수학 1 기말고사 시험지1

시험일정: 2021년 7월 28일 (수) 18:10 – 19:10(60분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (시험지1 총점: 100점)

문제 1. [20점] A, B, C는 n차 정사각행렬이고, I_n은 n차 항등행렬일때, 다음 명제들의 참, 거짓을 판정하고 간단한 이유를 쓰시오.

(a) (5점) $AB = 0$이면 $BA = 0$이다.

(b) (5점) $\det(A^t A) = (\det\, A)^2$

(c) (5점) $\det(A + B) = \det\, A + \det\, B$

(d) (5점) AB가 가역행렬이면 A도 가역행렬이다.

문제 2. [30점] $\mathbb{R}^3$ 상의 점 P를 지나고 단위벡터 $\mathbf{n}$에 수직인 평면을 α라고 하자. 이때 $\mathbb{R}^3$ 상의 점 X에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) X를 평면 α로 정사영한 점을 $E(X)$라고 하자. 이때 $E(X) = X + ((P - X) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$임을 보이시오.

(b) (15점) $\mathbb{R}^3$ 상에서 평면 $x+2y+3z = 0$으로의 정사영을 나타내는 선형사상이 있다. 이 선형사상에 대응되는 행렬 A를 구하고, $\det(A^{100} - I_3)$를 구하시오.

문제 3. [15점] $\mathbb{R}^3$ 상의 점 P를 지나고 $\mathbf{v}$와 나란한 직선을 l이라 하자. 이때 $\mathbb{R}^3$ 상의 점 Q와 직선 l 사이의 최단 거리가 $|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|/|\mathbf{v}|$임을 보이시오.

문제 4. [15점] $\mathbb{R}^4$에서 다음과 같이 행렬의 곱으로 정의된 선형변환 $L(a,b,c,d) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$을 생각하자.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

선형변환 L에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 5. [20점] 평면 위에 미분가능한 곡선 $\mathbf{X_1}$과 $\mathbf{X_2}$가 있다. 모든 t 에 대해 벡터 $\mathbf{X_1}'(t)$와 벡터 $\mathbf{X_2}(t) - \mathbf{X_1}(t)$이 평행하고 $|\mathbf{X_1}'(t)| = 1$일 때,

$$\{\mathbf{X_1}'(t) \cdot (\mathbf{X_2}(t) - \mathbf{X_1}(t))\}' = \mathbf{X_1}'(t)\mathbf{X_2}'(t) - 1$$

임을 보이시오.