#1

(풀이 1)

귀류법으로 일차종속이라고 가정하자.

일반성을 잃지 않고 $v_1 = a v_2 + b v_3$ $(a, b \in \mathbb{R})$ 라고 하자.

$$\begin{cases} 0 = v_1 \cdot v_2 = a \cdot |v_2|^2 + b\, v_3 \cdot v_2 = a\, |v_2|^2 \Rightarrow a = 0 \ (\because v_2 \neq 0) \\ 0 = v_1 \cdot v_3 = a\, v_1 \cdot v_3 + b\, |v_3|^2 = b\, |v_3|^2 \Rightarrow b = 0 \ (\because v_3 \neq 0) \end{cases}$$

$v_1 = a v_2 + b v_3 = 0$ 이므로 모순!

따라서, v_1, v_2, v_3 는 일차독립이다. +15.

※ 논리적 설명이 충분하지 않으면 −5점.
(e.g., $a|v_2|^2 = 0$ 이후 추가설명 없이 바로 모순이라고 한 경우 등.)

※ P.221의 정리 S.0.2 를 사용한 경우 마찬가지로 채점.

(풀이 2)

v_3 이 v_1, v_2에 직교하므로, $v_1 \times v_2 \,/\!/\, v_3$ 이다. +5

p.284의 정리 1.1.1에 의해, $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3$ 인데,
v_1, v_2는 0이 아닌 직교하는 두 벡터이므로, $v_1 \times v_2 \neq 0$ 이고,
$v_1 \times v_2, v_3$는 0이 아닌 나란한 벡터이므로, $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ 이다.

p.271의 정리 4.2.2 에 의해 v_1, v_2, v_3 는 일차독립이다. +10

※ $v_1 \times v_2 = \pm v_3$ 라고 한 경우 −5점.

※ 사소한 실수 −2점. (명확한 오타 등)

※ 증명 없이 $\{v_1, v_2, v_3\}$를 적당한 직교좌표축으로 대응시킬 수 있다고 서술하면 0점. (해당 명제를 증명하는 것이 문제)

※ $\{a v_2 + b v_3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ 의 평면에 v_1 가 속하지 않는 것을 충분히 엄밀하게 서술하지 않으면 점수 없음 (해당 명제를 증명하는 것이 문제)

2.

[풀이]

점 P는 직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=z+2$ 위의 점이므로, $P=(-2+3t,-1+2t,-2+t)$인 실수 t가 존재한다. 이를 평면의 방정식 $x+2y+3z=0$에 대입하면

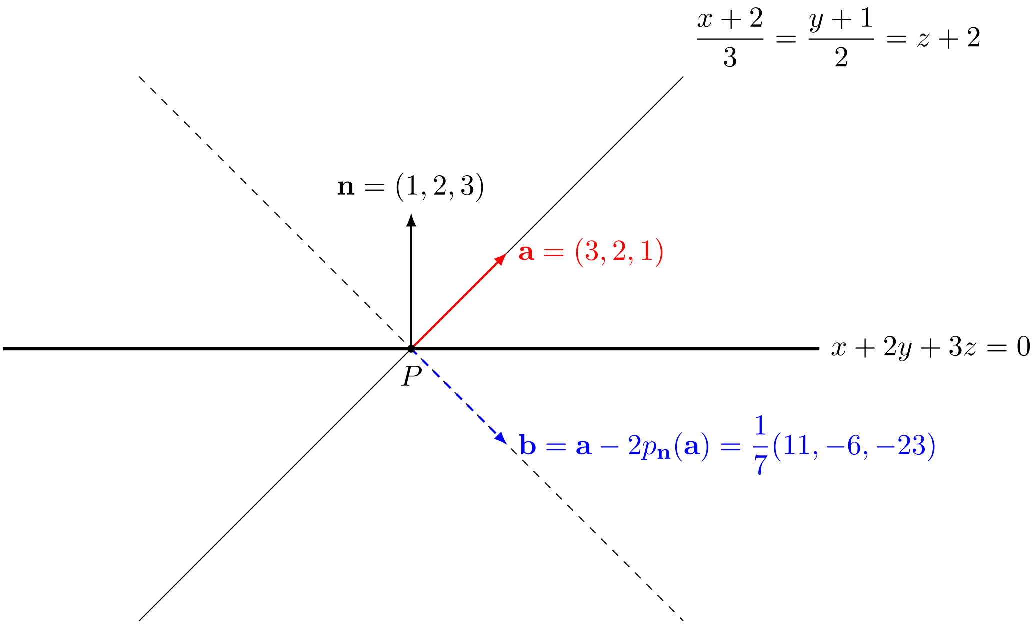
$$-2+3t+2(-1+2t)+3(-2+t)=0$$

에서 $t=1$을 얻는다. 따라서, $P=(1,1,-1)$이다.

한편, $\mathbf{n}=(1,2,3)$, $\mathbf{a}=(3,2,1)$이라고 놓자. 즉, $\mathbf{n}$은 평면 $x+2y+3z=0$의 법선벡터이고, $\mathbf{a}$는 직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=z+2$의 방향벡터이다. 이때 벡터 $\mathbf{a}$를 평면 $x+2y+3z=0$에 대해 대칭시킨 벡터를 $\mathbf{b}$라고 하면,

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}-2p_{\mathbf{n}}(\mathbf{a})=\mathbf{a}-2\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}=(3,2,1)-2\frac{10}{14}(1,2,3)=\frac{1}{7}(11,-6,-23)$$

이다.



그런데, 빛이 $\mathbf{a}$ 방향으로 입사했으면 $\mathbf{b}$ 방향으로 반사되며, $-\mathbf{a}$ 방향으로 입사했으면 $-\mathbf{b}$ 방향으로 반사된다. 따라서 빛이 꺾인 각도 θ $(0\le\theta\le\pi)$는 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 각의 크기이다. 그러면 $\sin\theta\ge 0$이므로,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{14^2}\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{7^4}}=\frac{20\sqrt{6}}{49}$$

이다.

[**채점기준**]

- 직선과 평면의 교점 P를 올바른 방법으로 제대로 구하면 **8점**
- $\sin\theta$의 값을 올바른 방법으로 제대로 계산하면 **12점**

  * θ 대신 $\pi-\theta$에 대해서 sin값을 구한 경우에도 **12점**을 부여함.

  * $\sin\theta$의 값을 잘못 계산한 경우, 중간과정에 해당하는 식 (ex. 벡터 $\mathbf{a}$를 평면에 대칭시킨 벡터가 $\mathbf{a}-2p_{\mathbf{n}}(\mathbf{a})$, $\sin\theta=\dfrac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$이고 $\cos\dfrac{\pi-\theta}{2}=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{n}||\mathbf{a}|}$ 등)이 있었다면 부분점수 **6점**을 부여함.
- 과정을 아예 쓰지 않은 경우에는 **0점**

#3. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ 가 일차종속이므로

$\mathbf{x}$는 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$를 포함하는 평면 위에 존재한다.) 6점

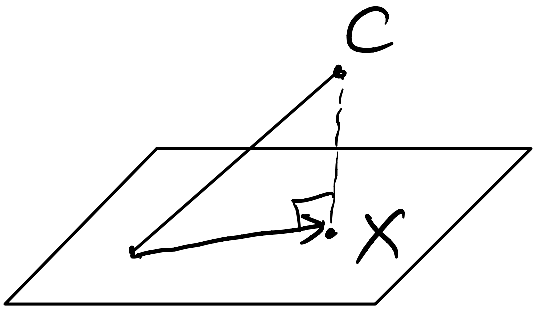
따라서 $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|$가 최솟값을 가지려면

$\mathbf{x}$는 점 C를 평면 위에 정사영시킨 점과 같아야 한다.) 6점

이 때, 평면의 방정식은 $x+2y+3z=0$ 이고

점 C와 평면 사이의 거리는 $\frac{6}{\sqrt{14}}$, 평면의 단위법선벡터는 $\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$ 이므로

$$\overrightarrow{XC} = \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}(1,2,3)$$



$$\therefore \mathbf{x} = \mathbf{c} - \overrightarrow{CX} = \frac{1}{7}(4,1,-2)$$) 8점.

별해: $\mathbf{x} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$. $(t, s \in \mathbb{R})$) 6점

$|\mathbf{x}-\mathbf{c}|$를 정리하여 완전제곱식으로 잘 표현하고,

등호조건을 올바르게 구한 경우.) 6점.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{7}(4,1,-2)$$) 8점.

※ 정사영 논리 대신 C-S 부등식이나 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=r^2$ 인

구가 평면과 접해야 한다는 논리를 적용해도 6점 인정.

※ 각 편미분 값이 0인 점을 최솟값으로 잡은 경우, 점수 X.

다만, 그렇게 구한 값이 극솟값이 됨을 잘 설명했다면 6점 인정.
(최솟)

4번[20점].

주어진 식으로부터 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 39 & 4 \\ -10 & 0 & -4 \\ 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

위 식을 $AB = C$라고 두면, 행렬식의 성질로부터 다음을 얻는다.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(C).$$

따라서 각각 구해보면, $\det(B) = 1$, $\det(C) = 520$이므로, $\det(A) = 520$이다. □

채점기준

1. 주어진 식을 3×3 정사각행렬의 식 $AB = C$ 꼴로 고치거나, A를 직접 구하려는 올바른 시도에 10점. 행렬식의 성질을 제대로 활용했으나 계산 실수를 한 경우에도 10점 부여.

2. 마지막 행렬식까지 계산 실수 없이 정답을 구하면 10점.

5번 모범답안

(a)

3차원 공간의 표준단위벡터를 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 로 쓰자. 벡터곱과 내적의 선형성에 의해 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i\,(i = 1, 2, 3)$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보이면 충분하다. 이제 $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$ 으로 두면

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{e}_1 \times ((b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{e}_3) \\
&= (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{e}_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{e}_2 \\
&= b_1c_1\mathbf{e}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{e}_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{e}_2 - b_1c_1\mathbf{e}_1 \\
&= c_1\mathbf{b} - b_1\mathbf{c} \\
&= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}
\end{aligned}$$

이다. 같은 방식으로 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ 혹은 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$인 경우에도 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

(b)

풀이 1. 문제 (a)와 행렬곱의 성질로부터

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\left(\mathbf{b}^t\mathbf{x}\right) - \mathbf{b}\left(\mathbf{a}^t\mathbf{x}\right) \\
&= \left(\mathbf{a}\mathbf{b}^t - \mathbf{b}\mathbf{a}^t\right)\mathbf{x} = \left(\mathbf{a}\mathbf{b}^t - \left(\mathbf{a}\mathbf{b}^t\right)^t\right)\mathbf{x}
\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbf{a}\mathbf{b}^t - \left(\mathbf{a}\mathbf{b}^t\right)^t \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

이다.

풀이 2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 으로 두자.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{a}\mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

이므로, 주어진 선형사상을 L이라 하면 (a)에 의해

$$L(\mathbf{e}_1) = b_1\mathbf{a} - a_1\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_3 - a_1b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

이고, 같은 방식으로

$$L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ L(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이다. 이제 이들을 열(column)로 갖는 행렬이 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$가 된다.

풀이 3. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 으로 두자.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{a}\mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

이므로 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = (-1, 8, 3)$ 이다. 따라서 주어진 선형사상을 L이라 하고 $\mathbf{x} = (x, y, z)$로 두면 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times (-1, 8, 3) = (3y - 8z, -3x - z, 8x + y)$, 곧

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

으로부터 행렬

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

를 얻는다.

채점 기준

5.(a)

벡터곱의 정의를 이용한 풀이의 경우, 벡터곱 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$의 계산 과정을 생략하면 **5점** 감점.
벡터곱의 선형성을 이용한 풀이의 경우, 선형성 또는 분배법칙을 언급하지 않으면 **5점** 감점.

5.(b)

행렬 $\mathbf{a}\mathbf{b}^t$로부터 $a_ib_j\,(i, j = 1, 2, 3)$를 구하는 것에 **5점**, 이로부터 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$를 구하는 것에 **10점**.
$\mathbf{a} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$와 같이 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$를 특정한 벡터로 두고 푸는 경우 a_ib_j 들을 구하는 항목에 점수 없음.
표준단위벡터의 함숫값을 행으로 갖는 행렬을 답으로 적거나 벡터곱의 순서를 바꾸어 계산하는 등 행렬 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 혹은 그것을 구하는 과정에 오류가 있는 경우 **5점** 감점.

$t=0$ 에서 $X(0)=(1,0,0)$ 이다.

$X'(t) = \left(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\cos t+\sin t),\ 2t\right)$

$X'(0) = (1,1,0)$ 이므로 /4

접선의 방정식은

$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1},\ z=0$ 즉, $x-1=y,\ z=0$ 이다.

(or $X(0)+t\cdot X'(0) = (t+1,\ t,\ 0)\ \ t\in\mathbb{R}$) /4

$X''(t) = \left(-2\sin t\cdot e^t,\ 2\cos t\cdot e^t,\ 2\right)$

$X''(0) = (0,2,2)$ /4

$X'(0)\times X''(0) = (2,-2,2)$ 이므로 /4

평면의 방정식은

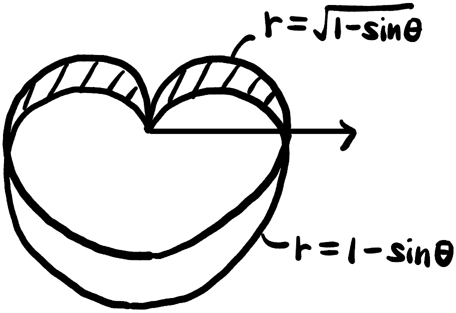
$\left((x,y,z)-X(0)\right)\cdot(2,-2,2)=0$ (* 여기까지만 맞아도 정답으로 인정)

$x-y+z=1$ 이다. /4

* 평면의 방정식 $=\{X(0)+aX'(0)+bX''(0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

으로 써도 인정.

#7.



주어진 영역의 넓이는

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\sin\theta)\,d\theta - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\sin\theta)^2\,d\theta \quad +10$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin\theta - \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} \quad +5$$

* 식이 틀린 경우,

1) $r \geq 1-\sin\theta$, $r \leq \sqrt{1-\sin\theta}$ 의 개형을 잘 그린 경우 +5
(혹은 $0 \leq \theta \leq \pi$ 를 잘 도출한 경우)

2) 1)의 개형도 틀렸지만, 극좌표계 넓이 공식을 잘 알고 있으면 +3

곡선 X : $X(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ $(0 \le t \le 1)$.

---

(1) $l = \int_0^1 |X'(t)| dt$ ┘ +5

$= \int_0^1 (2t^2+1)\, dt = \frac{5}{3}$ ┘ +10.

---

(2) $m = \int_X \mu\, ds = \int_0^1 \rho(X(t)) \cdot |X'(t)|\, dt$ ┘ +5

$= \int_0^1 3t^4 \cdot (2t^2+1)\, dt$

$= \frac{51}{35}$ ┘ +10

---

(3) $\bar{x} = \frac{1}{m}\int_X \mu x\, ds = \frac{1}{m}\int_0^1 \rho(X(t)) \cdot x_1(t) \cdot |X'(t)|\, dt$ ┘ +5

$= \frac{1}{m}\int_0^1 3t^4 \cdot t \cdot (2t^2+1)\, dt$

$= \frac{175}{204}$ ┘ +10

(계산).

- (2)의 질량계산이 틀렸을 경우 (3)의 계산에 대한 점수 받을 수 없음.
- (1), (2), (3) 모두 계산에 대한 부분점수 없음.

수학 1 기말고사 9번 답안 및 채점기준

9(a) **매개화 2점 + 곡률 계산 8점 = 총 10점**

주어진 곡선 $y = x^2$을 알맞게 매개화한 경우 **2점**.

알맞은 매개화의 예시:

$$X(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$
$$X(t) = (\tan\theta, \tan^2\theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

매개변수의 범위에 대한 언급이 없어도 2점 부여.

틀린 매개화의 예시:

$$X(t) = (\pm\sqrt{t}, t), \quad t \geq 0$$
$$X(t) = (\cos\theta, \cos^2\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

곡률 계산을 알맞게 한 경우 **8점**이며, 뒤의 풀이에 열겨된 곡률 계산에 대한 공식 중 하나라도 맞는 것을 서술한 경우 8점 중 3점 부여, 이 후 계산 실수 없이 곡률 계산을 맞게 한 경우 만점.

곡률 계산에 대한 여러 풀이:

(풀이 1) 곡률 벡터의 정의와 곡률이 곡률 벡터의 크기임을 이용한 풀이.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}(t) &= \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)' \\
&= \frac{X''(t)}{|X'(t)|^2} - \frac{(X'(t)\cdot X''(t))}{|X'(t)|^4}X'(t) \\
\kappa(t) &= \frac{1}{|X'(t)|}\left|\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'\right| \\
&= \frac{\sqrt{|X'(t)|^2|X''(t)|^2 - (X'(t)\cdot X''(t))^2}}{|X'(t)|^3} \\
&= \frac{|X''(t)||\sin\alpha|}{|X'(t)|^2}
\end{aligned}$$

단, α는 $X'(t)$와 $X''(t)$가 이루는 각도이다.

(풀이 2) 좌표 평면에서 매개화된 곡선의 곡률 계산 공식을 이용한 풀이.
좌표 평면 위에서 매개화된 곡선 $X(t) = (x(t), y(t))$의 t에서의 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

(풀이 3) 좌표 평면 위의 곡선을 좌표 공간 위의 곡선으로 생각한 풀이.
좌표 평면 위의 곡선 $X(t) = (t, t^2)$의 곡률은 좌표 공간 위의 곡선 $X(t) = (t, t^2, 0)$의 곡률과 일치하므로, 다음의 공식을 활용하여 계산할 수 있다.

$$\kappa(t) = \frac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^3}$$

단, 외적을 이용한 공식을 좌표 평면에서 사용하는 경우 곡률 계산에 해당하는 5점이 감점됨.

(풀이 4) 좌표 평면 위의 함수의 곡률 계산 공식을 이용한 풀이.
좌표 평면 위의 함수 $y = f(t)$로 정의된 곡선의 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t))^{3/2}}$$

위의 풀이 중 (풀이 1)로부터

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \left(-\frac{4t}{(1+4t^2)^2}, \frac{2}{(1+4t^2)^2}\right)$$
$$\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

를 얻을 수 있으며, $t = \dfrac{1}{2}$를 대입하면

$$\boldsymbol{\kappa}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \kappa\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore X(t) = (t, t^2),\ t \in \mathbb{R},\ \kappa\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

9(b) **접촉원의 반지름 3점 + 접촉원의 중심 7점 = 총 10점**

접촉원의 반지름은 곡률 반경, 즉 곡률의 역수와 같으므로

$$r = \frac{1}{\kappa(1/2)} = \sqrt{2}.$$

답이 맞으면 3점, 부분점수 없음.

접촉원의 중심은 다음과 같은 과정을 통해 구할 수 있다.

(풀이 1) 접촉원의 중심은 정의에 의하여

$$P + \frac{\boldsymbol{\kappa}(t)}{\kappa(t)^2}$$

이다. 따라서 $t = \dfrac{1}{2}$를 대입하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \frac{(-1/2, 1/2)}{(1/\sqrt{2})^2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

(풀이 2) 접촉원의 중심은 점 $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$로부터 속도벡터와 수직인 방향 $(-1, 1)$ 상에 있으며, $y = x^2$의 위쪽에 위치하여야 하므로 접촉원의 중심은

$$P + r\frac{(-1,1)}{|(-1,1)|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right).$$

단, r은 접촉원의 반지름인 $\sqrt{2}$.

(기타 풀이) 논리적으로 알맞게 서술한 경우 점수 부여.

9(c) **(a), (b)에서 계산한 값에 근거하여 단위속력을 가지는 곡선으로 잘 매개화한 경우 3점 + 답이 실제로 맞는 경우 7점 = 총 10점**

점 $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$에서의 접촉원은 중심이 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 반지름이므로

$$Y(t) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos t, \frac{5}{4} + \sqrt{2}\sin t\right),\ 0 \le t < 2\pi$$

로 매개화가 가능하다. 이를 단위속력을 가지는 곡선, 즉 호의 길이로 재매개화한 곡선을 생각하려면

$$|Y'(t)| = \sqrt{2}, \quad \int_0^t |Y'(u)|\,du = s = \sqrt{2}t$$

의 s로 재매개화하면 된다. 따라서,

$$\widetilde{Y}(s) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{5}{4} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right),\ 0 \le t < 2\sqrt{2}\pi$$

가 (b)의 접촉원을 단위속력을 가지는 곡선으로 매개화한 것이 된다.

틀린 매개화의 예시:

$$Y(t) = \left(t - \frac{1}{2}, \pm\sqrt{2 - t^2} + \frac{5}{4}\right),\ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$$

이는 곡선 2개를 매개화한 것이므로, 접촉원을 매개화한 것이 되지 못한다.