문제 1채점기준

(a) 거짓.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 일때

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) 참

$\det A^t = \det A$ 이고. $\det AB = \det A \det B$ 이므로

$\det A^t A = \det A^t \det A = (\det A)^2$

(c) 거짓

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일때

$\det(A+B) = 1 \neq 0 = \det A + \det B$

(d) 참

AB가 가역일 필요충분조건은 $\det AB \neq 0$이다.

이때 A, B가 n차 정사각행렬 이므로

$\det AB = \det A \det B$ 이다.

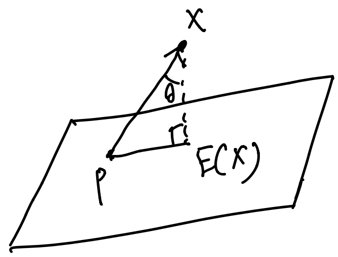
따라서 $\det A \neq 0$ 이므로, A도 가역행렬이다.

※ 부분점수 없음.

※ 참·거짓만 맞은 경우 0점.

문제 2채점기준

(a)



<그림>

$X-p$와 n이 이루는 각을 θ라고 하자.

$E(X)$는 점 X에서 평면 α에 수직인 방향으로 $|X-p|\cos\theta$ 만큼 내린 점이므로

$E(X) = X - |x-p|\cos\theta\, n$ 이다.

이때 $|n|=1$ 이므로

$\therefore E(X) = X - (|x-p||n|\cos\theta)n = X + ((p-x)\cdot n)n.$

※ 부분점수 없음.

(b) (a)에서 정의한 것처럼 X를 평면에 정사영한 점을 $E(X)$라고 하자.

평면 $x+2y+3z=0$이 원점을 지나므로,

$$E(X) = X - \frac{1}{14}\left(X\cdot(1,2,3)\right)(1,2,3)$$ 이다.

이때 $\begin{cases} E(i) = i - \frac{1}{14}(1,2,3) \\ E(j) = j - \frac{2}{14}(1,2,3) \\ E(k) = k - \frac{3}{14}(1,2,3) \end{cases}$ 이므로

$$A = I_3 - \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$ 이다.

┘5점.

$\det(A^{100} - I_3) = \det(A - I_3)\det(A^{99} + \cdots + I_3)$ 이고,

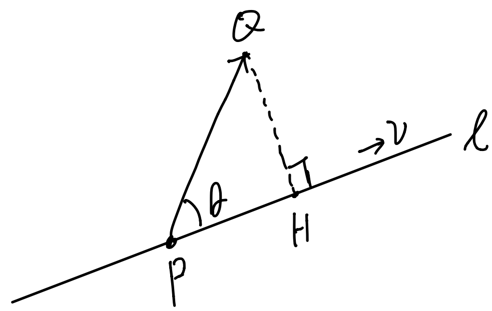
$\det(A - I_3) = \frac{-1}{14}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 0$ 이므로

$\therefore \det(A^{100} - I_3) = 0.$ ┘10점.

※ 풀이 없이 답만 작성하면 0점.

※ $A^2 = A$임을 이용해 문제를 해결한 경우 감점 없음.

문제 3채점기준



<그림>

Q에서 직선 l에 수선을 그었을 때
수선의 발을 H라 하면, $\overline{QH}$의 길이가
직선 l과 Q의 최단거리이다.
이때 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PH}$가 이루는 예각의 크기를
θ라 하면
$\overline{QH} = |\overrightarrow{PQ}|\sin\theta$ 이다.
이때 $\overrightarrow{PH}$는 $\vec{v}$와 나란하므로

최단거리 : $\overline{QH} = |\overrightarrow{PQ}|\sin\theta = \dfrac{|\overrightarrow{PQ}||\vec{v}|\sin\theta}{|\vec{v}|} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

※ 부분점수 없음.

4. 주어진 행렬을 계산하면

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b-2c-2d & b-d \\ 4c+4d & 2d \end{pmatrix}$$ 임을 알 수 있다

$L(a, b, c, d) = (2a+2b-2c-2d,\ b-d,\ 4c+4d,\ 2d)$

가 성립하므로 L에 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 이다

y_1, y_2, y_3 y_4 각 2점

행렬표현 1점

5 x_1' 와 x_2-x_1 이 평행하고 $|x_1'|=1$ 이므로

$x_2-x_1 = c x_1'$ 이다. 한편 $|x_1'|^2 = x_1' \cdot x_1' = 1$

이므로 양변을 미분하면 $2x_1'' \cdot x_1' = 0$ 임을

알 수 있다. 이를 이용하여

$\{x_1' \cdot (x_2-x_1)\}' = x_1'' \cdot (x_2-x_1) + x_1' \cdot (x_2-x_1)'$

$= x_1'' \cdot c x_1' + x_1' \cdot x_2' - |x_1'|^2 = x_1' \cdot x_2' - 1$ 이다

$x_1'' \cdot (x_2-x_1) = 0$ 의 근거 +10점

풀이에 문제 없으면 +10점

6. 먼저 $V = |\det(u, v, w)|$ 이고

$u+v+w$, $u+2v+3w$, $u-v+w$ 로 만들어지는 부피를 V'

이라 하면 $V' = |\det(u+v+w, u+2v+3w, u-v+w)|$

임을 알수있다. 행렬식의 성질을 이용하면

$|\det(u+v+w, u+2v+3w, u-v+w)|$

$= |\det(2v, u+2v+3w, u-v+w)|$

$= |\det(2v, u+3w, u+w)|$

$= |\det(2v, -2w, u+w)|$

$= |\det(2v, -2w, u)| = 4|\det(u, v, w)|$

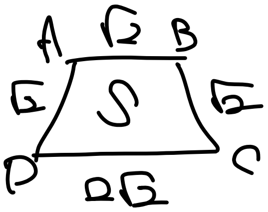
임을 알 수 있으므로 $V' = 4V$ 이다

$V' = |\det(u+v+w, u+2v+3w, u-v+w)|$ (0점.

$V' = 4V$ (0점 사소한 실수 -1점

7. 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\times$ 밑면 $\times$ 높이 이다

$|\overline{AB}|=\sqrt{2}$ $|\overline{BC}|=\sqrt{2}$ $|\overline{CD}|=2\sqrt{2}$ $|\overline{DA}|=\sqrt{2}$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 임을

이용하면 

꼴 임을 알고 넓이 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다

높이 h는 P와 $x+y+z=1$ 사이의 거리 $h=\frac{5}{\sqrt{3}}$ 이다

따라서 부피 $V=\frac{1}{3}\times S\times h=\frac{5}{2}$ 이다

S, h, V 각 배점 $\quad$ $V=V_1+V_2$

삼각뿔의 부피로 쪼개서 풀 경우 각 부피들 배점

8. $X(\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = (\cos\theta - \cos^2\theta,\ \sin\theta - \sin\theta\cos\theta)$

$\Rightarrow\ x'(\theta) = (-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta,\ \cos\theta - \cos 2\theta)$

$\Rightarrow\ x'(\frac{\pi}{2}) = (-1,\ 1)$, 따라서 기울기는 -1이다.

$x'(\theta) = (-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta,\ \cos\theta - \cos 2\theta)$: +10

$x'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 1)$, 따라서 기울기는 -1. : +5

9. $r(\theta) = 8\sin^3\frac{\theta}{3} \Rightarrow r'(\theta) = 8\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$

$\Rightarrow l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^2\frac{\theta}{3}\, d\theta = \pi - 3.$

$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\theta$: +5

$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^2\frac{\theta}{3}$: +5

$l = \pi - 3$: +10

10. $\dfrac{dx}{dt} = 1-\cos t, \quad \dfrac{dy}{dt} = \sin t$

$\Rightarrow \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2\sin\dfrac{t}{2}$

$y = 1-\cos t = 2 - 2\cos^2\dfrac{t}{2}$

$\Rightarrow$ 질량 $m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt$ 이고,

$\displaystyle\int_0^{2\pi} y\mu\,ds = \int_0^{2\pi} \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt$ 이다.

따라서 y의 질량중심은 $\dfrac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 2\sin\frac{t}{2}\,dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt} = \dfrac{8}{5}$ 이다.

$\dfrac{ds}{dt} = 2\sin\dfrac{t}{2}$: +5

질량 $m = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2-2\cos^2\frac{t}{2}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} y\mu\,ds = \int_0^{2\pi}\left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)^2\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt$

: +5

y의 질량중심 계산 : +5

11. $X(t) = (t, \ln(\sin t)) \quad (0 < t < \pi).$

$\Rightarrow x'(t) = \left(1, \dfrac{\cos t}{\sin t}\right), \quad |x'(t)| = \dfrac{1}{\sin t}$

$\Rightarrow \dfrac{x'(t)}{|x'(t)|} = (\sin t, \cos t)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x'(t)}{|x'(t)|}\right)' = (\cos t, -\sin t)$

$\Rightarrow K(t) = \dfrac{1}{|x'(t)|}\left(\dfrac{x'(t)}{|x'(t)|}\right)' = (\sin t \cos t, -\sin^2 t)$

$\Rightarrow K\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, -1).$

$K(t) = \dfrac{1}{|x'(t)|}\left(\dfrac{x'(t)}{|x'(t)|}\right)'$: +5

$K(t) = (\sin t \cos t, -\sin^2 t)$: +5

$K\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$: +5