2017년 1학기 수학및연습1 중간고사 채점기준

1-(a) $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 이라 하면,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 교대급수.

(ii) $|a_n| \geq |a_{n+1}|$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\therefore$ 교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴.

(b) $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ 이라 하면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)! / (n+1)^{n+1}}{2^n n! / n^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

$\therefore$ 비율판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴.

(c) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 이라 하면,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

$\therefore$ 일반항 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산.

※ 채점 기준.

- 교대급수 판정 조건 (ii), (iii) 중 한개 없을시 -2점
  둘 다 없을시 점수 없음.
- 극한값이 틀렸을 시 점수없음.
- 다른 방법으로 풀었을 시 계산과정, 수렴/발산 이 모두 정확하면 5점
  아니면 점수없음.

2(a). $a_n = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ 으로 하면, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$$

$$= 1$$

이므로 2장의 정리 2.1.5에 의하여 수렴반경은 1이다.

- 채점기준: 답이 맞으면 5점, 틀리면 0점.
- 별해: 수렴반경을 $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}}} = 1$ 과 같이 구한 경우,

  답이 맞으면 5점, 틀리면 0점.

2(b). (a) 에서, $a(x)$의 수렴반경이 1임을 밝혔으므로 $x=\pm1$에서의 수렴성을 판정하면 충분하다.

$x=1$인 경우,

풀이 1) $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

$$> \frac{x^2}{4!} \qquad (\text{for } x>0)$$

$\Rightarrow$ 자연수 n에 대해 $e^{\sqrt{n}} > \frac{n^2}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{24}{n^2}$ 이 성립.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{n^2}$ 이 수렴하므로, $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ 은 비교판정법에 의해 수렴.

풀이 2) $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$로 하면, f는 $x\geq 0$에서 연속이고, 양함수이며, 단조감소한다. 그런데 $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2 < \infty$

이므로, 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$은 적분 판정법에 의해 수렴한다.

2(b). $x=-1$인 경우,

풀이 1) $a_n = \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}}$ $(n \geq 0)$ 으로 하면 $|a_n|$은 감소수열이고,

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이므로 교대급수 정리에 따라 $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$은 수렴.

풀이 2) $x=1$인 경우 $a(1)$의 수렴성을 보였으므로, $a(-1)$은

절대수렴한다, 따라서 수렴한다.

· 채점기준! $x=1$인 경우 풀이 (1)과 비슷한 풀이의 경우,

논리적 비약 혹은 '충분히 큰 n에 대해서만' 성립하는

식을 아무 설명 없이 쓰면 2점 감점.

문제가 없으면 7점.

$x=1$일 때 풀이 (2)와 비슷한 풀이의 경우,

적분계산을 틀리거나 혹은 적분 판정법을 쓰기 위한

조건을 안 쓰면 2점 감점, 나머지 경우 7점.

$x=-1$일 경우, 교대급수 판정법을 사용하기 위한 조건이

하나라도 빠지면 2점 감점, 나머지 3점.

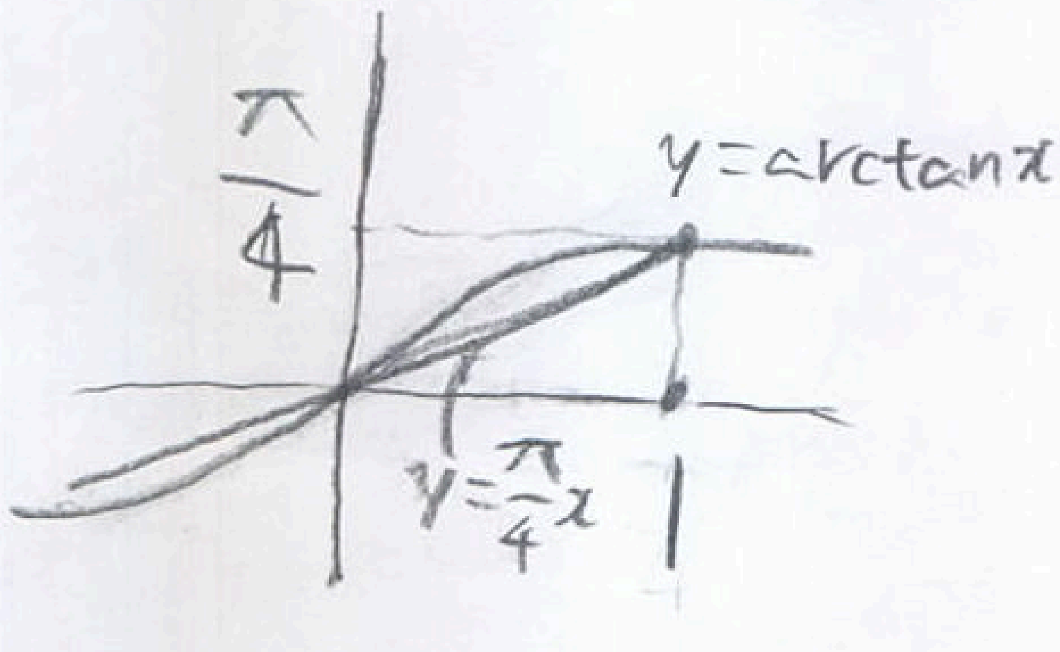
$x=-1$인 경우, 풀이 (2)와 비슷한 풀이의 경우,

$x=1$일 때의 풀이가 틀리면 0점.

기타 논리적인 오류가 큰 경우 0점.

기타 사소한 실수 2점 감점.

3



$\Rightarrow$ $0 \le x \le 1$ 에서 $\arctan x \ge \frac{\pi}{4} x$.

$\therefore \arctan \frac{1}{n} \ge \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n}$ for $\forall n \ge 3$.

$$\Rightarrow a_n = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{(\log n)(\log\log n)} \ge \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \ge 0 \quad \forall n \ge 3 \quad ①$$

10점

그런데, $f(x) = \frac{1}{x \log x \log\log x}$ 로 두면,

$3 \le x < \infty$ 에서 $f(x)$는 연속, 감소, $f(x) > 0$.

따라서, 적분판정법에 의해

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n} \text{ 수렴성} \Leftrightarrow \int_3^{\infty} f(x)\,dx \text{ 수렴성}.$$

그런데, $\int_3^{\infty} f(x)\,dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{x \log x \log\log x}\,dx = \int_{\log 3}^{\infty} \frac{1}{t \log t}\,dt$ ($\because t=\log x$ 치환)

$$= \int_{\log\log 3}^{\infty} \frac{1}{s}\,ds = \infty \ (\because s=\log t \text{ 치환})$$

따라서, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$ 은 발산.

① 에 비교판정법 적용 $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \infty$ (발산)

5점

* ① 의 부등식에서 $\frac{\pi}{4}$ 대신 다른 상수 K를 썼을 때,
$K \ge 1$ 이면, 주어진 부등식 성립 X. (−5점)

\# 4. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}, \quad (|x|<1).$$

여기에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하여, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$

($|x|<1$, 혹은 $|x|\le 1$ 도 가능.)

여기에 $\frac{1}{\sqrt{3}}$을 대입하여, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}.$$

Case 1. 주어진 급수의 수렴성을 별도로 보인 후, 값의 계산을 시도한 경우 (혹은 수렴성만을 보인 경우):

(a), (b) 각각에서 수렴성에 2점 부여, 계산에 $\underset{(a)}{5}$, $\underset{(b)}{6}$점.

계산 부분에서; ① 답이 틀리면 부분점수 없이 0점.

a, b 각각 5, 6점

② 답이 맞은 경우:

(i) 풀이과정 중에 등장한 함수의 급수 표현에 대한 수렴반경, 혹은 수렴구간을 '한번이라도' 표현하면 만점,

(ii) '한번도 표현하지 않은 경우' 2점 감점.

Case 2 급수의 값을 구하는 과정에서
수렴성까지 보이려고 시도한 경우 :

계산에 $\underbrace{7}_{(a)}$, $\underbrace{8}_{(b)}$ 점 부여.

① 답이 틀리면 부분점수 없이 0점.

② 답이 맞은 경우, Case 1 과 동일하게 처리.

5.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \quad (t \in \mathbb{R})$

∴ 거듭제곱급수의 기본정리에 의해

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1}.$$

(b) $\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \cdots$ 는 교대급수이다.

교대급수의 성질에 의해

$$\left| \int_0^x e^{-t^2} dt - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \right| \le \frac{x^5}{5\cdot 2!}.$$

$x = 0.3$ 일 때 $\frac{0.3^5}{5\cdot 2!} = \frac{3^5}{10^6} < \frac{10^3}{10^6} = \frac{1}{1000}$

∴ 오차의 범위가 10^{-3} 이하인 근삿값은 $0.3 - \frac{1}{3}\cdot(0.3)^3 = 0.291$ 이다.

※ 채점기준

(a) - 거듭제곱급수의 기본정리를 언급하지 않았을 경우 -2점.

- 유한 개의 항만 계산한 경우 0점.

(b) - 근삿값만 맞을 경우 3점. (오차 이내의 값이기만 하면 정답 인정)

- 오차 계산시 정확한 근거를 제시하지 않았을 경우 -5점.

(사용한 정리 이름만 언급하지 않았을 경우는 -2점)

- 테일러 정리를 이용할 시, 계산과정의 비약이 있을 경우 -5점

#6. 주어진 거듭제곱급수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 에 대하여.

$a_n := \frac{1}{n^2}$ 로 두면 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ 이므로, $f(x)$의 수렴반경은 $\frac{1}{1}=1$ 이다. $+3$

또한, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 는 p-test에 의해 수렴하고, $+3$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 은 절대수렴하여 수렴하므로 $+3$

$f(x)$가 수렴하는 x의 범위는 $[-1, 1]$ 이다.

① 거듭제곱급수의 기본정리에 의해, f'과 f''은 수렴반경이 1인 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ 로 표현되며, 미분의 정의에 의해 이는 $(-1, 1)$ 에서만 정의된다. $+6$

② $x=\pm 1$ 에 대해 f'과 f''이 정의되지 않지만, 이를 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}$ 로 간주한 경우 수렴판별이 맞으면 점수를 부여한다.

f'과 f''의 수렴반경을 직접 구하거나 거듭제곱급수의 기본정리에서 도출해내면, 각 $+1$

$f'(1) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 은 조화급수로, 발산. $+1$

$f'(-1) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 은 교대급수정리에 의해 수렴. $+1$

$f''(1) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}$ 과 $f''(-1) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}(-1)^{n-2}$ 는 일반항 판정법에 의해 발산. 각 $+1$

참고 사항은 다음 쪽에.

※ f', f''의 거듭제곱급수 표현을 구해서 틀린 경우, 경계값 뿐 아니라 수렴반경 점수 역시 인정하지 않는다.
(특히 $f'' = \sum \frac{x^{n-2}}{n(n-1)}$ 등)

※ 적용할 수 없는 판정법을 적용하면 감점하되, 적용가능한 판정법을 쓰고 조건을 적지 않거나 사소한 실수가 있다면 점수 인정
(eg. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$ 비교판정 (O))

※ 수렴반경이 동일한 이유를 틀리게 (eg. 미분가능) 적거나, 아예 적지 않는 경우 감점.

※ 거듭제곱급수의 기본성질에 의해 수렴 '범위'가 동일하다고 기술하여도 수렴반경 점수는 인정.

문제 7

(풀이 1) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\arctan t - \sin t}{t^3}$

로피탈 정리

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t^2} - \cos t}{3t^2} \quad \left(\because \lim_{t\to 0} t^3 = \lim_{t\to 0} (\arctan t - \sin t) = 0\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{2t}{(1+t^2)^2} + \sin t}{6t} \quad \left(\because \lim_{t\to 0} \overset{3t^2}{\cancel{6t}} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{1+t^2} - \cos t\right) = 0\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(-\frac{2}{6}\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin t}{t}\right) = \boxed{-\frac{1}{6}} ▨$$

① +5

② +10

※ 채점 기준

- 로피탈 정리를 사용하는 모든 과정 중 하나라도 분자, 분모가 0으로 수렴함을 명시하지 않으면 ① 에 대한 점수가 인정되지 않음.
- 계산 실수로 인해 잘못된 과정으로 답이 나온경우 ② 점수 0점

(풀이 2)

$$\begin{cases} \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\ \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\arctan t - \sin t}{t^3}$$

+5

$$= \lim_{t\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(t^3)}{t^3}\right) = \boxed{-\frac{1}{6}} ▨$$

+10

※ 채점 기준

- o 표기법 없이 arctant 와 sint 의 거듭제곱급수 전개 만을 사용하는 경우 두 급수의 정의역이 명시 돼 있지 않으면 −5

8. $f'(x)=\frac{1}{2}(4+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos x$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(4+\sin x)^{-\frac{3}{2}}\cos^2 x - \frac{1}{2}(4+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\sin x.$$

$f(0)=2 \quad f'(0)=\frac{1}{4} \quad f''(0)=-\frac{1}{32}$

$$P(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$
$$=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$$

┘ 7. (사소한 계산실수 −2)

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{M_3(x)}{3!}\cdot|x|^3$$ 따름정리 4.04.

$$M_3(x)=\max\{\,|f^{(3)}(t)| \mid t\in[0,x]\,\}$$

┘ 3.

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(4+\sin x)^{-\frac{5}{2}}\cos^3 x+\frac{3}{4}(4+\sin x)^{-\frac{3}{2}}\sin x\cos x - \frac{1}{2}(4+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos x.$$

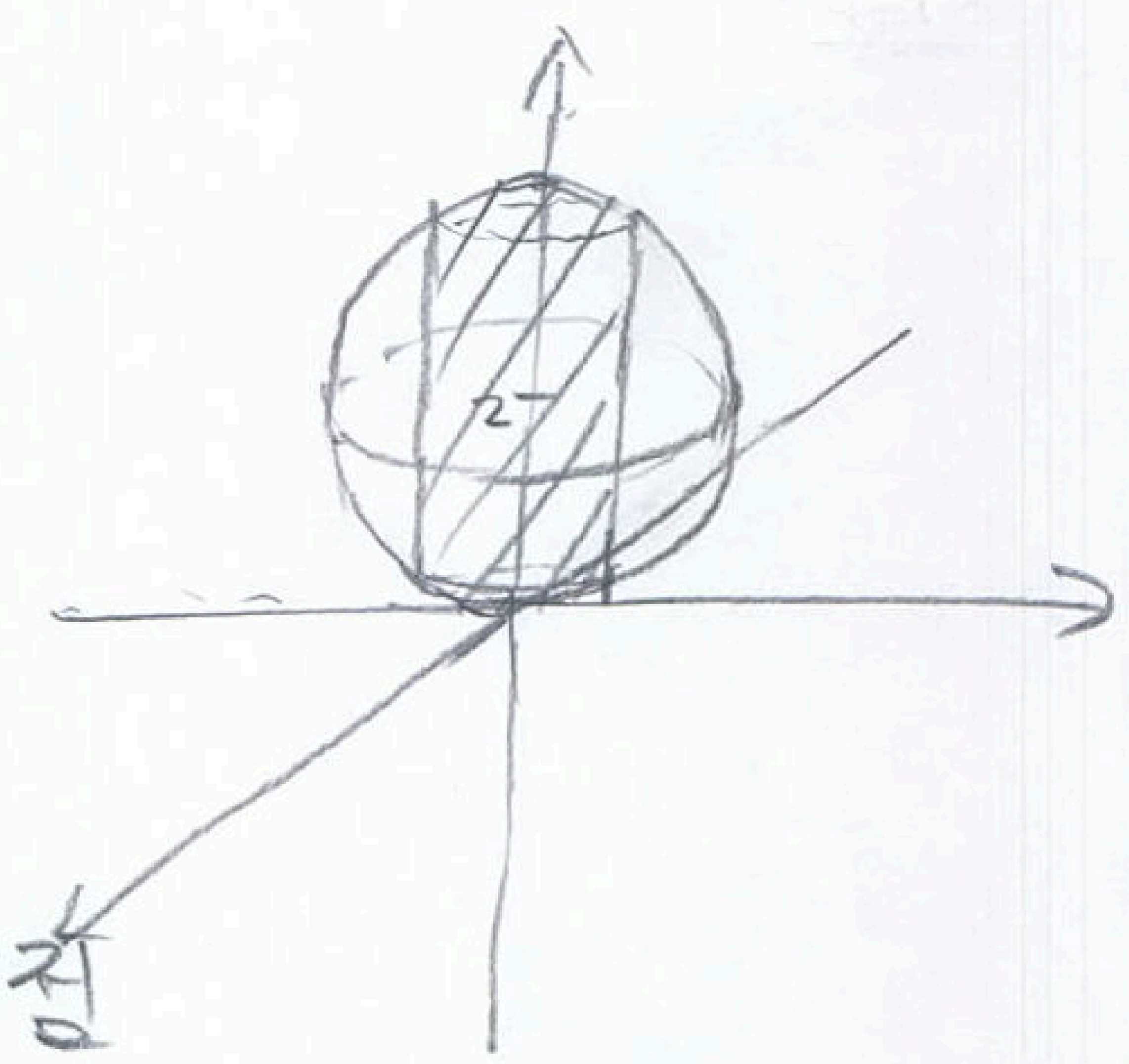
$0\le x\le\frac{1}{10}$

$$|f^{(3)}(x)| \le \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4^{\frac{5}{2}}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{3}{256}+\frac{3}{32}+\frac{1}{4}=\frac{91}{256}<\frac{1}{2}$$

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3<\frac{1}{10^4}.$$

┘ 5

문제 9

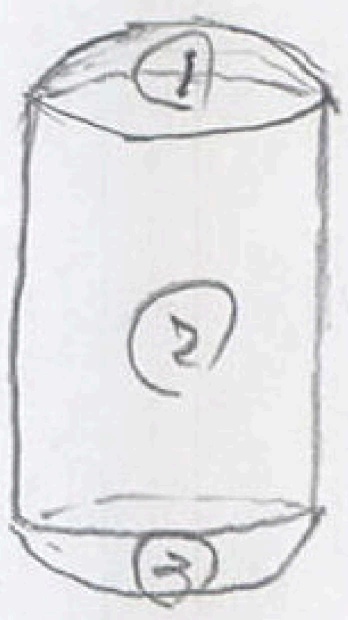


$\rho \le 4\cos\varphi$

$\rho^2 \le 4\rho\cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2 \le 4z$

$x^2+y^2+(z-2)^2 \le 2^2$ ⋯ 5점



부피 ① = 부피 ③

$= \pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(4-z^2)\,dz$ ⋯⋯ 5점

$= \pi\left(\frac{16}{3}-3\sqrt{3}\right)$

(or 부피③ $= \pi\int_0^{2-\sqrt{3}}\left(4-(2-z)^2\right)dz = \pi\int_0^{2-\sqrt{3}}(4z-z^2)\,dz = \pi\left(\frac{16}{3}-3\sqrt{3}\right)$)

부피 ② $= 2\sqrt{3}\cdot 1^2\cdot\pi = 2\sqrt{3}\,\pi$

부피 ① + 부피 ② + 부피 ③

$= 2\sqrt{3} + 2\pi\left(\frac{16}{3}-3\sqrt{3}\right)$

$= \left(\frac{32}{3}-4\sqrt{3}\right)\pi$ ⋯ 5점

추가① 원기둥을 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 인 구로 해석할 때 0점 처리

추가② 사소한 계산 실수는 모두 최종답의 5점에서 감점

원래 문제는 0≤r≤1인 영역이 아니라 r≤1 인 영역이 주어졌고 이에 따라 r이 음수인 영역을 고려해 3차원 좌표공간 전체가 나온 풀이의 경우, 좌표 공간 전체와 구의 공통부분인 구의 부피 $32\pi/3$ 를 구하여도 만점 처리 하였음

모범답안

10. a)

주기성에 의해 $0 \le \theta < 2\pi$ 인 경우만 생각하자.

i) Case 1 : $r \neq 0$

$$\begin{cases} r = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \\ r = \sin\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}, -1$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

$r = \sin\theta$ 이므로, 극좌표에서 $\begin{cases} r = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi), (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi) \\ r = -1 \Rightarrow (-1, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$

$\therefore$ 직교좌표계로, $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}), (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}), (0, 1)$

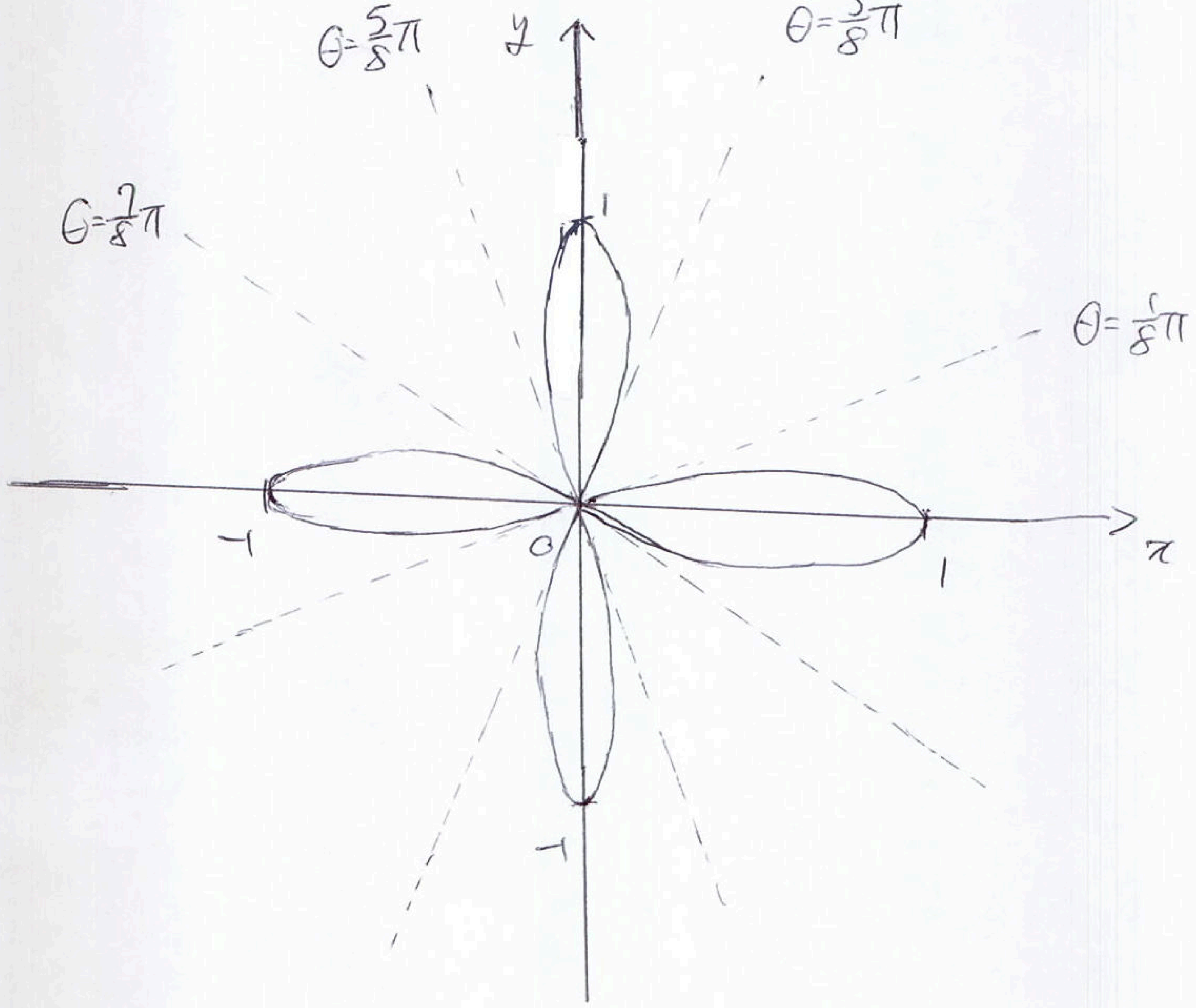
ii) Case 2 : $r = 0$

$r = \cos 2\theta$ 는 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 일 때, $r = 0 \Rightarrow$
$r = \sin\theta$ 는 $\theta = 0$ 일 때, $r = 0 \Rightarrow$
$(x, y) = (0, 0)$ 을 지난다.

$\therefore$ 교점은 $(0, 0), (0, 1), (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$

모범답안

10. b)



10. a) 에서

$\cos 2\theta = \sin\theta$ 를 언급하면 +5점

4개의 교점의 좌표가 모두 맞아야 +5점.

10. b) 에서

대략적인 개형만 맞으면 +5점.