2020-여름 수학 1 중간고사 채점기준

#1. (a) 거짓. $a_n = \frac{1}{n}$.

$\lim \frac{1}{n} = 0$ 이지만 $\sum \frac{1}{n}$은 발산.

(b). 거짓.

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. 이라 하면

$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ 이지만 $\sum a_n$ 수렴

$\sum b_n$ 발산 이다.

(c). $a_n = \frac{1}{n}$.

(d). 참. (비율판정법)

(e) 참.

$\lim a_n = 0$ 이므로 적당한 자연수 N에 대해

$n > N$ 이면 $|a_n| < 1$.

$\therefore a_n^2 < |a_n| < 1$ 이므로

비교판정법에 의해 $\sum a_n^2$ 수렴.

(f) 거짓. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

$\sum a_n$: 교대급수판정법에 의해 수렴.

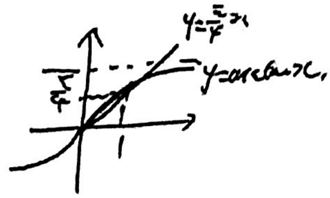
그러나 $\sum a_n^3$ 은 절대수렴하지 않음.

※ 반례를 제대로 들었을 경우 소문항 당 9점.

(d), (e)를 거짓으로 판정했을 경우 -5점.

#2.

(a). $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$ 이고,



$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$ 는 발산하므로

비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 발산.

※ 부분점수 없음.

※ 잘못된 부등식을 사용하면 점수 없음.

(b). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n+n(\log n)^4}$

$$\frac{\log n}{n+n(\log n)^4} < \frac{\log n}{n(\log n)^4} = \frac{1}{n(\log n)^3}.$$

$f(x)=\frac{1}{x(\log x)^3}$ 이라 하면,

$f(x)$ 는 (감소함수, 양함수) 이므로 적분판정법을 이용하면,

$\sum\frac{1}{n(\log n)^3}$ 은 수렴한다

따라서 비교판정법에 의해 $\sum\frac{\log n}{n+n(\log n)^4}$ 수렴.

※ 부분점수 없음.

※ $f(x)=\frac{\log x}{x+x(\log x)^4}$ 로 두고 적분판정법을 사용할 때,

$f(x)$ 가 감소함수임을 보이지 않으면 0점.

#3. (a) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\tan\frac{1}{n+1}}{\tan\frac{1}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\tan\frac{1}{n+1}}{n\tan\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

$\therefore$ 수렴반경 $=1$. 3점

$x=1$ 일 때 : $\tan\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$ 이고,

$\sum\frac{1}{n}$ 발산하므로 $\sum\tan\frac{1}{n}$ 발산. 3점

$x=-1$ 일 때 :

$\sum(-1)^n\tan\frac{1}{n}$: 교대급수, $\tan\frac{1}{n}$: 감소수열, $\lim(\tan\frac{1}{n})=0$

이므로 교대급수 판정법에 의해 수렴. 4점.

$\therefore -1\le x<1$ 일 때 수렴.

(b).

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right|\cdot\frac{n}{n+1}=1$$

∴ 수렴반경 $= \underline{1}$. | 3점

$x=1$ 일 때 : $\sum(-1)^n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$: 교대급수.

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$: 감소수열, $\lim\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0$ 이므로

교대급수 판정법에 의해 $\underline{\text{수렴}}$ | 4점.

$x=-1$ 일 때 : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$.

$\sum\frac{1}{n}$ 은 발산이므로

극한비교판정법에 의해. $\sum\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\underline{\text{발산}}$ | 3점.

∴ $-1<x\leq 1$ 에서 수렴.

#4. $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \int_0^x te^t\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!}$$

$$\Rightarrow (x-1)e^x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!}$$

$x=3$을 대입하면

$$2e^3+1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)\,n!}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)\,n!} = \frac{2e^3+1}{9}$$

※ 적분상수를 고려하지 않고 답을 내면 -5점

#5.

(a). $f'(x) = 1 + h(x) > 0$ 이므로

역함수 정리에 의해 (혹은 순증가함수 이므로)

$f(x)$의 역함수 $g(y)$가 존재한다.

(b). $h(0) = a$, $h'(0) = b$ 이므로

$f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$.

$f'(0) = 1 + a \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{1+a}$.

$f''(0) = b \Rightarrow g''(0) = \frac{-f''(0) \cdot g'(0)}{\{f'(0)\}^2}$

$= \frac{-b}{(1+a)^3}$

∴ $g(y)$의 2차 근사다항식은

$\frac{1}{1+a}x - \frac{b}{2(1+a)^3}x^2$.

※ (a) : 부분점수 없음

(b) : x의 계수 5점.

x^2의 계수 5점.

6번

$$T_2 f(x) = 1 + 5x + 2x^2$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$\Rightarrow f(0) = 1, \quad f'(0) = 5, \quad f''(0) = 4$$ +4

$$g(x) = \log|f(x)| = \log f(x)$$

원점근처에서 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \& \quad g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}$$

$$\Rightarrow g(0) = \log 1 = 0$$

$$g'(0) = \frac{5}{1} = 5$$

$$g''(0) = \frac{4 \cdot 1 - 25}{1} = -21$$ +4

$$\Rightarrow (T_2 g)(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2$$

$$= 5x - \frac{21}{2}x^2$$ +2

7번

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$\Rightarrow f(t) := \int_0^t \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^t (1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots) dx$$

$$= t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^{10}}{10} + \cdots \qquad (|t| < 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.1} \frac{dx}{1+x^3} = f(0.1) = (0.1) - \frac{(0.1)^4}{4} + \frac{(0.1)^7}{7} - \frac{(0.1)^{10}}{10} + \cdots$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{0.1} \frac{dx}{1+x^3} - \left((0.1) - \frac{(0.1)^4}{4} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{(0.1)^7}{7} - \frac{(0.1)^{10}}{10} + \cdots \right|$$

$$\leq \frac{(0.1)^7}{7} \qquad (\because \text{1장 7절 연습문제 3})$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.1} \frac{dx}{1+x^3} \approx 0.1 - \frac{(0.1)^4}{4}$$

- 답이 맞으면 +5
- 이유가 타당하면 +5
- 아이디어는 맞지만 실수있으면 +3 (최대 3점) ex) 적분안하기.

#8.

(a) $f'(x) = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$, $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}$

$\Rightarrow f'(16) = \frac{1}{32}$, $f''(16) = -\frac{3}{2048}$

$\Rightarrow (T_2^{16}f)(x) = f(16) + f'(16)\cdot(x-16) + \frac{1}{2!}f''(16)(x-16)^2$

$= 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2$ 5

※ 계산상의 오류가 있을경우 2점감점

(b) 테일러 정리에 의해, x와 16 사이의 실수 x^*가 있어서

$|f(x) - (T_2^{16}f)(x)| = |(R_2^{16}f)(x^*)|$. 5

그런데, $15 \leq x \leq 17$ 에서

$|(R_2^{16}f)(x^*)| \leq \text{Max}\left\{\frac{|f^{(3)}(x)|}{3!}|x-16|^3 ;\ 15 \leq x \leq 17\right\}$

$\leq \frac{1}{3!}f^{(3)}(15) = \frac{1}{6}\cdot\frac{21}{64}\cdot 15^{-\frac{11}{4}} < \frac{21}{64}\times 10^{-4} < 3.5\times 10^{-5}$.

$\because 15^{-\frac{11}{4}} < 6\times 10^{-4}$

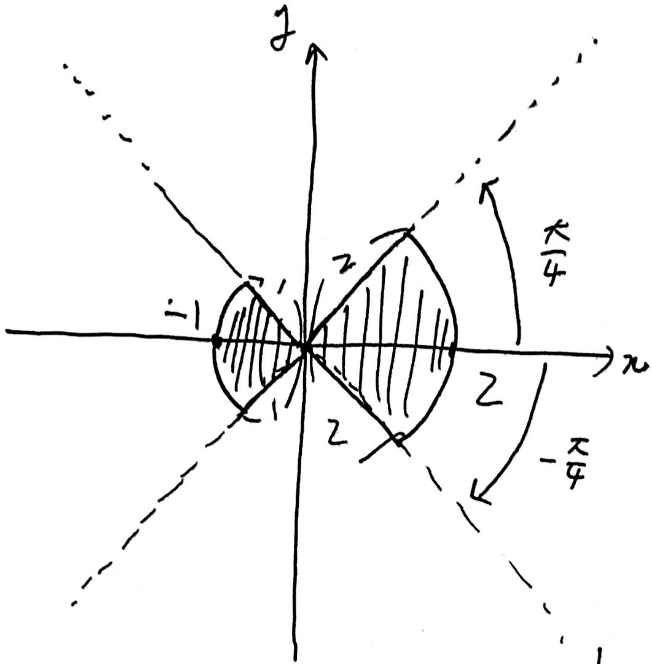
$\because f^{(3)}(x) = \frac{21}{64}x^{-\frac{11}{4}}$ 은 $15 \leq x \leq 17$ 에서 감소하므로,

$\Rightarrow |f(x) - (T_2^{16}f)(x)| < 3.5\times 10^{-5}$. 10 □.

※ 각 단계에서 서술상 틀리거나 모호한 부분이 있으면 각각 2점씩 감점.

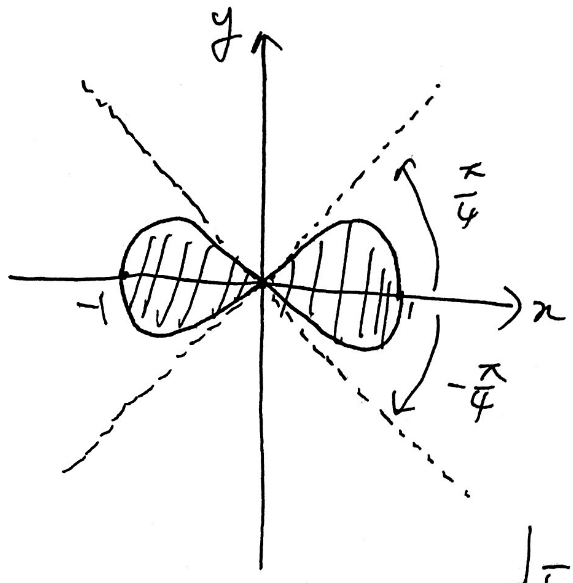
#9.

(a)



5

(b)



5

※ 일부만 그렸거나 (e.g. - 경계만 그리고 내부를 칠하지 않은 경우.),
불필요한 부분을 그렸으면 각각 2점 감점.

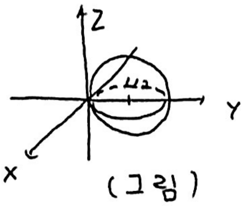
10

(a)

주어진 영역이 구의 내부임을 설명하면 (3점)

$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + z^2 \le \frac{1}{4}$ or

(식)



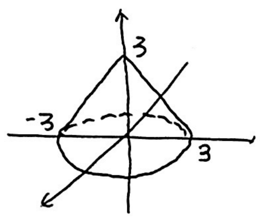
(그림)

구의 부피를 구하면 (2점)

$\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2})^3 = \frac{\pi}{6}$

(b) [풀이1]

주어진 영역의 원뿔의 내부임을 설명하면 (3점)



원뿔의 부피를 구하면 (2점)

$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(9\pi)\cdot 3$

$= 9\pi$

[풀이2]

중적분으로 계산한 경우 (5점)

$\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{3-r} dz\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3-r)\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}(9-\frac{9}{2})\,d\theta$

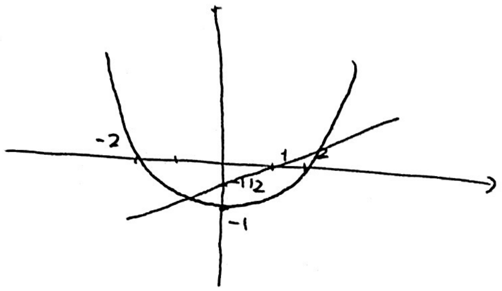
$= 9\pi$

11

직교좌표계의 식으로 나타내면 각각 (2점)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

그래프를 표현하면 각각 (2점)



교점을 구하면 (2점)

$\left(1 - \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(1 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$