2018년 여름 계절학기 수학및 연습 I 중간고사

#1. $a_n := (1-\frac{1}{n})^{n^2} \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)$$

$$= 1/e < 1$$

∴ 거듭제곱근 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

#2. (a) $a_n := \sin\sin\frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\sin\frac{1}{(n+1)^2}}{\sin(\frac{1}{(n+1)^2})} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{(n+1)^2})}{\frac{1}{(n+1)^2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\sin\sin\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= 1$$

∴ 수렴반경 $R=1$ $\rfloor +4$

(i) $x=1$: $y \geq 0$ 일 때 $0 \leq \sin y \leq y$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin\sin\frac{1}{n^2} \leq \sin\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum\frac{1}{n^2}$ 은 수렴하므로, 비교판정법에 의해 $\sum \sin\sin\frac{1}{n^2}$ 도 수렴한다. $\rfloor +3$

(ii) $x=-1$: (i)에 의해 $\sum\sin\sin\frac{1}{n^2}$ 이 수렴하므로.

$\sum (-1)^n \cdot \sin\sin\frac{1}{n^2}$ 도 수렴한다.

(절대수렴하는 급수는 수렴한다.) $\rfloor +3$

∴ 주어진 급수는 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 수렴한다.

(b) $a_n := \frac{1}{(\log n)^{10}} \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^{10} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}}\right)^{10} = 1$$

∴ 수렴반경 $R=1$ ⌟ +4

(i) $x=1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{10}}{n} = 0$ 이므로 자연수 N이 존재해서

$n \geq N \Rightarrow n > (\log n)^{10}$ 임을 알 수 있다.

∴ $\sum \frac{1}{n} = \infty$ 에서 $\sum \frac{1}{(\log n)^{10}} = \infty$ 를 얻는다.

(유한 개의 항은 급수의 수렴·발산에 영향을 끼치지 않는다.) ⌟ +3

(ii) $x=-1$: $\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^{10}}$

① 위 급수는 교대급수

② $\frac{1}{(\log n)^{10}} > \frac{1}{(\log(n+1))^{10}}$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log n)^{10}} = 0$

교대급수 판정법에 의해 수렴한다. ⌟ +3

∴ 주어진 급수는 $-1 \leq x < 1$ 에서 수렴한다.

※ 수렴반경을 구하는 과정에 설명이 부족하면 2점 감점.

#3. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

① $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$

② $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$

$\overset{\text{적분}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = -\log(1-x) \quad (|x|<1) \quad \cdots\cdots *$

$x=\frac{3}{4}$: $\log 4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\therefore$ 답 : $3+\log 4$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1-1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\right)$

① $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \cdots\cdots **$

$x=\frac{1}{2}$; $\sqrt{e}-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}$

② $\frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} \quad \cdots\cdots ***$

$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

$x=\frac{1}{2}$: $2\sqrt{e}-3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}$

$\therefore$ 답 : $2-\sqrt{e}$

※ *, **, *** 와 같은 적절한 식이 있으면 +5점.
이후에 계산이 정확하여 답이 맞으면 +5점.

4 (a). $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재하므로, $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 으로 하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{\alpha}.$$

$a_0 > 0$, $a_1 > 0$ 이므로 모든 n에 대해서 $a_n > 0$ 이고, $\alpha > 0$ 이다. 그러므로 $\alpha = 1+\sqrt{2}$ 이며, 정리 2.1.5에 의하여 수렴반경은 $\sqrt{2}-1$ 이다.

채점기준: 답이 맞으면 5점, 틀리면 0점.

(b). $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 으로 하면, $|x| < \sqrt{2}-1$ 에서

$$(1-2x-x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$$

$$= 1$$

이므로 $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$ 이다. 이 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot f'\left(\frac{1}{3}\right) = 18 \text{ 이다.}$$

채점기준: $f(x)$를 맞게 구하면 5점,

답이 맞으면 5점 추가.

5. $\lim_{x \searrow 0} (\tan x)^x$

$$= \lim_{x \searrow 0} e^{x \log \tan x}$$

$$= e^{\lim_{x \searrow 0} x \log \tan x}$$

그런데, $\lim_{x \searrow 0} x \log \tan x$

$$= \lim_{x \searrow 0} \frac{\log \tan x}{1/x}$$

$$= \lim_{x \searrow 0} \left(- \frac{x^2 \sec^2 x}{\tan x} \right) \quad (\because \text{로피탈 정리})$$

$$= 0$$

이므로 구하는 극한값은 1이다.

채점기준 : 지수로 바꿔서 로피탈 정리를 쓰는 경우 5점,

최종 답이 맞으면 5점 추가.

6 (a)

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \quad \cdots$$

$f(x)$의 2차 테일러 전개:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(t)}{3!}x^3, \quad t \in [0, x].$$

$$|T_2 f(x) - f(x)| \le \frac{M_2}{6}|x|^3, \quad M_2 = \max_{0 \le t \le x} |f'''(t)|$$

$f'''(x)$는 $x \ge 0$ 에서 감소함수 이므로 $M_2 = |f'''(0)| = \frac{3}{8}$,

$$|T_2 f(x) - f(x)| \le \frac{x^3}{16}, \quad T_2 f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

- 근사식을 정확히 유도하면 (+3 점)
- 오차항을 정확히 유도하면 (+2 점)

(b) (a)에 의하여 $\left| \sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)\right| \le \frac{x^3}{16}$, $x>0$.

x에 x^2을 대입 : $\left| \sqrt{1+x^2} - \left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)\right| \le \frac{x^6}{16}$, $x>0$

$1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$ 를 적분하면 $x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}$ 이므로

$$\left| \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt - \left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}\right)\right| = \left| \int_0^x \sqrt{1+t^2} - \int_0^x \left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)dt \right|$$

$$= \left| \int_0^x \left(\sqrt{1+t^2} - \left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)\right)dt \right| \le \int_0^x \left| \sqrt{1+t^2} - \left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)\right| dt$$

$$\le \int_0^x \left|\frac{t^6}{16}\right| dt = \int_0^x \frac{t^6}{16}\,dt = \frac{1}{112}x^7.$$

$x=1$ 대입시

$$\left| \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt - \left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{40}\right)\right| \le \frac{1}{112} < \frac{1}{100}$$

근사값 : $1+\frac{1}{6}-\frac{1}{40} = \frac{137}{120}$, 오차 $\le \frac{1}{112} < \frac{1}{100}$.

7. $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots$, $|t|<1$. 이므로,

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$, $|x|<1$. … 5점

$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - \cdots$, $|x| < \frac{1}{2}$. … 5점

$$\frac{\arctan x}{1+2x} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\left(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5 + o(x^6)\right)$$

$$= x - 2x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{22}{3}x^4 + \frac{223}{15}x^5 + o(x^5)$$

근사다항식의 유일성에 의해,

$T_5 f(x) = x - 2x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{22}{3}x^4 + \frac{223}{15}x^5$. … 5점

※. $\arctan x$, $\frac{1}{1+2x}$ 의 거듭제곱급수의 수렴범위가 명시되지 않은 경우, 각각 1점 감점.

8. $f(x) = \sinh x + \cosh x + \tanh x$

$= e^x + \tanh x$

$f'(x) = e^x + \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

혹은, $= e^x + \operatorname{sech}^2 x = e^x + 1 - \tanh^2 x$.

$f'(x) > 0$ 이므로,

f는 순증가 함수이므로 일대일이다.

따라서 $f^{-1} = g$ 가 존재한다. ┘ +5점

$g(f(x)) = x$ 에서

$g'(f(x))f'(x) = 1$. $g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x) = 0$ 에서

$g'(1) = \frac{1}{2}$ $g''(1) = -\frac{1}{8}$.

$T_2: g(y) = g(1) + \frac{g'(1)}{1!}(y-1) + \frac{g''(1)}{2!}(y-1)^2$.

$= \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{16}(y-1)^2$. ┘ +5점

※. f'을 구하여 f^{-1}의 존재성을 정확히 보이지 않으면

점수 없음.

9. $P = (4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 를 직교좌표계로 표현하면

$z = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$

$x = 4\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2$

$y = 4\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2$

$\therefore P = (2, 2, 2\sqrt{2})$

$q = (4, \frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{4})$ 를 직교좌표계로 표현하면

$z = 4\cos\frac{7}{12}\pi = -4\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ $\left(\because \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$x = 4\sin\frac{7}{12}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}+1$

$y = 4\sin\frac{7}{12}\pi \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}+1$

$\therefore q = (\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1, \sqrt{2}-\sqrt{6})$

P, q 사이의 거리$^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

$= 16$

$\therefore$ 거리 $d = 4$.

P, q 를 직교좌표계로 모두 바꾸면 5점

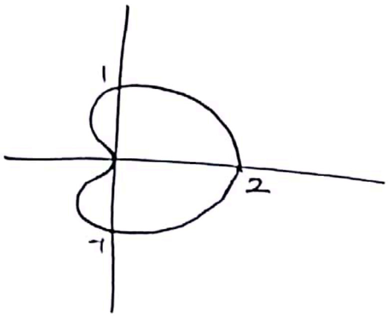
거리를 올바르게 계산하였으면 5점.

($\sin\frac{7}{12}\pi$ 를 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 으로 계산하지 않아도 감점 없음)

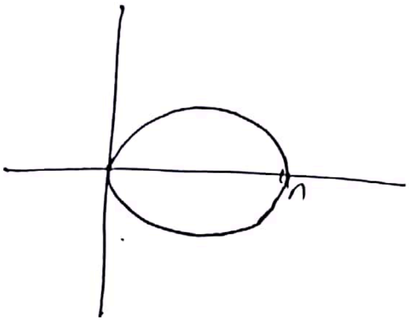
별해

O, P, q 가 정삼각형을 이루는 것으로 답을 구하면 10 점. 틀리면 0 점.

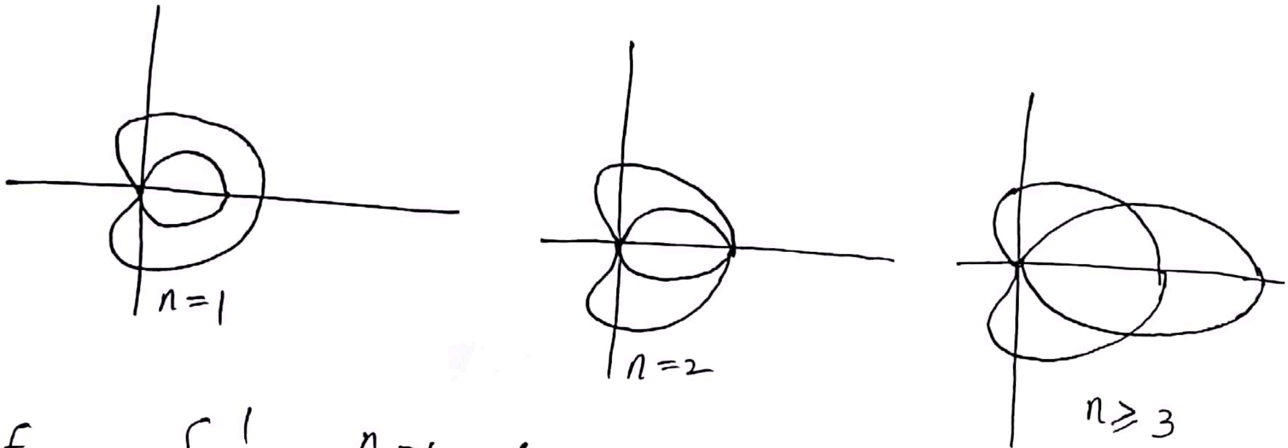
10. $r = 1+\cos\theta$ 의 개형은 그리면



$r = n\cos\theta$ 의 개형은 그리면



∴



$$f(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \quad (3\text{점}) \\ 2 & n=2 \quad (3\text{점}) \\ 3 & n\geq 3 \quad (4\text{점}) \end{cases}$$

11. (a) $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$

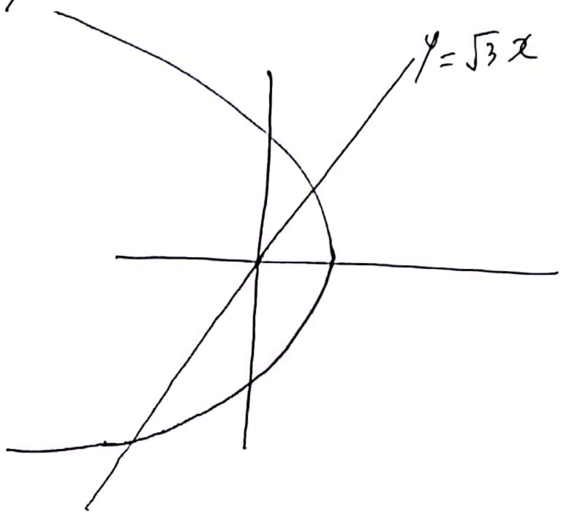
$\Leftrightarrow r + r\cos\theta = 1$

$\Leftrightarrow r = 1 - x$

$\therefore r^2 = x^2 + y^2 = (1-x)^2$

$y^2 = -2x + 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x$.



$y^2 = -2x+1$ 의 식과 그래프를 구했으면 5 점

$y = \sqrt{3}x$ 〃 〃

(b) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y^2 = -2x+1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0.$

$(3x-1)(x+1) = 0$

$x = -1$ or $\dfrac{1}{3}$

$y = -\sqrt{3}$ or $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

교점 : $(-1, -\sqrt{3})$, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

교점 둘을 모두 구하지 못하면 0 점.