{\pi}{50} - \frac{1}{10000}$.

한편 $\left|f\left(\sqrt{\pi}+\frac{1}{100}\right) - T_2 f\left(\sqrt{\pi}+\frac{1}{100}\right)\right| = \left|\frac{f'''(x_0)}{3!}\right|\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^3$

$\leq \frac{(2x_0)^3 + 8x_0 + 4x_0}{6}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^3 < \frac{1}{60000}$ $(x_0 < 2)$

$\left(\sqrt{\pi} \leq x_0 \leq \sqrt{\pi}+\frac{1}{100}\right)$

이므로 오차가 $\frac{1}{60000}$ 을 넘지 않는다.

$T_2 f(x) = f(\sqrt{\pi}) + \frac{f'(\sqrt{\pi})}{1}(x-\sqrt{\pi}) + \frac{f''(\sqrt{\pi})}{2!}(x-\sqrt{\pi})^2$ 을 쓰면 +3

$f(\sqrt{\pi})$, $f'(\sqrt{\pi})$, $f''(\sqrt{\pi})$ 를 모두 정확히 구하면 +3

근삿값을 구하면 +4

$\left|f\left(\sqrt{\pi}+\frac{1}{100}\right) - T_2 f\left(\sqrt{\pi}+\frac{1}{100}\right)\right| = \left|\frac{f'''(x_0)}{3!}\right|\left(\frac{1}{100}\right)^3$: +3

오차추정 +7.

9. $f(x) = e^x + x + \sin x$, $f'(x) = e^x + 1 + \cos x$, $f''(x) = e^x - \sin x$ 이다.

$f'(x) = e^x + 1 + \sin x \geq e^x > 0$ 이므로, $x_1 < x_2$ 일때 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립한다.

$\lim_{x \to -\infty} e^x + x + \sin x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} e^x + x + \sin x = \infty$ 이므로 위의 결과에 의해 $f(x)$는

실수전체에서 역함수를 지닌다.

$f'(0) = 3$, $f''(0) = 1$ 이므로 $g'(1) = \frac{1}{3}$, $g''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{1}{27}$ 이고,

따라서 $g(y)$의 2차 근사 다항식은 $g(y) = 0 + \frac{1}{3}(y-1) + \frac{-1}{2!} \cdot \frac{1}{27}(y-1)^2$

$x_1 < x_2$ 일때 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립한다 : +2

$\lim_{x \to -\infty} e^x + x + \sin x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} e^x + x + \sin x = \infty$: +3

$g(1) = 0$, $g'(1) = \frac{1}{3}$, $g''(1) = -\frac{1}{27}$: +7

$T_2 g(y) = g(1) + g'(1)(y-1) + \frac{1}{2!} g''(1)(y-1)^2$: +3

10. (a) $\theta = 2n\pi$ $(n \geq 0)$ 일때 x축과 만나므로

$a_n = e^{2n\pi}$ 이다.

따라서 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi} x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2\pi} x)^n}{n!} = e^{e^{2\pi} x}$

이므로, $\log f(2) = e^{2\pi} \cdot 2$ 이다.

$a_n = e^{2n\pi}$: +3

$\log f(2) = e^{2\pi} \cdot 2$: +7.

10. (b) $\rho = 1$, $\phi = \theta$ 이므로 곡선은 다음의 매개화를 지난다.

$(\sin\theta \cos\theta, \ \sin\theta \sin\theta, \ \cos\theta)$.

이 곡선을 xy 평면 위에 정사영 시키면

$(\sin\theta \cos\theta, \ \sin\theta \sin\theta)$ 가 되고,

이는 극좌표계로 표현하면 $r = \sin\theta$ 이다.

부분점수 X.

극좌표계로 표현하지 않으면 0점.