

수학 및 연습 1 중간고사
(2018년 4월 21일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1 [15점] 다음 급수의 수렴여부를 판정하시오.

- (a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
- (b) (5점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\arctan \frac{1}{n})}{\log n}$
- (c) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(1 - \frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2019}}\right)$

문제 2 [15점] 다음 급수의 수렴여부 및 절대수렴여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

문제 3 [15점] 급수

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$$

이 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

문제 4 [15점] 함수 $f(x) = \log(1 - x + x^2)$ 에 대하여 $f(0.1)$ 의 근삿값을 오차가 10^{-5} 이내가 되도록 구하시오.

문제 5 [15점] 거듭제곱급수로 주어진 함수

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n \quad (0 \leq x < 1)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (7점) $0 < x < 1$ 이면 $\frac{1}{2} < f'(x) < 1$ 임을 보이시오.
- (b) (8점) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\sin \frac{1}{n}\right)$ 은 발산함을 보이시오.
(힌트: 평균값 정리)

문제 6 [15점] $y = \sinh x$ 의 역함수를 $x = \sinh^{-1} y$ 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(a) (7점) 함수

$$h(y) = \frac{d \sinh^{-1} y}{dy}$$

를 y 에 관한 식으로 나타내시오.

(b) (8점) $f(x) = (x + x^2) \sinh^{-1}(x - x^2)$ 의 원점에서의 5차 근사다항식을 구하시오.

문제 7 [15점] $\frac{1}{1+x^2}$ 의 거듭제곱급수전개를 이용하여 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\frac{1}{3^k}\right)$$

문제 8 [15점] 테일러 정리를 이용하여 \sqrt{e} 의 근삿값을 오차가 10^{-3} 이내가 되도록 구하시오.
(단, 근삿값은 유리수로 구하시오.)

문제 9 [15점] 극좌표계로 다음과 같이 주어진 곡선의 개형을 그리시오.

(a) (7점) $r = 1 + 2 \sin \theta$

(b) (8점) $r^2 = \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

문제 10 [15점] 삼차원 좌표공간에 곡면 A 와 B 가 다음과 같이 주어져 있다.

곡면 A : 원기둥좌표계 (r, θ, z) 로 $r^2 = \frac{1}{1-4z}$

곡면 B : 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 $\rho = \frac{1}{2+2\cos\varphi}$

이때, 두 곡면의 교집합은 곡선이다. 이 곡선의 길이를 구하시오.