2018년 1학기 수학 및 연습 1 중간고사 예시답안

1. 급수의 수렴여부 판정

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$, $a_n > 0$

$a_{n+1}/a_n = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{3^n n!}{n^n} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} 3 \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{3}{e} > 1$

$\therefore$ 비율 판정법의 따름정리에 의해 급수는 발산한다

5

※ $2 < (1+\frac{1}{n})^n < 3$ 이 모든 n에 대해 성립하므로

$3 \frac{1}{(1+1/n)^n} > 1$ 이 모든 n에 대해 성립.

$\therefore$ 비율판정법에 의해 발산한다고 해도 정답

※ 극한 값을 정확히 구해야 함.
부분점수 없음

#1 -(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right)}{\log n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sin(\arctan \frac{1}{n})}{\log n}}{\dfrac{1}{n\log n}} = 1$ 이므로 극한비교 판정법에 의해

준 급수의 수렴성은 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ 의 수렴성과 같다.

이는 적분판정법에 의해 발산 ┘ 5

(채점기준)

$\left.\begin{array}{l} \sin x \geq \frac{2}{\pi} x \\ \arctan x \geq \frac{\pi}{4} x \end{array}\right) \quad x \in [0,1]$

임을 이용한 경우 부등호의 상수가 틀릴 경우 2점 감점 (−2)

#1 - (c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\left(1-\frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2019}}\right)$$

$a_n = \left(1-\frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2019}}$ 이라 하면

$0 < a_n < 1$ 이므로

$\sin a_n \leq a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^{2018}}\right)^{n^{2018}} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로 거듭제곱근 판정법의 따름 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

∴ 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n < \infty$ 5

※ 부등식을 정확히 쓰고 $\Sigma a_n < \infty$ 임을 밝히면 5점.

부분점수 없음

문제 2.

$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ 이라고 하자.

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \geq 0$ 이다.

① $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② $a_n \geq a_{n+1}$ (n 과 $\sqrt{n^2+1}$ 이 증가 수열 이므로) +5.

따라서 교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 은 수렴 한다. +5

$\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+3n^2} = 2n$ 임으로.

$a_n \geq \frac{1}{3n} > 0$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ 이 발산하므로

비교 판정 법에 의해 $\sum a_n$ 도 발산한다.

따라서 주어진 급수는 조건 수렴 한다. +5

* 교대급수 판정법의 조건중 하나를 안보이면 → 2점

*. 조건을 보이는 과정에서 사소한 계산실수 → 2점.

*. 절대수렴을 판정할 사소한 계산 실수 → 2점.

☆ (절대수렴 별해 1.)

$b_n = \frac{1}{n}$ 이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$ ⇒ 극한 비교판정법에 의해 발산.

☆ (절대수렴 별해 2.)

$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ 가 감소함수 이므로

적분판정법 적용.

$$\int_1^\infty \sqrt{x^2+1} - x \, dx = \int_\alpha^\infty \cosh^2 t - \cosh t \cdot \sinh t \, dt.$$

$$= \int_\alpha^\infty \frac{1+e^{-2t}}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} \right]_\alpha^\infty = \infty$$

$(\sinh \alpha = 1)$

#3. $a_n = \dfrac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 이라 하자 ($a_n \geq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{\log n} - 2^{\log n}}{3^{\log(n+1)} - 2^{\log(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log n}}{3^{\log(n+1)-\log n} - 2^{\log(n+1)}\cdot 3^{-\log n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log n}}{3^{\log(1+\frac{1}{n})} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log n}\cdot 2^{\log(1+\frac{1}{n})}}$$

$\lim_{n\to\infty}\log(1+\frac{1}{n}) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 이므로 $\sum a_n x^n$의 수렴반경은 1

i) $x=1$일 때

충분히 큰 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $3^{\log n} - 2^{\log n} = n^{\log 3} - n^{\log 2} > \frac{1}{2}n^{\log 3}$ 이고

$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{n^{\log 3}}$ 은 p-test에 의하여 수렴한다.

$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}} < \sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{n^{\log 3}}$ 이고 유한 개의 합은 급수의 수렴성에 영향을 미치지 않으므로 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴

ii) $x=-1$일 때

① $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 이 수렴하므로 주어진 급수가 절대수렴하고

따라서 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴한다.

② $f(x) = 3^{\log x} - 2^{\log x}$ 라 하면 $f'(x) = \dfrac{\log 3\cdot 3^{\log x} - \log 2\cdot 2^{\log x}}{x} > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이고 $\left|\frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}\right| > \left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^{\log(n+1)} - 2^{\log(n+1)}}\right|$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}} = 0$ 이므로 교대급수 정리에 의하여 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{\log n} - 2^{\log n}}$ 은 수렴한다.

$\therefore$ 수렴범위는 $-1 \leq x \leq 1$

채점 기준 · 수렴반경 +5점

· $x=1$일 때 수렴 +5점

· $x=-1$일 때 수렴 +5점

* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 구할 때 식으로 보여주지 않으면 0점

ex) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\log 3}-n^{\log 2}}{(n+1)^{\log 3}-(n+1)^{\log 2}} = 1$ 처럼 식으로 보일 때만 점수 부여.

* 수렴 반경을 틀리게 구하면 이후 과정 점수 부여 없음

* $x=1$일 때 논리가 틀리고 $x=-1$일 때 절대수렴이면 수렴을 쓴 경우 둘 다 0점 부여

* $\frac{1}{3^{\log n}-2^{\log n}}$이 감소함수임을 설명 없이 쓴 경우 0점

* $x=1$일 때 "충분히 큰 n에 대하여"라는 언급 없이 부등식을 이끌어낸 경우 0점 부여

문제4.

[방법1] $f(x) = \log(1+x^3) - \log(1+x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{3n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x|<1) \text{ 이므로}$$

$$T_4 f(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{이고}$$

$$|f(0.1) - T_4 f(0.1)| \le \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(0.1)^{3n+3} - (0.1)^3 \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(0.1)^{n+1} - \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{n+1}(0.1)^n \right|$$

$$\le \frac{1}{2}(0.1)^6 + \frac{1}{5}(0.1)^6 < 10^{-5} \quad \text{이다.}$$

따라서 근삿값은 $T_4 f(0.1)$ 이다.

[방법2] $f(0.1) = \log(1-0.09)$ 이므로 $g(x) = \log(1-x)$ 라 하면

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (|x|<1) \text{ 이므로 } T_4 g(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \text{ 이다.}$$

$$|g(0.09) - T_4 g(0.09)| = \left| \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n+1}(0.09)^{n+1} \right| \le \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5}(0.09)^{n+1}$$

$$= \frac{20}{91}(0.09)^5 < 10^{-5} \quad \text{이다.}$$

따라서 근삿값은 $T_4 g(0.09)$ 이다.

[채점기준]

1. $\log(1-x+x^2)$ 또는 $\log(1-x)$ 의 테일러급수 혹은 $T_4 f(x)$를 구한 경우 (+5)
2. 오차가 10^{-5} 이내임을 보이고 올바른 답을 구한경우 (+10)

(단, 오차가 10^{-5} 이내임을 보였으나 답이 틀린 경우 (+7))

#5. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n \quad (0 \le x < 1)$

(a) 위 급수의 수렴반경이 1 이상이므로.
거듭제곱급수 기본정리에 의해

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \quad (0<x<1)$ 이 성립한다.

4

고정된 x 에 대해. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1}$
이라 하면. (a_n) 은 교대급수 정리의 조건들을 만족하고.
$a_1 = 1.\quad a_2 = -\frac{x}{2}$ 이므로

$1-\frac{x}{2} < f'(x) < 1$ 이 성립한다.

$0<x<1$ 이므로. $\frac{1}{2} < 1-\frac{x}{2} < f'(x) < 1$ 이다.

3

(b) 평균값정리에 의해

$\frac{f(\sin\frac{1}{n})}{\sin\frac{1}{n}} = f'(c_n)$ 인 $c_n \in (0. \sin\frac{1}{n})$ 이 존재하므로.

4

모든 자연수 n 에 대해

$f(\sin\frac{1}{n}) > \frac{1}{2}\sin\frac{1}{n} > 0$ 이 성립하며

$\sum \frac{1}{2}\sin\frac{1}{n} = \infty$ 이므로. 비교판정법에 의해
$\sum_{n=1}^{\infty} f(\sin\frac{1}{n})$ 도 발산한다.

4

참고. $0<x<1$ 일 때

$$f'(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

임을 보이고 이를 바탕으로 $\frac{1}{2} < f'(x) < 1$ 임을

보여도 마찬가지로 3점. (필요한 계산 과정을 생략하면 안됨)

거듭제곱급수의 미분 계산 때

"거듭제곱급수 기본정리에 의해" 라는 말이

없으면 4점 중 2점 감점.

$\sum \frac{1}{2} \sin \frac{1}{n} = \infty$ 임을 설명할 때.

잘못된 부등식을 이용하면 점수 없음.

6(a) $y=\sinh x$로 두면 $\frac{dy}{dx}=\cosh x>0$ 이다. 역함수 정리에 의하여

$$h(y)=\frac{d\sinh^{-1}y}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

채점 기준 : 역함수 정리를 옳게 적용하면 +4점.

$h(y)$를 y에 대한 식으로 잘 정리하면 +3점.

($\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$: +3점 $\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{1+y^2+y\sqrt{1+y^2}}$: +3점 $\frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}y)}$: 0점).

(다른 풀이) $y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$로부터 $e^{2x}-2ye^x-1=0$을 얻는다.

근의 공식에 의해 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$ 이고, $e^x>0$ 이므로

$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, 따라서 $x=\sinh^{-1}y=\log(y+\sqrt{y^2+1})$이다.

따라서 $h(y)=\frac{d\sinh^{-1}y}{dy}=\frac{1+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$

채점 기준 : 역함수를 옳게 구하면 +4점.

$h(y)$를 y에 대한 식으로 잘 정리하면 +3점 (위와 동일)

6(b) $f(x)=(x+x^2)\sinh^{-1}(x-x^2)$의 5차 근사다항식을 구하기 위하여

$\sinh^{-1}x$ 의 4차 근사다항식을 구해보도록 하자. $g(x)=\sinh^{-1}x$로 두자.

(a)의 결과로부터 $g'(x)=h(x)=(1+x^2)^{-1/2}$ 임을 알고,

$g''(x)=-x(1+x^2)^{-3/2}$, $g'''(x)=-(1+x^2)^{-3/2}+3x^2(1+x^2)^{-5/2}$,

$g^{(4)}(x)=9x(1+x^2)^{-5/2}-15x^3(1+x^2)^{-7/2}$ 이므로,

$g(0)=0$, $g'(0)=1$, $g''(0)=0$, $g'''(0)=-1$, $g^{(4)}(0)=0$ 이고

$T_4 g(x)=x-\frac{1}{6}x^3$ 이다. 이제 근사다항식의 유일성에 의하여

$(x+x^2)\left((x-x^2)-\frac{1}{6}(x-x^2)^3+o(x^4)\right)=x^2-\frac{7}{6}x^4+\frac{1}{3}x^5+o(x^5)$ 이므로

$T_5 f(x)=x^2-\frac{7}{6}x^4+\frac{1}{3}x^5$ 이다.

채점 기준 : 논리적인 방법으로 $T_5 f(x)$를 옳게 구하면 +8점

$\sinh^{-1}x$ 나 $\sinh^{-1}(x-x^2)$의 4차 근사다항식을 옳게 구했으나 답이 틀리면 +6점.

그 외 부분점수 없음.

#7. $|x|<1$ 에서 ⌟2 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ 이므로 ⌟5

멱급수 기본정리에 의하여

$\tan^{-1}x = \underbrace{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}_{(*)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ 이다. ⌟10

따라서 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{3^k} = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ⌟15 $= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ 이다.

채점기준 : (*)에서 $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x$ 로 적분상수를 누락하거나, $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 를 쓰는 등의 오류가 있는 경우 2점 추가 감점

#8

$x > 0$, $f(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ |R_n f(x)| \le \frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ M_{n+1}(x) = \max\{ |f^{(n+1)}(x^*)| : 0 \le x^* \le x \} = e^x \end{cases}$$

$\underline{n \ge 4} \longrightarrow |R_n f(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{5!\,2^5} < \frac{2}{5!\,2^5} < 10^{-3}$

+10

$$\therefore \sqrt{e} \approx T_4 f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \frac{1}{4!\,2^4}$$

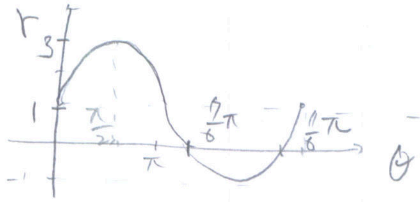
$$= \frac{211}{128}$$

+5

- 답은 구했지만 $\frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ 을 잘못 구하거나
  〃 $< 10^{-3}$ 을 잘못 보인 경우 (−5)

- $n < 4$ 에 대해 $T_n f(\frac{1}{2})$ 구한 경우, $\frac{M_{n+1}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ 을 잘 구한 경우에만 총 점 5점 부여.

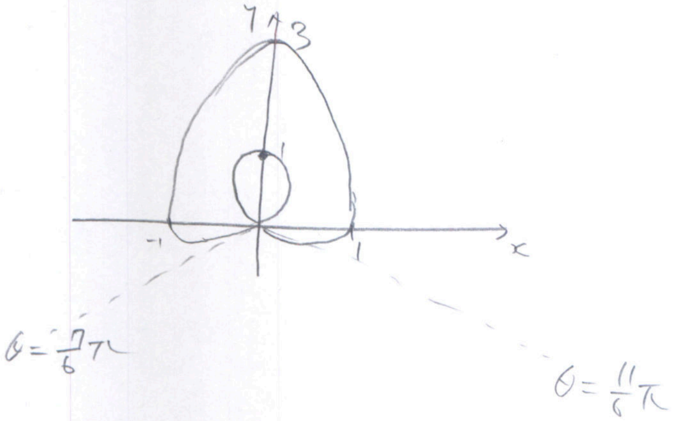
9 (a) $r = 1 + 2\sin\theta$:



$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \Rightarrow r = 0$

$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi \Rightarrow r < 0$

곡선의 개형은 다음과 같다.



* 개형이 맞게 그려졌으면 7점
아니면 0점

(b) $r^2 = \sin(3\theta + \frac{\pi}{2}) \iff r^2 = \cos 3\theta$

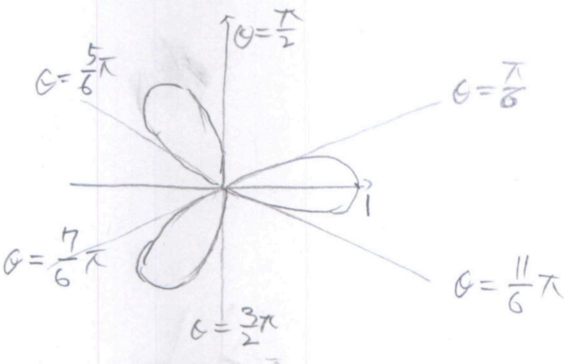
$\iff \cos 3\theta > 0$ & $r = \pm\sqrt{\cos 3\theta}$

$\cos 3\theta \geq 0$ 인 θ의 범위는 $(\theta \in [0, 2\pi])$

$[0, \frac{\pi}{6}], [\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi], [\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi], [\frac{11}{6}\pi, 2\pi]$ 이고

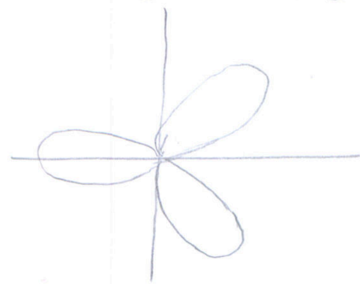
경계에서 $\cos\theta = 0$ 이다.

i) $r = \sqrt{\cos 3\theta}$

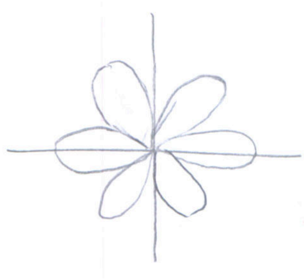


ii) $r = -\sqrt{\cos 3\theta}$

왼쪽의 그래프를 원점에 대해 대칭변환을 시켜 얻는다.



$\therefore$ $r^2 = \sin(3\theta + \frac{\pi}{2})$ 의 그래프는



* 개형이 맞게 그려졌으면 8점

 혹은  : 4점

그 외 0점

문제 10. 곡면 A를 직교좌표계로 변환하면 $x^2+y^2=\frac{1}{1-4z}$ 이다.

곡면 B를 직교좌표계로 변환하면 $2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+2z=1$ 이다. $\Rightarrow 4(x^2+y^2+z^2)=1-4z+4z^2$

$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=1-4z$

$\Rightarrow 4\cdot\frac{1}{1-4z}=1-4z \Rightarrow 4=(1-4z)^2 \Rightarrow 1-4z=\pm 2 \quad \therefore z=-\frac{1}{4}$ or $z=\frac{3}{4}$.

i) $z=-\frac{1}{4}$ 이면, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ 중심이 $(0,0,-\frac{1}{4})$, 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 원

+10점

ii) $z=\frac{3}{4}$이면, $x^2+y^2=-\frac{1}{2}$. $\Rightarrow x^2+y^2=-\frac{1}{2}$ 을 만족하는 실수 x, y가 존재하지않음.

$\therefore$ 곡선의 길이는 $\sqrt{2}\pi$ 이다.

+5점

* 채점기준

1. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{4}$ 이거나 이에 준하는 식을 작성하면 +10점. (즉, $z=-\frac{1}{4}$은 채점에 영향이 없음.)

2. 곡선의 길이를 맞게 구하면 +5점

3. 너무 빈약해보이는 풀이과정은 부분점수없음.