문제 1

5점: 중심 P를 구함.
10점: 답이 맞음

Sol)

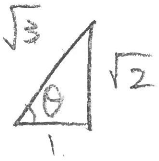
$$P = \frac{1}{3}(A+B+C)$$
$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PA} = (2,2,0) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PO} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

상수배는 각도에 영향 없으므로, $(1,1,-1)$와 $(-2,-2,-1)$의 각도를 보면 된다. $\theta := \angle APO$

$$\cos\theta = \frac{-2-2+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$ 이때, $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$



$$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{2}$$

문제 2.

(a) 두평면이 이루는 각은 두평면에 수직인 벡터들이 이루는 각과 같다.

따라서,

$$(\text{두평면이 이루는 각}) = \cos^{-1}\left(\frac{(3,-4,2)\cdot(3,1,2)}{|(3,-4,2)|\ |(3,1,2)|}\right)$$

$$= \underbrace{\cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}\right)} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{406}}\right)$$

- 법벡터를 모두 구하면 3점.
- 답이 맞으면 5점.

(b) 두 평면의 교선은 다음 연립방정식을 풀면 된다

$$\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ 3x+y+2z=6 \end{cases}$$

따라서 교선의 방정식은 $\underbrace{l:\ y=1,\ 3x+2z=5}$ 이다.

- 답이 맞으면 5점.

(c) 교선 l 위의 점은 매개변수 t를 사용해서 $\underbrace{\left(t, 1, \frac{5-3t}{2}\right)}$로 쓸수 있다.

그리고 이 점과 점 $Q=(0,1,0)$ 사이의 거리가 최소가 되게 하려면,

$$\sqrt{t^2+\left(\frac{5-3t}{2}\right)^2}$$

가 최소가 되는 t를 찾으면 된다. $t=\frac{15}{13}$ 일때 최소가 되고, 구하고자 하는 교선 l위의 점은 $\underbrace{\left(\frac{15}{13}, 1, \frac{10}{13}\right)}$ 이다.

- l 위의 점을 매개변수를 사용해서 나타내면 5점
- 답이 맞으면 10점.

문제 3

(a)

3점 : CBS 부등식을 기술함
10점 : 증명이 올바른 경우

sol) 벡터 v_1, v_2에 대하여, CBS 부등식은 $\underline{|v_1 \cdot v_2|^2 \le |v_1|^2 \cdot |v_2|^2}$

$\underline{(|v_1 \cdot v_2| \le |v_1| \cdot |v_2|)}$

$$v_1 := \left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}, \cdots, \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}\right)$$

$$v_2 := (\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \cdots, \sqrt{y})$$

로 두면, 잘 정의된다. ($y_i > 0$)

CBS부등식에 넣으면,

$$|v_1 \cdot v_2|^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

$$\le \left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}\right)(y_1 + \cdots + y_n)$$

$$= |v_1|^2 \cdot |v_2|^2$$

$(y_1 + \cdots + y_n)$을 양변에 나누어 증명을 끝낸다.

문제 3.

(b)

5점 : 최솟값의 후보를 옳게 구함
5점 : 최소가 되는 (x, y, z)를 구함

sol) $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$로 고치고, $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$, $y_1=x,\ y_2=y,\ y_3=z$ 로

두면, (a)에 의해서,

$$\frac{(1+2+3)^2}{x+y+z} \le \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}.$$

$x+y+z=3$ 이므로,

$$12 \le \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}.$$

즉, 12가 최솟값의 후보

등식이 되려면, (a)에서 정의한 벡터 v_1, v_2가 평행해야 한다.

지금의 $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{2}{\sqrt{y}}, \frac{3}{\sqrt{z}}\right)$, $v_2 = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ 에서

$cv_1 = v_2$ 를 풀면, $c = x,\ 2c = y,\ 3c = z$.

즉, $(x,y,z) = c(1,2,3)$ 인데, $x+y+z=3$이므로,
$c+2c+3c=3 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$\therefore (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

(실제로 대입해보면 최솟값 12를 얻는다.)

기말고사 4번 풀이 및 채점기준

(a) 주어진 초평면의 법선 벡터는 $\mathbf{n} = (1, 2, 3, 4)$이므로, 4차원 공간 상의 점 P를 초평면 $\mathbf{n} \cdot X = 0$에 내린 수선의 발은

$$H = P - \frac{P \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}$$

이고, $L(P)$와 P의 중점이 H이므로

$$\begin{aligned} L(P) = 2H - P &= P - 2\frac{P \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} \\ &= P - \frac{p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4}{15}(1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

- $L(P)$ 유도 15점, 부분점수 없음.
  - 논리적 비약이 심한 경우 10점 감점.
  - 계산 실수의 경우 5점 감점. 10점 감점과 5점 감점은 중복으로 적용하지 않음.
  - 정답과 동등한 다른 표현들도 정답으로 인정.

(b) 선형사상 L에 대응하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & L(\mathbf{e}_3) & L(\mathbf{e}_4) \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 11 & -6 & -8 \\ -3 & -6 & 6 & -12 \\ -4 & -8 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$는 $\mathbb{R}^4$의 표준 단위벡터이다.

- A 계산 5점, 부분점수 없음.
  - 논리적 비약이 심한 경우 0점.
  - 계산 실수의 경우 2점 감점.
    - 예시: 논리적 비약이 없으나 계산 과정에서 행렬의 16개 entry 가운데 4개 미만이 틀림.

기말고사 5번 풀이 및 채점기준

행렬의 특정 열을 상수배하여 다른 열에 더해도 행렬식의 값은 같으므로,

$$\begin{aligned}\det B_k &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_{2022}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \cdots - 2022\mathbf{a}_{2022} & \cdots & \mathbf{a}_{2022}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & (-1)^{k-1}k\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2022}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이다. 그런데 마지막 식은 $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_{2022}\end{pmatrix} = \det A$의 $(-1)^{k-1}k$ 배와 같으므로, $\det B_k = (-1)^{k-1}k \cdot (-1) = (-1)^k k$이다. 따라서

$$\det B_1 + \cdots + \det B_{2022} = -1 + 2 - 3 + \cdots + 2022 = 1011.$$

- 모든 $k = 1, 2, \ldots 2022$에 대하여 $\det B_k$를 올바르게 계산하였으면 15점.
  - 논리적 비약이 심한 경우 10점 감점.
  - $k = 1, 2$와 같은 초기 항만 계산한 경우, 충분한 추가 설명이 없을 시 10점 감점.
  - 계산 실수의 경우 5점 감점. 10점 감점과 5점 감점은 중복으로 적용하지 않음.
- $\det B_1 + \cdots + \det B_{2022}$을 정확히 계산하면 5점, 부분점수 없음.

기말고사 6번 풀이 및 채점기준

주어진 곡선 $X(t)$에 대하여,

$$X'(t) = (-2\sin t, 1, 2\cos t), \quad X''(t) = (-2\cos t, 0, -2\sin t)$$

이므로

$$X(0) = (2,0,1), \quad X'(0) = (0,1,2), \quad X''(0) = (-2,0,0)$$

이다. 따라서 접촉평면은 $\big((x,y,z) - X(0)\big) \cdot \big(X'(0) \times X''(0)\big) = 0$이며, 이를 간단히 정리하면

$$-2y + z = 1$$

을 얻는다.

이제 점 $P = X(0) = (2,0,1)$을 고정하자. 접촉평면의 법선 벡터는 $\mathbf{n} = (0,-2,1)$이므로, 벡터 $\overrightarrow{PQ} = (-1,3,1)$를 벡터 $\mathbf{n}$에 정사영한 결과는

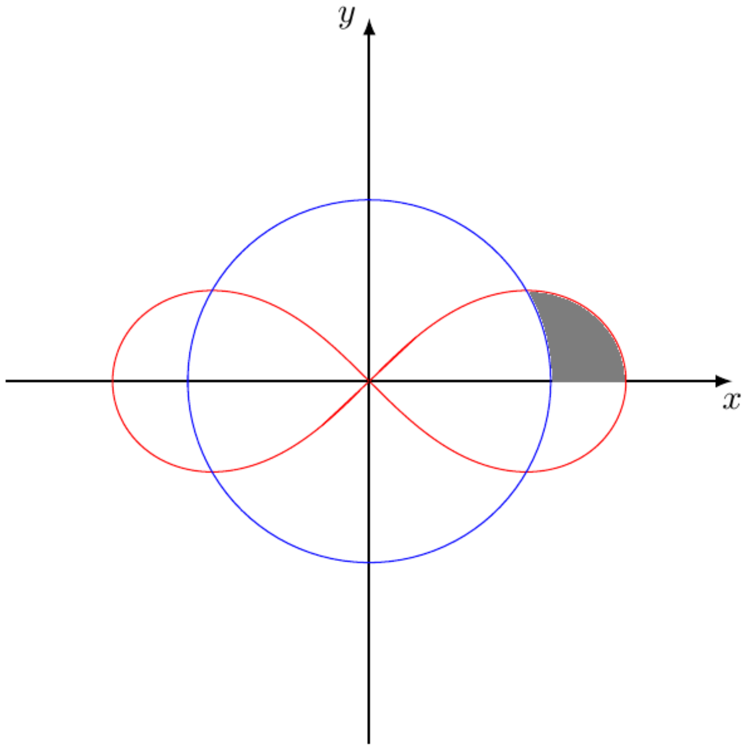
$$\frac{(-1,3,1)\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = -\mathbf{n} = (0,2,-1)$$

가 된다. 이 벡터의 길이는 $\sqrt{5}$이므로, 구하고자 하는 거리는 $\sqrt{5}$이다.

- 접촉평면 Π를 올바르게 구하면 15점.
  - $X(0), X'(0), X''(0)$의 올바른 계산에 9점. (개당 3점)
  - 접촉평면의 식에 6점.
  - 계산 실수의 경우 해당 항목 점수 없음.
  - 기타 다른 방법을 이용하여 접촉평면을 올바르게 구하였어도 15점.
- Q와 Π 사이의 거리를 올바르게 구하면 5점, 부분점수 없음.

7.

구하려는 넓이는 다음 그림에서 색칠된 영역의 4배이다.



그런데, 색칠된 영역은 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{6}$에서, 부등식

$$2 \le r \le \sqrt{8\cos 2\theta}$$

로 정의되는 영역이므로, 넓이가 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(8\cos 2\theta - 4)d\theta$로 주어진다. 따라서, 문제에서 구하는 넓이는

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(8\cos 2\theta - 4)d\theta = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

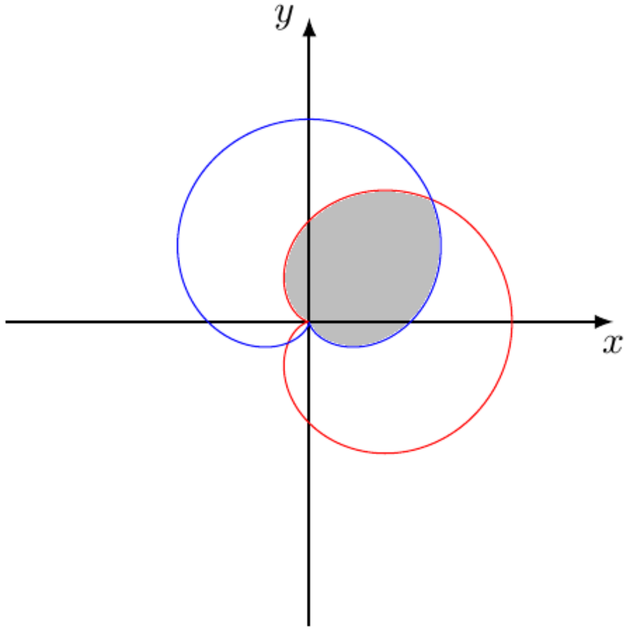
이다.

[채점기준]

- 그림 또는 부등식으로써 문제에서 주어진 영역을 잘 설명했으면 **+10점**
- 넓이를 올바르게 계산했으면 **+10점**

8.

영역 R는 다음 그림에서 색칠된 영역이다.



이때 영역 R의 둘레는 $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$에서 곡선 $X(\theta) = (1+\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$와, $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$에서 곡선 $Y(\theta) = (1+\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$의 합이다. 그런데, 두 곡선은 직선 $y = x$에 대해 대칭관계이므로 길이가 서로 같다. 따라서 곡선 X의 길이의 2배를 구하면 영역 R의 둘레의 길이가 된다. 즉, 영역 R의 둘레의 길이는

$$
\begin{aligned}
2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} |X'(\theta)|d\theta &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2+2\sin\theta}d\theta \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{2+2\cos t}dt \quad (t = \pi/2 - \theta) \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\frac{t}{2}dt \\
&= 8\left[\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= 8\left(1 - \sin\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}
$$

이다.

[**채점기준**]

- 영역 R가 무엇인지 그림으로 설명하거나, 영역 R의 둘레를 잘 매개화했으면 **+10점**
- 둘레의 길이를 올바르게 구했으면 **+10점**

  ∗ 단, 계산이 틀렸으나 극좌표 곡선 $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$의 길이가

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

  로 주어짐을 표현했으면 부분점수 **5점**

9.

(a)

$X'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$이므로,

$$\begin{aligned}
|X'(t)| &= \sqrt{4+4-8\sin t\sin 2t - 8\cos t\cos 2t} \\
&= \sqrt{8-8(2\sin^2 t\cos t + 2\cos^3 t - \cos t)} \\
&= \sqrt{8-8\cos t} \\
&= 4\left|\sin\frac{t}{2}\right| \\
&= 4\sin\frac{t}{2} \quad \left(\because 0 \le \frac{t}{2} \le \pi\right)
\end{aligned}$$

이다. 따라서 길이함수는

$$s = \int_0^t 4\sin\frac{u}{2}du = 8 - 8\cos\frac{t}{2}$$

로 주어진다. 여기서 $\cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{s}{8}$이고, $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$이므로,

$$\frac{t}{2} = \arccos\left(1-\frac{s}{8}\right),$$

즉, $t = 2\arccos\left(1-\frac{s}{8}\right)$이다. 따라서 곡선 X를 호의 길이로 재매개화한 것은

$$X\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{8}\right)\right)$$

이다.

[채점기준]

- 길이함수의 역함수 $t = 2\arccos\left(1-\frac{s}{8}\right)$를 잘 구했으면 **+10점**

(b)

(a)에서 $|X'(t)| = 4\sin\frac{t}{2}$임을 보였으므로, 곡선 X의 질량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_X \mu\,\mathrm{ds} &= \int_0^{2\pi} \mu(X(t))|X'(t)|dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4+1-4\cos t\cos 2t - 4\sin t\sin 2t)\,4\sin\frac{t}{2}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (5 - 4\cos t) 4 \sin\frac{t}{2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\left(9 - 8\cos^2\frac{t}{2}\right) \sin\frac{t}{2} dt \\
&= \int_1^{-1} -8(9 - 8u^2) du \quad (u = \cos\frac{t}{2}) \\
&= \int_{-1}^{1} (72 - 64u^2) du \\
&= 2\int_0^1 (72 - 64u^2) du \\
&= 2\left(72 - \frac{64}{3}\right) = \frac{304}{3}.
\end{aligned}
$$

[**채점기준**]

- 답을 올바르게 구했으면 **+15점**

  $*$ 단, 계산이 틀렸으나 곡선 X의 질량이 $\int_X \mu\, \mathrm{ds}$임을 표현했으면 부분점수 **5점**

#10 곡선의 매개화 $X(t) = (t,\ t\ln t - t)$

$X'(t) = (1,\ \ln t)$ +5

$X''\cancel{(t) = (0,\ \tfrac{1}{t})}$

곡률벡터 $K = \dfrac{1}{|(1,\ln t)|}\left(\dfrac{(1,\ln t)}{|(1,\ln t)|}\right)'$

$$= (1+(\ln t)^2)^{-\frac{1}{2}}\Big(-\tfrac{1}{2}(1+(\ln t)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\ln t\cdot\tfrac{1}{t},$$

$$-\tfrac{1}{2}(1+(\ln t)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\ln t\cdot\tfrac{1}{t}\cdot\ln t + (1+(\ln t)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\tfrac{1}{t}\Big)$$ +10

$\therefore K(1) = (0,1)$

$|K(1)| = 1$ +5

따라서 곡률반경은 1이고 접촉원의 중심은 $(1,-1)+(0,1)=(1,0)$ 이다.

따라서 접촉원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=1$ 이다. +5