

수학 및 연습 1 중간고사
(2018년 7월 9일 오전 11:00 - 오후 1:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [10점] 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

문제 2 [20점] 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \sin \frac{1}{n^2}\right) x^n$

(b) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^{10}}$

문제 3 [20점] 다음 급수의 합을 구하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)! 2^n}$

문제 4 [15점] 수열 (a_n) 이

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족하고, 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재한다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 의 수렴반경을 구하시오.

(b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{3^n}$ 의 값을 구하시오.

(Hint: 점화식을 이용하여 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 가 만족하는 방정식을 구해 본다.)

문제 5 [10점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \searrow 0} (\tan x)^x$$

문제 6 [15점] 다음 물음에 답하시오.

(연습용 여백)

(a) (5점) $x > 0$ 일 때 다음을 보이시오.

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) \right| \leq \frac{x^3}{16}$$

(b) (10점) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ 의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{100}$ 이내가 되도록 구하시오.

(단, 근삿값은 유리수로 구하시오.)

문제 7 [15점] 원점에서의 함수 $f(x) = \frac{\arctan x}{1+2x}$ 의 5차 근사다항식 $T_5 f(x)$ 를 구하시오.

문제 8 [10점] 함수 $f(x) = \sinh x + \cosh x + \tanh x$ 는 모든 실수 y 에 대하여 역함수 $g(y)$ 가 정의됨을 보이고, $y = 1$ 에서의 $g(y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 9 [10점] 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 표현된 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

$$\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right), \left(4, \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right)$$

문제 10 [10점] 자연수 n 에 대하여, 극좌표계로 주어진 두 곡선 $r = 1 + \cos \theta$ 와 $r = n \cos \theta$ 의 교점의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(n)$ 을 구하시오.

문제 11 [15점] 극좌표계로 주어진 두 곡선 $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 두 곡선을 직교좌표로 나타내고, 두 곡선을 하나의 좌표평면에 그리시오.

(b) (5점) 두 곡선의 교점을 직교좌표로 나타내시오.