2019 - 여름 수학 1

1.

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n-1}{4n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n^2}$

sol) $a_n=\left(\frac{n-1}{4n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n^2}$ 이라 하면, $a_n>0$ $(n\geq 3)$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{4n}\right)\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{4n}\right)\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\cdot e\cdot 1=\frac{e}{4}<1.$$

근 판정법에 의해 수렴 $\lrcorner$ +5

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tanh\frac{1}{n}}{(\log n)^{1.2}}$

sol) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{n}}{(\log n)^{1.2}}}{\frac{\tanh\frac{1}{n}}{(\log n)^{1.2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\tanh\frac{1}{n}}=1$$ 이므로

극한비교판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tanh\frac{1}{n}}{(\log n)^{1.2}}$ 와 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{1.2}}$ 의 수렴성이 같다.

$f(x)=\dfrac{1}{x(\log x)^{1.2}}$ 라 하면 $f(x)>0$, f: 연속함수, 감소함수이므로 ($x\geq 2$ 에서)

적분판정법 사용가능.

$$\int_2^{\infty}f(x)\,dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^{1.2}}\,dx=\left[\frac{1}{-0.2}(\log x)^{-0.2}\right]_2^{\infty}<\infty$$ 에서.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{1.2}}$ 수렴. 따라서 주어진 급수 수렴 $\lrcorner$ +5

(c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\log(n!-2^{n-1})}$

sol) $n\gg 1$ 이면 $n!>2^n$ 따라서, $\log(n!-2^{n-1})>\log(2^n-2^{n-1})=\log 2^{n-1}$.

$a_n=\dfrac{1}{n\log(n!-2^{n-1})}$ 이라 하면, $a_n<\dfrac{1}{n\log 2^{n-1}}=\dfrac{1}{n(n-1)\log 2}$.

$\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\log 2}$ 수렴하고 $a_n>0$ 이므로 비교판정법에 의해 수렴 $\lrcorner$ +5

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

sol) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ 이라 하면, $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

비율판정법에 의해 발산

채점기준)

잘못된 논리를 사용하거나 답이 틀린 경우 0점

부분점수 없음.

2.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right) x^n$

sol) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}\right|}{\left|(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

따라서 수렴반경 $= 1$ ⌋ +4

$x=-1$ 일때. $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} > 0$ 이고 $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ 이므로 비교판정법에 의해 $x=-1$ 일때 수렴 ⌋ +3

$x=1$ 일때 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 은 절대수렴하므로 수렴 ⌋ +3 답은 $-1 \le x \le 1$.

채점기준) 교대급수 정리를 쓸 경우 조건($a_n a_{n+1} < 0$, $|a_n| > |a_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) 체크 안할시 0점.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

sol) $a_n = \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right|}{\left|\frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 3$$

따라서 수렴반경 $= \frac{1}{3}$ ⌋ +4

$x=\frac{1}{3}$ 일때, 주어진 거듭제곱급수 $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 는 교대급수이고, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ 이므로

교대급수 정리에 의해 수렴 ⌋ +3

$x=-\frac{1}{3}$ 일때, 주어진 거듭제곱급수 $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이고, $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n} > 0$ 이며 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 은 발산하므로

비교판정법에 의해 발산 ⌋ +3

답은 $-\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$.

채점기준) 교대급수 정리를 쓸때 세가지 조건을 체크하지 않을 경우 0점.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$

$$\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \Big|_{n}^{n+1}$$

$$= \arctan(n+1) - \arctan(n) \text{ 이므로}$$

5점

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = (\arctan 1 - \arctan 0) + (\arctan 2 - \arctan 1) + \cdots + (\arctan(n+1) - \arctan(n))$$

$$= \arctan(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

5점

4. $f(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\log x$

$$\Rightarrow f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2x}$$

$$= \arctan x + \frac{x^2-1}{2x(1+x^2)}$$

$x \geq 1$ 에서 $\arctan x > 0$, $\frac{x^2-1}{2x(1+x^2)} \geq 0$ 이므로 $f'(x) > 0$ 이다.

$\Rightarrow$ $[1, \infty)$ 에서 $f'(x) \neq 0$ 이므로 역함수 정리에 의해

$x = g(y)$가 $[1, \infty)$ 에서 존재한다. $\rfloor$ +5

$f(1) = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $g(\frac{\pi}{4}) = 1$ 이고,

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2x},$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2x^2}$$ 이므로

$f'(1) = \frac{\pi}{4}$, $f''(1) = 1$ 이다.

$$f(g(x)) = x$$

$$\Rightarrow f'(g(x))\,g'(x) = 1,$$

$$f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))\,g''(x) = 0$$

$x = \frac{\pi}{4}$ 대입

$$\Rightarrow g'(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(g(\frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{\pi}, \rfloor +5$$

$$g''(\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{f''(g(\frac{\pi}{4}))}{f'(g(\frac{\pi}{4}))}(g'(\tfrac{\pi}{4}))^2 = -\frac{f''(1)}{f'(1)}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = -\frac{64}{\pi^3} \rfloor +5$$

채점기준

- 역함수 존재성, $g'(\frac{\pi}{4})$, $g''(\frac{\pi}{4})$ 각 5점.

- 역함수 존재성에서 $f'(x) \geq 0$ 이라고 쓴 경우 점수 없음.

5.

(a) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}} = e^1 = e.$ +5.

or $\lim_{x\to 0^+} \log (1+x)^{\cot x}$

$= \lim_{x\to 0^+} (\cot x)\cdot \log(1+x).$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x(1+x)} = 1$ +2.

$\therefore \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\cot x} = e.$ +3

(b). $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cosh x}{\sinh x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sinh x}{\sinh x + x\cosh x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cosh x}{2\cosh x + \sinh x} = -\frac{1}{2}$ +10.

※ 급수를 이용한 경우, 논리적 오류가 없고 답이 맞아야 +10.

※ 답이 맞는데 유도과정에 약한 오류가 있다면 -3, 과정이 모두 맞고 답에 부호 등 실수가 있으면 -3.

6. (a).

$\boxed{1st}$ $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+5t+6t^2} = \int_0^x \frac{3}{3t+1} - \frac{2}{2t+1}\,dt$.

$$\frac{3}{1+3t} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-3t)^n \quad \left(|t|<\frac{1}{3}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot t^n$$

$$\frac{2}{1+2t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot t^n \quad \left(|t|<\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left[3^{n+1}-2^{n+1}\right]x^{n+1} \; \Big/ \left(|x|<\frac{1}{3}\right) \quad +10,$$

$$\therefore T_3 f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{3}x^3 \quad / +5.$$

$\boxed{2nd}$
$$\frac{1}{1+5x+6x^2} = \frac{1}{1-(-5x-6x^2)}$$
$$= 1 + (-5x-6x^2) + (-5x-6x^2)^2 + \cdots$$

전개하여

$T_3 f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{3}x^3$ (계수당 5점, 총 15점)

$\boxed{3rd}$

$f(0)=0$.

$f'(x) = (1+5x+6x^2)^{-1}$, $f'(0)=1$

$f''(x) = -(1+5x+6x^2)^{-2}(5+12x)$ $\quad f''(0)=-5$

$f^{(3)}(x) = 2(1+5x+6x^2)^{-3}(5+12x)^2 - (1+5x+6x^2)^{-2}\cdot 12$.

$f^{(3)}(0)=38$

$\therefore T_3(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{3}x^3$ (계수당 5점)

※ 미분계수를 모두 구하고 팩토리얼로 나누지 않은 경우 -3.

(b). $\boxed{1st}$ 에서,

$f(x)$ 는 교대급수이므로 교대급수 정리를 이용하면

$$|R_2(0.1)| \le \frac{19}{3} \cdot 0.1^3 < 7 \cdot 0.1^3 = \frac{7}{1000}.$$

$$\therefore f(0.1) \approx 0.1 - \frac{5}{2}(0.1)^2.$$ +10.

※ $\boxed{2nd}$, $\boxed{3rd}$ 풀이로 (a)를 푼 경우,

$f(x)$가 교대급수임을 보이지 않으면 0점.

※ 테일러 정리를 이용하여 오차에 관한 참인 명제를 세우면 3점.

실제로 Max of Upper bound를 구하여 오차까지 맞게 구하면 +7점.

※ 근사값 쓰지 않은 경우 −2.

※ (수렴범위) ∋ 0.1 이 명시되어 있지 않으면 −2.

7. $\int_0^x \frac{\sinh t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

테일러 정리에 의해

$$R_{2n}(1) = \frac{f^{(2n+1)}(x_*)}{(2n+1)!}$$

를 만족하는 $x_* \in (0,1)$이 존재한다.

$$f^{(2n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2n+1+2k)(2k)!}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2n+1)(2k)!} = \frac{\cosh x}{2n+1} \text{ 이므로}$$

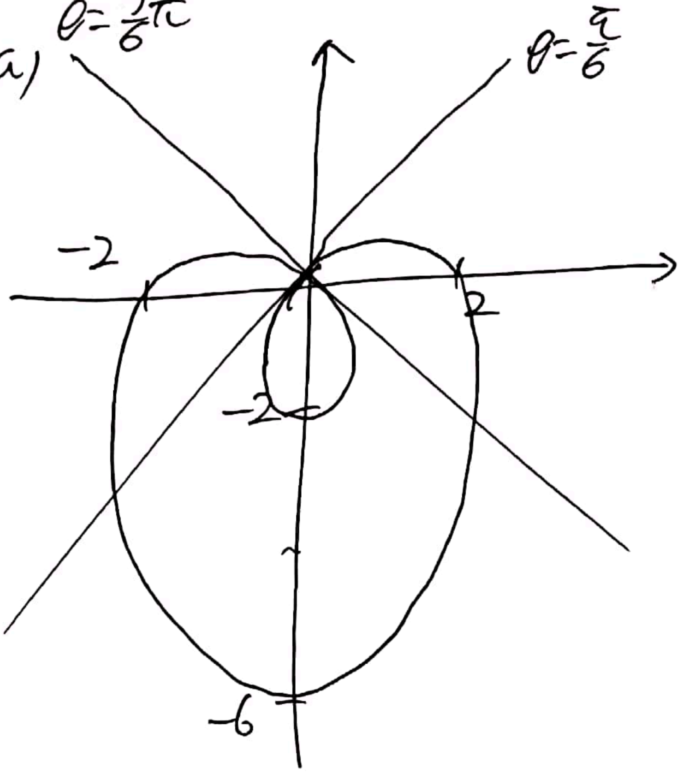
$$R_{2n}(1) \le \frac{\cosh x_*}{(2n+1)(2n+1)!} < \frac{\cosh 1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$n=3$ 이면 $\frac{\cosh 1}{5\cdot 5!} < 10^{-3}$ 이므로,

$$\int_0^1 \frac{\sinh x}{x}\,dx \approx 1 + \frac{1^3}{3\cdot 3!} + \frac{1^5}{5\cdot 5!}$$

※ 근삿값이 맞으면 6점,
테일러 정리나 적당한 부등식을 이용,
근삿값을 논리적으로 구하면 +4점.

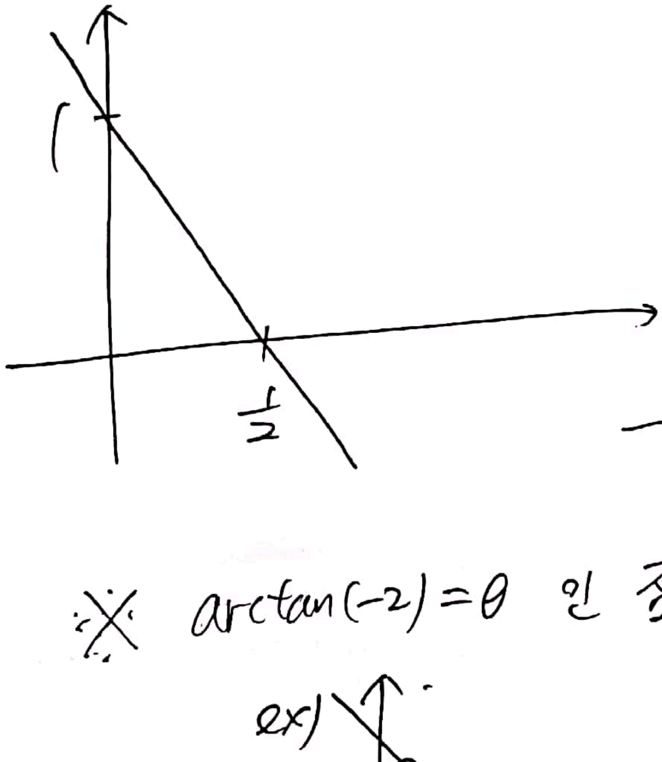
8. (a)



※ 개형 5점, 절편 5점

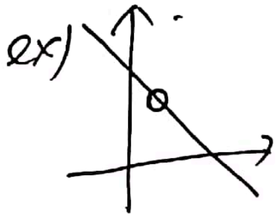
(하나 틀리면 -2, 두 개 이상 -5)

(b).



+5.

※ $\arctan(-2)=\theta$ 인 점을 제외하면 -2.



두 점 이상 제외하면 0점.

9. $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$

$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$

$z = \rho \cos\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\rho^2$,

$z^2 = \frac{3}{4}\rho^2$ $\therefore 3r^2 = z^2$ . ...①

$\rho = 4\cos\varphi$

$\Rightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\varphi$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

$\therefore r^2 + z^2 = 4z$ . ...②

②에 ① 대입 ⇒ $\frac{4}{3}z^2 = 4z$

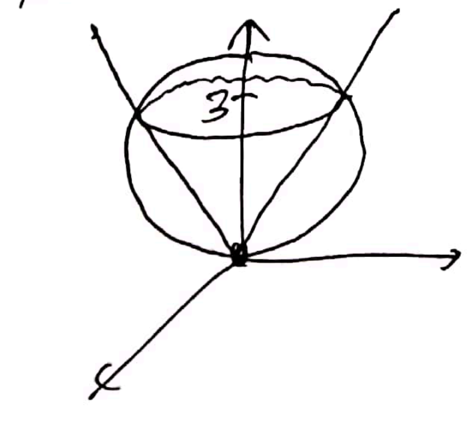
$\Rightarrow z^2 = 3z$

$\therefore \begin{cases} z = 0 \\ r = 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} z = 3 \\ r = \sqrt{3} \end{cases}$.

∴ 교점의 집합은 $\{(\sqrt{3}, \theta, 3) \mid 0 \le \theta \le 2\pi\} \cup \{(0, \theta, 0)\}$

※ 그림을 이용하여 교점의 집합이 원과 원점임을 보이고,

이 원을 $r=3$, $z=\sqrt{3}$ 으로 표현해도 인정



※ 원점 언급 없으면 -3.

원기둥 좌표계로 표현하지 않으면 -3