

(a). $x > 1$ 에서 $\log x \leq 2\sqrt{x}$ 이므로, $0 \leq \frac{(\log n)^3}{n^3} \leq \frac{8}{n^{3/2}}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{3/2}}$ 는 수렴하므로, 비교판정법에 의해 수렴.

(b). $0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum \frac{1}{n^2}$ 는 수렴하므로,

비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ 는 수렴하고, 절대수렴하는 급수는

수렴하므로 무한 급수도 수렴.

(c). $a_n = (1 - \sinh \frac{1}{n})^{n^2}$ 로 하면, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sinh \frac{1}{n})$

$= \frac{1}{e}$ 이므로 멱근 판정법에 의하여 수렴.

(d). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \cos \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ 이며

$\sum \frac{1}{n}$ 이 발산하므로, 극한비교판정법에 의해 발산.

(차정기준).

각 소문항변 부분정수 없음, ϵ

등린 논리가 사용된 경우 0점. 등린 등리의 예는 아래에 서술.

(1) $a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(2) " $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ 이므로 비교판정법에 의해 수렴"

(3) 모든 n 에 대하여 $(\log n)^3 < n$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n \approx \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^n \Rightarrow \sum a_n^n \approx \sum b_n^n$

2. $\sum_{n=3}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) x^n$ 이 수렴하는 범위?

① $a_n := n^{\frac{1}{n}} - 1$.

\Rightarrow 수렴반경을 r 이라 하면,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - 1}{n^{\frac{1}{n}} - 1}$$

이 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$ ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$)

② $f(x) := x^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{\log x}{x}} - 1$ 이라 할 때

$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \cdot e^{\frac{\log x}{x}}$ 이므로, 로피탈 정리에 의해

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n+1)}{f'(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \log(n+1)}{1 - \log n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{1} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{aligned}$$

$\therefore r = 1$, $\frac{r}{x} < 1$ 일 때 구어진 근수는 수렴
 $|x| > 1$ 일 때 발산.

② $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 > \frac{1}{n}$ ($\because n > 1$ 이면 $n > (1 + \frac{1}{n})^n$)

$0 < \frac{1}{n}$ 이고, $\sum \frac{1}{n} = \infty$ 이므로 $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \infty$

$\therefore x = 1$ 일 때 발산

③ $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} < 0$ if $x > 3$

$\Rightarrow a_n > a_{n+1} > 0 \forall n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$

교대급수 판정법에 의해, $\sum_{n=3}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) (-1)^n < \infty$

$\therefore x = -1$ 일 때 수렴.

기준) ①, ②, ③ 각 5점. ①에서 수렴반경 구하는 과정이 잘못되면 5점
 로피탈 정리, 교대급수 정리의 조건 언급 없으면 2점 감점

3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n = \frac{1}{1+X}$ ($|X| < 1$) 이므로

양변을 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} X^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n = \log(1+X) \quad (|X| < 1)$$

을 얻는다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{3^n} = \log \frac{4}{3}$ 이다. \downarrow (+5)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$ ($|X| < 1$) 이므로 양변을 두 번 미분하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} n X^{n-1} = \frac{1}{(1-X)^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) X^{n-2} = \frac{2}{(1-X)^3} \quad (|X| < 1)$$

을 얻는다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 X^n = \frac{2X^2}{(1-X)^3} + \frac{X}{(1-X)^2}$ ($|X| < 1$)

이고, $X = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$ 이다. \downarrow (+5)

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$ ($|X| < 1$) 이므로 양변을 두 번 적분하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} X^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} X^{n+1} = (1-X) \log(1-X) + X \quad (|X| < 1)$$

를 얻는다. $X = \frac{1}{2}$ 을 대입하고, 양변에 2를 곱하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \log 2 \quad \text{를 얻는다.} \downarrow (+5)$$

* 등비급수의 수렴 반경을 명시하지 않은 경우 2점 감점.

* 다른 방법으로 수렴 여부를 판정한 경우, 조건과 판정법의 이름을 모두 정확히 서술한 경우에만 +2점.

4.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{(n+1)h_n}}{1} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \infty \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| = 1 \text{ 이다. } \quad \left. \begin{array}{l} \text{따라서 수렴반경은 1이다.} \\ \text{+6} \end{array} \right\}$$

$$x=1 \text{ 일 때 : } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \infty \text{ 이므로 일반항 판정법에 의해 } \left. \begin{array}{l} \text{발산} \\ \text{+2} \end{array} \right\}$$

$$x=-1 \text{ 일 때 : } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n h_n \neq 0 \text{ 이므로 일반항 판정법에 의해 } \left. \begin{array}{l} \text{발산} \\ \text{+2} \end{array} \right\}$$

* 경계 판정의 경우 답 1점, 과정 1점으로 채점한다.

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n \text{ 이라 하자.}$$

$$f(x) - x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

$$\therefore f(x) = \frac{-\log(1-x)}{1-x} \text{ 이다. } \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{+8} \end{array} \right\} \quad (|x| < 1).$$

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ 이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \log 4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{+2} \end{array} \right\}$$

* 합의 재배열을 이용한 경우 "양항급수" 또는 "절대수열성" 을 언급하리
않은 경우 2점 감점

* 항수를 구하는 과정 등에서 사소한 실수가 있는 경우 2점 감점.

5(a) $f'(x) = \cosh x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ 이므로
 (또는 $\sinh x$ 이 증가 $\rightarrow \sinh^{-1} x$ 도 증가이므로)
 역함수 정리에 의해 역함수가 존재한다.

┆+5*₁

$$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} \quad \text{┆+2}$$

$$g''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3} \quad (\text{or } g''(y)(f'(x))^2 + g'(y)f''(x) = 0) \quad \text{┆+3*}_2$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow g''(0) = 0$$

*₁ $f'(x)$ 이 틀린 경우 전체 0점

*₂ $g''(0)$ 의 값이 틀려도 $g''(y)$ 의 식이 맞으면 3점.

설명 부족/식 오류시 $g''(0)$ 이 맞아도 0점

$$(b) T_2 g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2!} y^2$$

$$= \frac{1}{2} y \quad \text{┆+2점*}_2$$

┆+3*₁

*₁ 답이 틀려도 3점 가능

단, y를 x로 잘못 표기한 경우 점수 X

*₂ (a)에서 식이 틀리면 0점 ($f'(x), f''(x)$ 포함)

#6. $\log(1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1 - \arctan x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1 - \arctan x)$ 이므로, 로피탈 정리를 사용함 \uparrow 5점

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \arctan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{1 - \arctan x} = -1$ 이다 \uparrow 8점

따라서, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ 또는 $\frac{1}{e}$ 이다 \uparrow 10점.

* 로피탈 정리를 적용하였으나, 미분을 잘못했거나 극한값을 잘못 구하는 경우 5점

예) $(\arctan x)' \neq \frac{1}{1+x^2}$ 인 경우, 부호 실수 등.

* $(1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = (1 - \arctan x)^{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{\arctan x}{x}}$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{\arctan x}} = \frac{1}{e}$ 이고 \uparrow $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$ 이므로 \uparrow

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$ 이다. 5점 10점

(이 경우, 답만 틀렸을 경우 8점).

* 리타행식으로 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$ 으로 구한 경우 8점

(이 경우, 리타 내용 없이 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$ 를 주장할 때 0점)

* 로피탈 정리를 잘못 적용 ($\frac{0}{0}$ 아 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 아닐 때 사용), log를 잘못 쓰일 경우,

백지, 답만 구한 경우 0점.

문제 7.

라다항식의 존재성과 유일성에 의해 $f(x) = 1, f'(x) = 2, f''(x) = 8x + 4$.

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ 이라 하면 } g'(x) = \frac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2}, g''(x) = \frac{-f''(x) \cdot f(x) + 2 \cdot \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^3} \text{ 이므로}$$

$$g(0) = 1, g'(0) = -2, g''(0) = 0.$$

따라서, 라다항식의 존재성과 유일성에 의해 $g(x)$ 의 2차 라다항식은

$$g(x) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 = (1 - 2x) + 0.$$

B1) $f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + R_2 f(x)$ 라 하면 ($R_2 f(x) = o(x^2)$)

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 + 2x + 4x^2 + R_2 f(x)}$$

$x=0$ 근방에서 $|2x + 4x^2 + R_2 f(x)| < 1$ 이므로 이 경우

$$g(x) = \frac{1}{1 - (-2x - 4x^2 - R_2 f(x))} = 1 + (-2x - 4x^2 - R_2 f(x)) + (-2x - 4x^2 - R_2 f(x))^2 + \dots$$
$$= (1 - 2x + o(x^2)).$$

라다항식의 유일성에 의해 $g(x)$ 의 2차 라다항식은 $(1 - 2x) + 0$.

* $|2x + 4x^2 + R_2 f(x)| < 1$ 가 $x=0$ 근방에서 f 보다 작다는 것을 증명하지 않았다면 -5점.

$$8. \log(x) = \log(11 + (x-11))$$

$$= \log 11 + \log\left(1 + \left(\frac{x-11}{11}\right)\right)$$

$$= \log 11 + \frac{1}{11}(x-11) - \frac{1}{2 \cdot 11^2}(x-11)^2 + \frac{1}{3 \cdot 11^3}(x-11)^3 - \dots$$

$$= \log 11 + \frac{1}{11}(x-11) - \frac{1}{242}(x-11)^2 + \frac{1}{3993}(x-11)^3 - \dots$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{p(x)}$$

* $p(x)$ 의 각 항마다 2점. (2점 \times 4 = 8점)

여기서 "항"이란 $C_n(x-11)^n$ 꼴을 의미한다. (0로 전개시 0점처리)

* 약분을 하지 않아도 관대하게 정답처리 (ex. $\frac{1}{3993} = \frac{2}{7986}$)

* $(x-11)^4$ 이상의 항 혹은 $O((x-11)^3)$ 을 적어도 정답처리

* 무분으로 작성구한 경우에도 정답처리.

중 테일러 정리, $\log x - p(x) = \frac{f^{(4)}(x_*)}{4!} (x-11)^4$ 인 x_* 가 11과 x 사이에 존재.

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \text{ 이므로 } |f^{(4)}(x_*)| \leq \frac{6}{10^4} \quad (\because x_* \in [10, 12])$$

$$\Rightarrow |\log x - p(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{6}{10^4} \cdot 1^4 \quad (\because x \in [10, 12])$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 10^4}$$

□

* 교대급수 사용시 구간 $x \in [10, 12]$ 에서 증명시 0점.

($x \in [11, 12]$ 에서 교대급수 성질 사용후 $x \in [10, 11)$ 에서 옳게 풀면 점수 인정)

* 풀이는 틀렸으나 테일러 정리를 잘 사용한 경우. $|R| = \frac{|f^{(4)}(x_*)|}{4!} (x-11)^4$ 이
언급되면 2점.

* 오차의 부호를 실수하면 점수 없음.

* $M_n f(x)$ 의 정의 및 정의역-값은 실수 ($\neq \mathbb{R}$) 는 값점 없음.

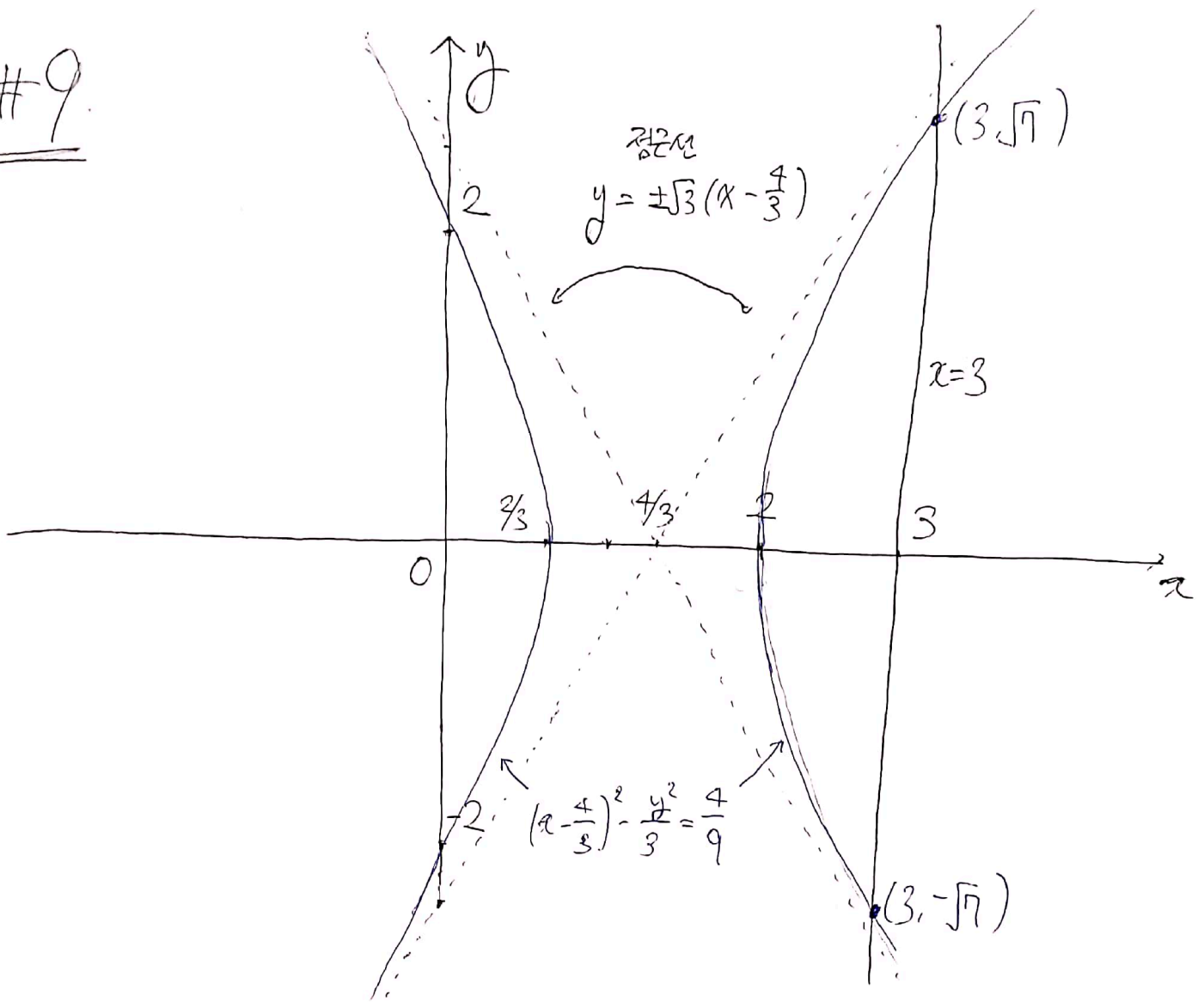
* 예러항 R 에서 $(x-11)^4$ 의 근적 ($(x)1^4, (-1)^4, \dots$) 등이
없으면 점수 없음

* $-\frac{6}{2^4}$ 의 최대값이 $-\frac{6}{10^4}$ 이라는 말 언급시 점수 없음.

(절댓값의 최대값이라 써야함)

* 비약이 심한 경우 점수 없음.

#9



• $r = 3 \sec \theta \Leftrightarrow x = r \cos \theta = 3$ (5 pts)

• $r = \frac{1}{\frac{1}{2} + \cos \theta} \Leftrightarrow r = 2 - 2r \cos \theta = 2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 = (2 - 2x)^2$
 $\Leftrightarrow (x - \frac{4}{3})^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{9}$ (5 pts)

• 교점: $x = 3, (x - \frac{4}{3})^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = 3, y^2 = 7 \Rightarrow (3, \pm\sqrt{7})$ (5 pts)

• 세 운항 모두 부분점수 있음.

• 쌍곡선의 경우, 좌우대칭의 형태를 가지고 정확히 만나는 두 점이 원점과 (3,0) 사이에 있는 경우 정답으로 인정.

- 쌍곡선의 형태에서 크게 벗어난 경우 정답으로 인정하지 않음.

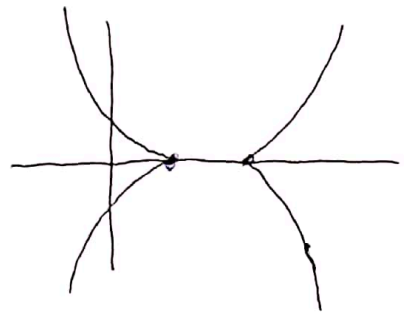
- 정답으로 인정하지 않는 몇몇 유형을 다음 페이지에 첨부함.

• 교점의 경우, 직교할지거나 극좌표계 중 하나라도 알지 못했더라도 정답으로 인정.

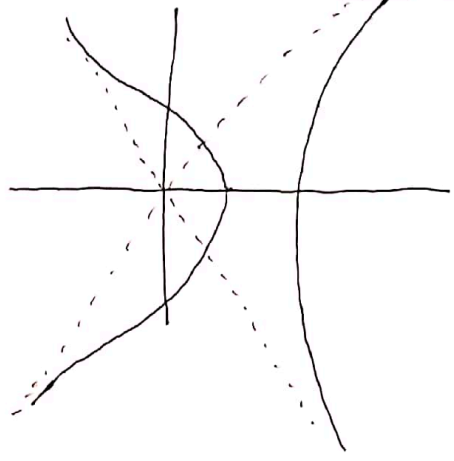
- arccos 함수를 두 값을 가지고 해석한 답안의 경우 인정하지 않음.

• 몇몇 유형들 :

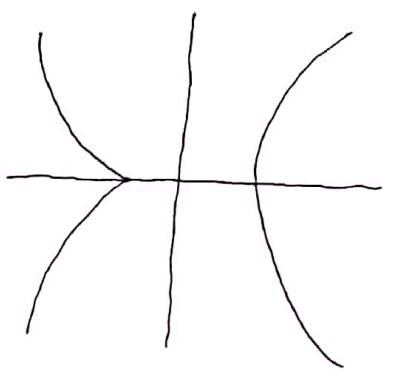
① 침침이 있음.



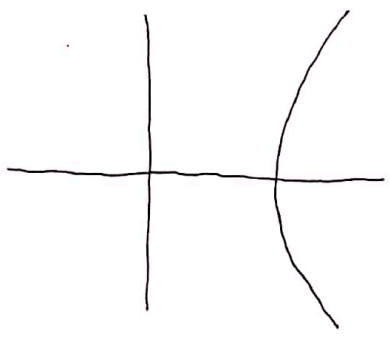
② 점근선 (원뿔 지나는 직선들) 잘못 생각.



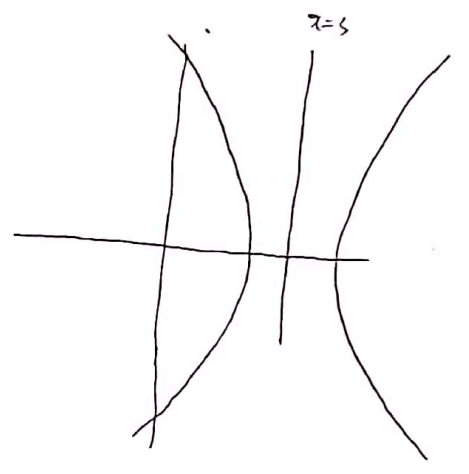
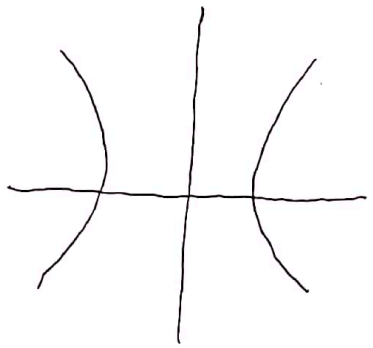
③ 비대칭



④ 한 쪽만 있음.



2절면
⑤ 위치 틀림.



#10.

$$(a) \rho = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \varphi$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 7$$

• $z > 0$ 과 같은 조건을 덧붙여 원점이 누락된 경우 -2.

• 그 외 부분점수 없음.

$$(b) \varphi = \arctan 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \rho \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2z)^2 + 5$$

$$(\text{단, } \rho \geq 0 \text{ 이므로 } z \geq 0) + 3$$

• $(z > 0)$ 과 같이 쓴 경우에도 3점 획득 X.

• $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 2$ 와 같이 쓴 경우, $\left. \begin{array}{l} \text{원점 언급이 있을시} \\ \text{아닌 경우} \end{array} \right\}$ 8점 / 5점.