2016년 1학기 수학 및 연습 1 중간고사 모범답안.

#1 (a). $2^n < n!$ for $n \ge 4$

$\left(\because \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n\text{번}} < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \right)$ … (5점).

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{n \log n!} < \frac{1}{n \log 2^n} = \frac{1}{n^2 \log 2}, \quad n \ge 4$$

$\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ 이고, 양항급수 이므로

비교판정법에 의해, $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log n!}$ 가 수렴. 유한개의 항은 영향을 주지 않으므로, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n!}$ 이 수렴 (8점)

• 다른 방식으로 풀었을 경우, 설명이 부족하면 −5점.

1.(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

sol) $a_n = \frac{1}{5^n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$ 이라 하면 $a_n \geq 0$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right] = \frac{e}{5} < 1$ 」(5점)

거듭제곱근 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$은

수렴한다.」(+2점).

* ① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 이 1보다 작은 것을 명시하지 않은 경우 (−2)

② 판정법을 명시하지 않은 경우 (−1)

③ 급수가 수렴함을 명시하지 않은 경우 (−2)

* $\lim \sqrt[n]{a_n}$의 값을 올바른 풀이로 풀지 않거나 값이 틀린 경우 (0점처리)

* 그 외의 풀이로 풀었을 경우 맞으면 7점.

문제 2. [15점] $a_n := \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}\,dx$ 로 정의되는 수열 (a_n)에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴함을 보이시오.

풀이) $\cos\frac{\pi}{2}x$가 $2n-1 \le x \le 2n+1$ 에서 n이 홀수일때 음수, n이 짝수일 때 양수이므로

$a_n = \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}\,dx$ 는 부호가 바뀌는 교대수열이다. (즉, $a_n \cdot a_{n+1} \le 0$). ... 조건 ①

$|a_n| \geq \left|\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}\,dx\right| \geq \left|\frac{1}{2n+1}\int_{2n-1}^{2n+1} \cos\frac{\pi}{2}x\,dx\right| = \left|\frac{1}{2n+1}\int_{2n+1}^{2n+3} \cos\frac{\pi}{2}x\,dx\right| \geq |a_{n+1}|$ 이므로

$|a_n| \geq |a_{n+1}|,\ \forall n \in \mathbb{N}$ 이다. ... 조건 ②

$|a_n| \le \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{2n+1}{2n-1}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ 이다. ($\because \lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{2n+1}{2n-1}\right) = 0$) ... 조건 ③

교대급수정리에 의해

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다. ■

채점기준.

1. 조건 1, 2, 3 을 보이는 과정이 잘못된 경우 −5점씩
2. 조건 1, 2, 3 을 보인 후 '교대급수정리에 의해' 라는 사용한 정리의 이름이 언급되지않은 경우 −2점.

* 적분판정법, 비교판정법, 비율판정법 (즉, 양항급수에 사용가능한 판정법), 거듭제곱급수 전개, 절대 수렴을 이용한 풀이는 대부분 0점을 부여.

* 풀이 중 사소한 실수에 대해 −2점.

3(a) [7점] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2} x^n$

$a_n = \frac{1}{(\log n)^2}$ 이라 하면

(ㄱ) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log(1+1/n)}{\log n}\right)\right)^2 = 1$

∴ 수렴반경은 1이다. ⌋ 3점

$x=1$ 에서는, $\log n < n$ 이므로 $\frac{1}{(\log n)^2} > \frac{1}{n\log n}$, 그런데

(ㄴ) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to\infty}\left[\log\log x\right]_2^b = \infty$ 이므로 적분판정법에 의해

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \infty$ 이고, 비교판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2} = \infty$ 이다.

⌋ 2점

$x=-1$ 에서는, $0 \le a_{n+1} \le a_n$ ($\log n$ 이 증가수열) 이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$

(ㄷ) $=0$ 이므로 교대급수 정리에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^2}$ 은 수렴한다. ⌋ 2점

따라서 수렴하는 범위는 $[-1, 1)$ $(-1 \le x < 1)$ (답)

* (ㄴ),(ㄷ)은 답만 맞고 과정이 틀릴 시 각각 0점
* (ㄴ)에서 $\sum \frac{1}{n\log n}$ 에 대해 적분판정법을 사용한 경우, '적분판정법'을 언급하지 않고 관련 조건도 제시하지 않고서 '발산한다'고 한 경우 0점.
* (ㄴ)에서 $\log n < \sqrt{n}$ $(n \gg 1)$ 와 비교판정법을 사용할 수도 있음.

#3 (b). $a_n := \frac{(-1)^n}{4^n \log n}$ 이라 하고, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n$ 의 수렴반경을 ρ라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \log n}{4^{n+1} \cdot \log(n+1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\rho}$ 이므로 $\rho = 4$ 이다.

4

$t=4$ 일때, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot 4^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ 은 교대급수 판정법에 의해 수렴,

($\because$ $\frac{1}{\log n}$ 감소수열, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$)

$t=-4$ 일때, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot (-4)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ 은 비교판정법에 의해 발산한다.

($\because$ $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n} = \infty$)

3

따라서 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot t^n$ 은 $-4 < t \leq 4$ 일 때 수렴하고,

$t = 2x-1$ 로 두어 원 거듭제곱급수의 수렴범위 $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ 를 얻는다.

1

* a_n 정의하지 않고 $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 표기 사용시 2점 감점.

* $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \log n}{4^{n+1} \cdot \log(n+1)} = \frac{1}{4}$ 만 계산하고, 수렴범위와의 관계 설명하지 않는 경우 2점 감점.

* 경계값에서의 수렴성 조사 하나만 맞은경우 1점부여.

* 경계값에서의 수렴성 설명 제대로 하지 못한 경우 답 $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ 가 맞는 경우에도 점수 없음.

* 거듭제곱급수의 수렴반경을 이용하지 않고,

1) 원래 급수에 비율판정법 적용한 경우, "비율 > 1 일때 발산" 언급하지 않은 경우 2점 감점.

2) 〃 비율판정법 or 거듭제곱근 판정법 적용 시

양항급수가 되는 경우, 그렇지 않은 경우 나누지 않으면 1점 감점.

#4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n(n-1)}$

풀이 1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$ 3

적분 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x)$, $|x|<1$

양변에 x^2곱 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+3} = -x^2 \log(1-x)$, $|x|<1$

$$\| $$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n+1}$$

미분 $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^n = -2x\log(1-x) + \frac{x^2}{1-x}$, $|x|<1$

미분 $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)n}{(n-1)} x^{n-1} = -2\log(1-x) + \frac{2x}{1-x} + \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

x곱 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)n}{(n-1)} x^n = -2x\log(1-x) + \frac{2x^2}{1-x} + \frac{2x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}$, $|x|<1$ 7

$x=\frac{1}{2}$ 대입하면

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)n}{(n-1)2^n} = -2\cdot\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \log 2 + \frac{5}{2}$$

5

※미분·적분의 계산이 틀리면 부분점수 없음.

풀이 2) $\frac{n(n+1)}{n-1} = \frac{n^2+n}{n-1} = \frac{(n+2)(n-1)+2}{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n(n-1)} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\frac{1}{2^n}}_{①} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot\frac{1}{2^n}}_{②} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}}_{③}$$ (∵ 세 급수는 모두 수렴)

$(|x|<1)$ ⌋3

① $\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \overset{\text{미분}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{2x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot x^n = \frac{2x^2}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)^2}$ ⌋3

② $\sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ ⌋2

③ $\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x} \overset{\text{적분}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\log|1-x|$ ⌋3

∴ ① $= \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2}$ ⌋2

③ $= -\log(1-\frac{1}{2}) = \log 2$ ⌋2

∴ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n(n-1)} = ① + ② + ③ = \frac{3}{2} + 1 + \log 2$

$= \frac{5}{2} + \log 2$

* 풀이 2)와 같이 항을 나눠서 풀 경우
항별로 각각 채점.

〈문제 5 모범답안〉

$f(x)$를 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$ 라 하면, 교과서의 정리에 의해

f는 미분 가능, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}$ $(|x|<1)$.

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{등비급수의 성질}).$$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 는 $|x|<1$ 에서 0보다 크므로,

f의 역함수 존재 ——— 5점.

한편, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$ 이고

$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ 이므로 f의 역함수를 $g(y)$라 하면

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ & $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3}$. → 3점.

↳ 2점.

——— 5점.

$y=\frac{\pi}{6}$ 에서의 $g(y)$의 일차 근사 다항식은 $T_1^{\frac{\pi}{6}} g(y) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) + g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$

와 같이 주어지므로, 원하는 답은

$$T_1^{\frac{\pi}{6}} g(y) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3}y. \quad \text{—— 5점.}$$

※: $f(x)$를 $\sin x$ 라고 쓴 경우 — 0점.

g의 일차 근사 다항식 $T_1^{\frac{\pi}{6}} g(y)$ 에서 x에 대한 식으로 쓴 경우 — 1점 감점.

$T_1^{\frac{\pi}{6}} g(y)$ 에서 $O(y)$ 혹은 $O(x)$를 포함하는 식을 쓴 경우 — 해당 부분 0점.

#6. $\lim_{x\downarrow 0}\left(x^2+x+\sin x\right)^{\frac{1}{\log x}} = ??$

풀이) $F(x) = (x^2+x+\sin x)^{\frac{1}{\log x}} > 0 \quad (x>0)$

$$\lim_{x\downarrow 0}\log F(x)$$

$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\log(x^2+x+\sin x)}{\log x}$$

로피탈의 정리

$$\overset{①}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{2x+1+\cos x}{x^2+x+\sin x}}{\frac{1}{x}} \quad \left(\lim_{x\downarrow 0}\log(x^2+x+\sin x) = -\infty,\ \lim_{x\downarrow 0}\log x = -\infty\right)$$

$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{2x+1+\cos x}{x+1+\frac{\sin x}{x}}$$

$$\overset{②}{=} \frac{0+1+1}{0+1+1} = 1$$ 이다

한편 지수함수는 연속함수이므로

$$\lim_{x\downarrow 0}F(x) = \lim_{x\downarrow 0}e^{\log F(x)} = e^{\lim_{x\downarrow 0}\log F(x)} = e^1 = e \quad ③$$

이다.

※ 채점기준

① : 로피탈의 정리를 쓸 수 있음을 확인하고 (5점)

② : 로그를 취한 것의 극한값을 계산하면 +5.

③ : 1. 2를 이용해 답을 구하면 5점. 총 15점.

7. $\arctan(x-\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-\frac{1}{2})^{2n+1}$; $|x-\frac{1}{2}| < \underbrace{1}$ 5점

$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{2(1-(x-\frac{1}{2}))} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x-\frac{1}{2})^n$; $|x-\frac{1}{2}| < \underbrace{1}$ 5점

$$\arctan(x-\tfrac{1}{2}) = (x-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(x-\tfrac{1}{2})^3 + o((x-\tfrac{1}{2})^3)$$

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2})^3 + o((x-\tfrac{1}{2})^3)$$

$$\frac{\arctan(x-\frac{1}{2})}{3-2x} = \frac{1}{2}\left((x-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(x-\tfrac{1}{2})^3\right)\left(1+(x-\tfrac{1}{2})+(x-\tfrac{1}{2})^2+(x-\tfrac{1}{2})^3\right)$$

$$+ o((x-\tfrac{1}{2})^3) = \frac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}(x-\tfrac{1}{2})^3 + o((x-\tfrac{1}{2})^3)$$

테일러 근사다항식의 유일성에 의해 $\underline{T_3^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^3}$

5점.

$o((x-\frac{1}{2})^3)$ 없이 전개할 경우 (−2점)

수렴 반경이 없는 경우 (−2점)

직접 미분 한경우 $\underbrace{f'(\tfrac{1}{2})}_{3점}$ $\underbrace{f''(\tfrac{1}{2})}_{3점}$ $f'''(\tfrac{1}{2})$ 4점

$T_3^{\frac{1}{2}} f(x)$ 를 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^3 + o((x-\frac{1}{2})^3)$

등으로 표기한경우 (− 5점)

$T_3^{\frac{1}{2}} f(x)$ 가 다항식이 아닌경우 $\underline{0점}$

#8. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t+t^3}\,dt \longrightarrow f(0) = 0$

$$f'(x) = \sqrt{1+x+x^3} \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1+3x^2}{2\sqrt{1+x+x^3}} \longrightarrow f''(0) = \frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{3x^4+6x^2+12x-1}{4(1+x+x^3)^{3/2}} \longrightarrow f'''(0) = -\frac{1}{4}$$

테일러 2차식을 통해 구한 근사값 $= T_2 f(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{400} = \frac{41}{400}$ ┘ 5점.

(추가. 답으로서 인정될수 있는 값들. ① $\frac{2459}{24000} = T_3 f(\frac{1}{10})$.

② $\frac{1}{10} + \frac{1}{4\cdot 10^2} - \frac{1}{24\cdot 10^3} + \frac{1}{8\cdot 10^4} - \frac{1}{20\cdot 10^5} - \frac{1}{56\cdot 10^7}$

③ $\frac{1}{10} + \frac{1}{400} + \frac{1}{24000}$ 등. 참값에서 오차범위 $\frac{1}{3000}$ 이내의 값들. $\left(\frac{2459}{24000} < \text{참값} < \frac{41}{400}\right)$

오답예시 : $\frac{21}{200}$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{10^2} - \frac{1}{24\cdot 10^3} + \frac{1}{8\cdot 10^4} - \frac{1}{20\cdot 10^5} - \frac{1}{56\cdot 10^7}$ 등.)

「오차에 대한 풀이」.

테일러의 정리에 의해 $\left|R_2(\frac{1}{10})\right| \leq \frac{1}{3!}\cdot M_3(\frac{1}{10})\cdot(\frac{1}{10})^3$ ┘ 5점.

(혹은 $f(x) - T_2 f(x) = R_2 f(x) = \frac{f^{(3)}(x_*)}{3!}\cdot x^3$ 을 만족하는 $0 \leq x_* \leq x$ 가 있다고 하여도 5점 인정.

$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ 으로 하여 테일러 정리를 써도 O.K.

테일러 정리에 대해 R_2에 절대값을 빼거나. 각종표기에 대해 오류가 있어도 허용.

예시 > . $M_3(x)$ 나 $M_3(\frac{1}{10})$ 대신 M_3. M^3. $M^{(3)}$

$$M_3 = \{|f^{(3)}(t)| \mid 0 \leq t \leq \tfrac{1}{10}\}$$

$$M_3 = max\{f^{(3)}(t) \mid 0 \leq t \leq \tfrac{1}{10}\}$$

$$M_3 = max\{|f^{(3)}(t)| \mid 0 < t < \tfrac{1}{10}\}$$

$M_3(x) = max\{|f^{(3)}(x)| \mid 0 \leq x \leq x\}$ 등의 경우도 허용.)

※ 정식적인 풀이로서는 허용되지 않으나 이번에 한해 허용한다.

그런데 $M_3(\frac{1}{10}) = max\left\{ \left| \frac{3x^4+6x^2+12x-1}{4(1+x+x^3)^{3/2}} \right| \;\middle|\; x \in [0, \frac{1}{10}] \right\}$ 이므로.

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{10}$ 에 대해 $\frac{1}{|1+x+x^3|^{3/2}} \leqq 1$ 이고,

$|3x^4+6x^2+12x-1| \leqq 1$ 이므로.

$M_3(\frac{1}{10}) \leqq \frac{1}{4}$.

따라서 $|R_2(\frac{1}{10})| \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{10^3} < \frac{1}{3000}$

따라서 $T_2f(\frac{1}{10}) = \frac{41}{400}$ 은 오차가 $\frac{1}{3000}$ 보다 작은 근사값!.

5점.

틀린풀이 > ①. $f^{(3)}(x) = g(x)$ 에 대해 g는 $[0, \frac{1}{10}]$ 에서 감소함수.

$\Rightarrow M_3(\frac{1}{10}) = g(0)$.

안되는 근거 > • g가 감소임을 보이지 않음.

• $|g(0)|$ 와 $|g(\frac{1}{10})|$ 을 둘다 비교해야함.

② $M_3(\frac{1}{10}) \leqq \frac{1}{4}$.

안되는 근거 > 설명의 근거 누락.

허용범위 > $|R_2(\frac{1}{10})|$ 대신 $R_2(\frac{1}{10})$ 이라 표기시. 허용.

(역시 원래는 허용되지 않습니다.)

주의) 오차에 대한 풀이에 대해 점수를 받을 수 없는 풀이.

① 교대급수를 쓰는 풀이.

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n$$ 이므로.

$$\sqrt{1+t+t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (t+t^3)^n$$ 에서 교대급수정리를 쓴다.

사용불가 이유 → $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (t+t^3)^n$ 이 t에 대한 교대급수임을

증명하신 분에 한하여 풀이를 인정하였습니다.

② 갑자기 문제가 바뀌는 풀이.

예> $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t+t^3}\,dt$

→ $f'(x) = \sqrt{1+x+x^2}$?! ?!

9

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^2 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{6!}(2x)^6 + \cdots\right)$$

$$T_5 f = x^2 - \frac{1}{3}x^4$$ +7

$$|f(x) - T_5 f| \le \frac{1}{2 \cdot 6!}(2x)^6 \qquad (|x|<1)$$

오 교대급수 정리에 의해서

따라서 $|f(0.1) - T_5 f(0.1)| < \frac{2}{45} \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$ +5

이고 구하고자하는 근삿값은 $0.1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0.1^4 = \frac{299}{30000}$ +3

* 별해

$f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$f^{(2)}(x) = 2\cos 2x$

$f^{(3)}(x) = -4\sin 2x$

$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$

$f^{(5)}(x) = 16\sin 2x$

$f^{(6)}(x) = 32\cos 2x$

$$T_5 f = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

+7

$$|f(0.1) - T_5 f(0.1)| = \left|\frac{f^{(6)}(x_*)}{6!}(0.1)^6\right| \qquad x_* \in [0, 0.1]$$

$$< \frac{32}{6!} \times (0.1)^6 < 10^{-6}$$ by 테일러정리

+5

$$\Rightarrow \sin^2 0.1 \simeq 0.1^2 - \frac{1}{3}0.1^4 = \frac{299}{30000}$$ +3

⊙ 채점기준

· $\sin^2 x$의 근사다항식을 구하면 +7점. (정확하지 않으면 0점)
(다른 방법으로 풀었을 경우 이에 준하는 과정이 있으면 인정)

· 근삿값과 본래 값의 차이가 10^{-6} 이하임을 보이는 과정이 올바르면 +5점.

* 교대급수의 일반항이 알려지지 않은 상태에서 교대급수임을 이용하면 점수 없음. 교대급수임을 언급하지 않아도 점수 없음.

* 테일러 정리 이용시 R_n의 범위에 관한 언급이 없으면 점수 없음.

#10(a)

$A\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$를 직교좌표로 바꾸면 $(2\sqrt{3}, 2)$ +1

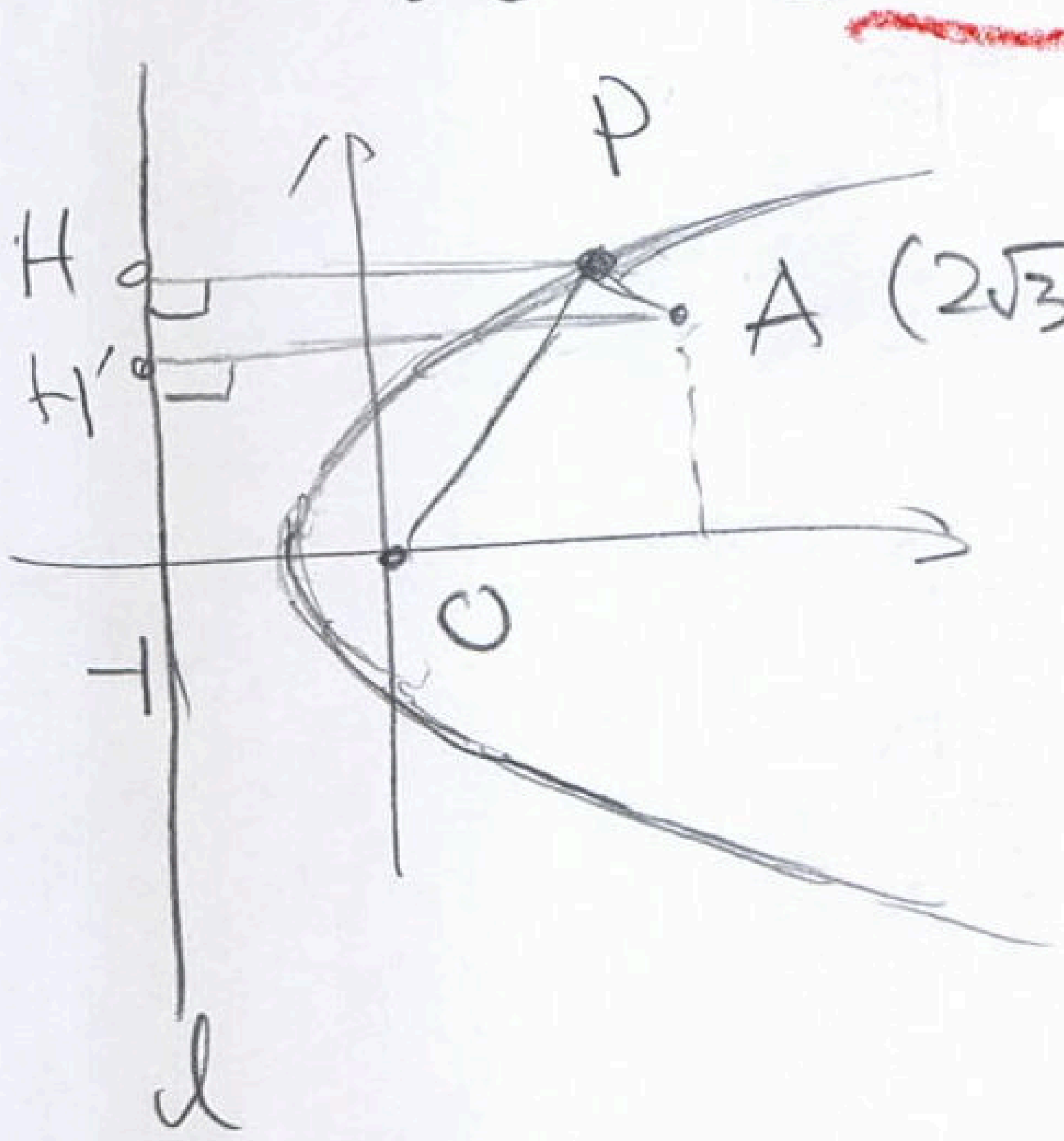
$r = \frac{1}{1-\cos\theta}$를 직교좌표로 바꾸면

$(\cos\theta \neq 1)$

$r - r\cos\theta = 1 \Leftrightarrow r = 1+x \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1+2x+x^2.$

$y^2 = 1+2x$로 준선이 $x=-1$, 초점이 원점인

포물선이 된다. +3



P에서 준선에 내린 수선의 발을 H,

A에서 준선에 내린 수선의 발을 H' 이라하면

$AP + PO = AP + PH$ (포물선의 성질)

$\geq AH$ (삼각부등식)

$\geq AH' = 1 + 2\sqrt{3}$ 이다.

즉, $AP + PO + OA \geq 1+2\sqrt{3} + OA = 5+2\sqrt{3}$ 10

* ($r = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon\cos\theta}$를 이용하여 포물선임을 보이고 준선과 초점을 명확히 밝혔을 경우에도 +3점)

- 직교좌표계로 바꿀 때 실수마다 -1점

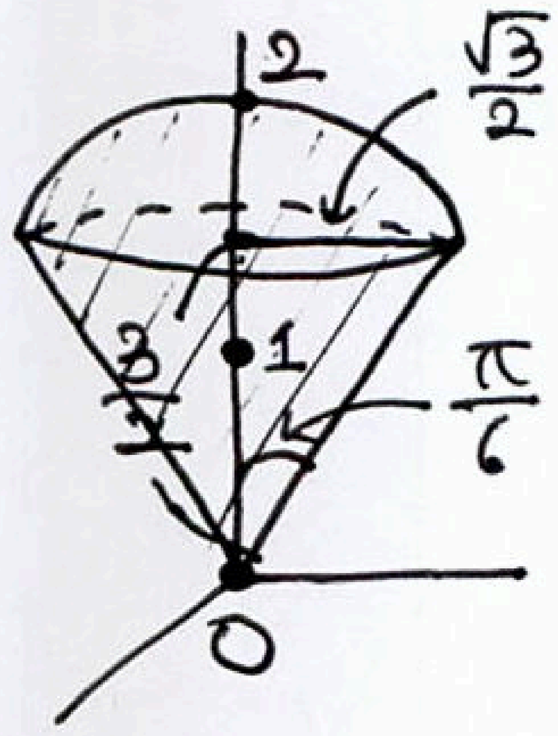
- 중간 계산이 틀렸지만 포물선의 성질을 이용하여
$\overline{AP}+\overline{PO} \geq \overline{AH'}$ 의 관계를 이끌어냈을 경우 +2점

- $\overline{AH'}$ 값까지 정확히 구했을 경우 +2점

- 이외의 다른 풀이로 풀었을 경우 논리가 타당하면 정답 처리

10. (b).

구면좌표계에서 $\rho = 2\cos\varphi$ 와 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 로 표현되는 두 곡면으로 둘러싸인 영역 중 직교좌표계로 표현된 점 $(0,0,1)$을 포함하는 영역은 다음과 같다.



구하고자 하는 영역의 부피는 왼쪽 그림에서 색칠한 부분의 부피이다.

이 때, $\rho = 2\cos\varphi \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\varphi$

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$

이다.

이제, $\underset{①}{\underline{\text{원뿔의 부피}}}$와 $\underset{②}{\underline{\text{중심이 } (0,0,1) \text{인 구의 일부분의 부피}}}$를 구하자.

$$① = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

$$② = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \pi \left\{\frac{2}{3} - \frac{11}{24}\right\} = \frac{5\pi}{24}$$

따라서, 구하고자 하는 부피는 $\frac{3}{8}\pi + \frac{5}{24}\pi = \frac{7}{12}\pi$ 이다.

※ 채점 기준.

- 문제에서 주어진 영역을 잘 표현 ⋯ 2점.
- 계산 실수 없이 부피를 잘 구한 경우 ⋯ 3점.