2021학년도 1학기

수학 1

기말고사 모범답안 및 채점기준

일시 : 2021. 6. 5.(토)

1번

(a) $xe_{12} + ye_{13} + ze_{24} + we_{34} = 0 \quad \cdots \quad (*)$

$x + y = 0, \quad x + z = 0, \quad y + w = 0, \quad z + w = 0$

$\Rightarrow x = w = 1, \quad y = z = -1$ 이면 $(*)$ 만족.

따라서 $e_{12}, e_{13}, e_{24}, e_{34}$ 는 일차종속.

(b) $xe_{12} + ye_{13} + ze_{14} + we_{34} = 0 \quad \cdots \quad (*)$

$\Rightarrow x + y + z = 0, \quad x = 0, \quad y + w = 0, \quad z + w = 0$

$\Rightarrow y = -z = -w$ 이므로 $2y = 0 \Rightarrow y = 0, \ z = 0, \ w = 0.$

따라서 $(*)$ 을 만족하는 해는 자명한 해 뿐이다.

$\Rightarrow e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{34}$ 는 일차독립.

채점기준

i) a), b) 에서 방정식 $(*)$ 을 세우는 데에 각 5점.

행렬식을 이용한 경우, 행렬을 올바르게 적으면 각 5점.

ii) 연립방정식 계산 후 일차독립 / 일차종속 판정하는 데에 5점.

행렬식을 이용한 경우, 올바른 계산 과정을 통해 판정해야 5점.

iii) 과도한 계산 생략 (방정식/행렬식만 적고 바로 결론을 내리는 등) 은

ii) 에서 점수 없음.

2021학년도 1학기 수학 1 기말고사 2번 문제 모범답안 및 채점기준

[**모범답안**] 먼저 벡터 a와 벡터 b가 수직이므로 $|c| = |a||b| = \sqrt{6}$이다.

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a,$$
$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a \times (b+c) - a \times c = a \times b = c$$

이므로 선형사상 L을 나타내는 행렬을 A라 할 때

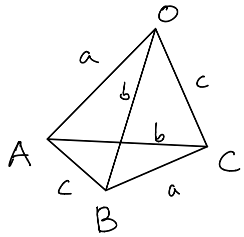
$$A = \begin{pmatrix} a & c & a \times c \end{pmatrix}$$

이고 행렬식은 벡터 a와 c가 수직이므로

$$\det A = (a \times c) \cdot (a \times c) = |a \times c|^2 = |a|^2|c|^2 = 18$$

이다.

[**채점기준**]
-주어진 선형사상에 대응하는 행렬을 올바르게 표현하면 10점
-행렬식을 벡터의 올바른 방법으로 계산 하면 10점
-올바른 답을 도출하면 5점
-별도의 설명 없이 구체적인 벡터를 대입하여 답을 구하면 15점



$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AC}| = b$. $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}| = c$

이고. $\triangle ABC$ 의 무게 중심 G_1, $\triangle AOC$ 의 무게 중심 G_2 이라 했을 때, $\overrightarrow{OG_1} \perp \overrightarrow{BG_2}$

3. (a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 임을 보여라.

(Solution 1) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$ 이므로

양변을 제곱하면 $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BO}|^2 - 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO} = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 이고,

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OC}|$, $|\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{AC}|$ 이므로 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 이다.

(Solution 2)

$\triangle ABO$ 와 $\triangle COB$ 가 SSS 합동이므로 대응 되는 두 벡터의 내적도 같아야 한다.

$(\overrightarrow{BA}$ 와 $\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{BO}$ 와 $\overrightarrow{OB})$ 가 대응 되므로, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

채점기준 Sol 1, Sol 2 이외에도 제 2 Cosine 법칙을 쓰거나, 좌표를 설정해서 풀어서 맞으면 인정.

부분 점수 없음.

3. (b) $a^2 + c^2 = 3b^2$ 을 보여라.

$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OB}$ 이므로

$\overrightarrow{OG_1} \perp \overrightarrow{BG_2} = 0$ 을 풀어쓰면

$$\frac{1}{9}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OB}) = 0 \quad ①$$

따라서 $|\vec{OA}|^2 + |\vec{OC}|^2 - 3|\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA}\cdot\vec{OB} - 2\vec{OB}\cdot\vec{OC} + 2\vec{OC}\cdot\vec{OA} = 0$

여기서,

$$2\vec{OC}\cdot\vec{OA} = -(|\vec{OC}-\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 - |\vec{OA}|^2) = -(b^2-c^2-a^2)$$

$$-2\vec{OB}\cdot\vec{OC} = |\vec{OB}-\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 - |\vec{OC}|^2 = a^2-b^2-c^2$$

$$-2\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}-\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 - |\vec{OB}|^2 = c^2-a^2-b^2$$

$$\Longrightarrow 2\vec{OC}\cdot\vec{OA} - 2\vec{OB}\cdot\vec{OA} - 2\vec{OA}\cdot\vec{OB} = a^2+c^2-3b^2$$

따라서, 맨 위의 식은 $2(a^2+c^2-3b^2) = 0$ 이 되어 $a^2+c^2=3b^2$ 이다. ②

채점기준 ① = 무게 중심의 식과 2 수직관계의 식을 쓰면 +5점

굳이 $\vec{BG_2} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OC}) - \vec{OB}$ 가 아니어도, 예를 들면 $\vec{BG_2} = \frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{BO}+\vec{BC})$ 를 써도 인정.

② = ① 에서 쓴 식과 함께 (제 2 Cosine 법칙 (위의 답) or 삼각형의 합동관계) 등을 이용하여

$a^2+c^2=3b^2$ 을 바르게 도출하면 +10

이외의 다른 풀이 (좌표를 이용한 풀이, 기하적인 풀이 ...) 는 부분점수 없이 맞으면 +15, 아니면 0.

4번.

(a) 주어진 행렬을 A라 하자.

A가 역행렬을 가지지 않는 것은 $\det A = 0$인 것과 동치이다.

따라서 $\det A = 0$인 (x, y, z)를 모으면 C를 구할 수 있다. +5

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-y-z & 2x & 2x \\ 0 & 2y & y-z-x & 2y \\ 0 & 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix} \right|$$

행렬식의 귀납적 정의 →

$$= \left| \begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -(x+y+z) & 0 & 2x \\ 0 & -(x+y+z) & 2y \\ x+y+z & x+y+z & z-x-y \end{pmatrix} \right|$$

$$= (x+y+z)^2 \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 2y \\ 1 & 1 & z-x-y \end{pmatrix} \right|$$

$$= (x+y+z)^2 \{ (-1)(-(z-x-y)-2y) + (+1)(0 \cdot 2y - (-1)2x) \}$$

$$= (x+y+z)^3$$

즉, $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \det A = (x+y+z)^3 = 0 \}$

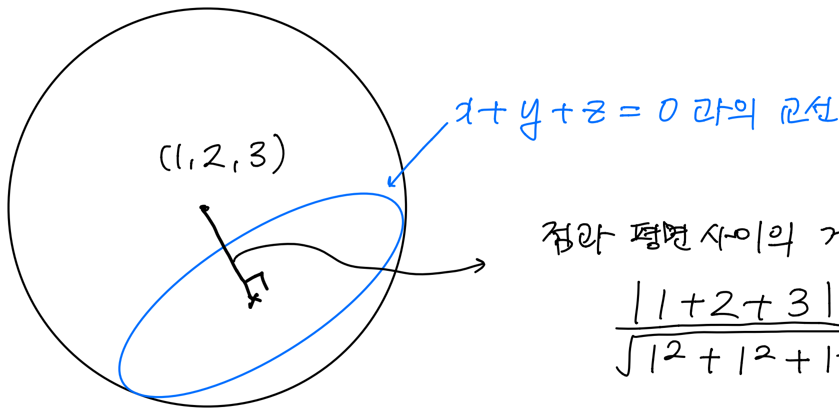
$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \}$ 이다. +10

(채점 기준) "A^{-1}이 존재하지 않음 $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$"의 동치조건을 활용한 경우 (+5점) - 일차종속임을 이용해도 점수 부여

행렬식을 계산하여 C를 맞게 찾아낸 경우 (+10점)

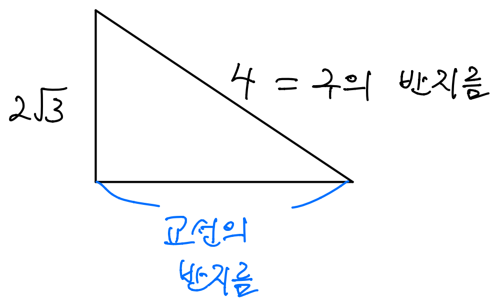
- 행렬식 계산에서 x, y, z 에 대한 다항식 형태까지는 정확히 구했으나 그 이후 사소한 갈점으로 답이 틀린 경우는 3점 감점 (+7점)

(b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ 으로 평면이 된다.
따라서 구면 S와 C는 만나지 않거나, 원 모양의 교선을 가진다. +5



점과 평면 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 2\sqrt{3}$$



이므로 구 S와 C는 교선을 가지며, 이는 원이다. 따라서, $S \cap C$ 의 길이는

$$2 \times \pi \times \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 4\pi$$

(채점기준) $S \cap C$ 가 원이므로 원의 둘레를 계산하면 됨을 알고 이 원의 반지름을 구하려고 한 경우 (+5점)

- (a) 에서 구한 C가 틀린 답이더라도 비슷한 기하적 접근으로 푼 경우 5점 부여

$S \cap C$ 의 길이를 알맞게 계산한 경우 (+5점)

- (a) 에서 풀이가 틀리더라도 $C : x + y + z = 0$ 에 대해 (b)를 푼 경우 만점 부여

5번 채점기준

(a) $X(t) = (e^t \cos t, 1, e^t \sin t)$

$\Rightarrow Q = X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ ┘ 4

$X'(t) = (e^t(-\sin t + \cos t), 0, e^t(\sin t + \cos t))$ 에서

$X'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, 0, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ ┘ 4

$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, y = 1$ 이 직선의 방정식이다. ┘ 2

* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, y = 1$ 대신 $l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, 1, t\right)$ $t \in \mathbb{R}$ 등 맞는 매개화면 모두 만점

(b)

sol1) l, 과 l_1에 동시에 수직한 벡터 $\vec{n} = \frac{X'(\frac{\pi}{4})}{|X'(\frac{\pi}{4})|} \times \vec{v} = (1, -1, 0)$ ┘ 5

l, l_1의 사이 거리 $d = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$ 이다. ┘ 5

$$\Rightarrow d = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \cdot (1, -1, 0)}{|(1, -1, 0)|} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ┘ 5

* l 위의 임의 점 Q', l_1 위의 임의 점 P' 을 이용하여 $\frac{\vec{P'Q'} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$ 으로 계산해도 만점

* $\vec{n}$ 값 계산이 틀렸더라도 d 공식 맞으면 5점 부여

sol2) $\begin{cases} l \text{ 위의 한 점 } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, 1, t\right) \\ l_1 \text{ 위의 한 점 } B(s, s, s+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{BA} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - s, 1 - s, t - s - 1\right)$

$\vec{BA}$ 와 l, $\vec{BA}$ 와 l_1이 모두 수직한 경우의 $|\vec{BA}|$가 l과 l_1의 거리이므로

$$\begin{cases} \vec{BA} \cdot X'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow t - s - 1 = 0 \\ \vec{BA} \cdot (1,1,1) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - s + 1 - s + t - s - 1 = 0 \end{cases}$$ ┘ 10

연립하여 $t = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{2}$ $s = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$ 을 얻고

이때 길이 $d = |\vec{BA}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - s\right)^2 + (1-s)^2 + (t-s-1)^2} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ┘ 5.

* 두 연립방정식이 정확하게 나와야만 10점 부여. (수직하다 언급만으로 점수 없음.)

sol 3) l_1 위의 한점 $B(s, s, 1+s)$

B에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 (Q는 (a)에서 $X(\frac{\pi}{4})$로 l위의 점)

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QB} - \frac{\overrightarrow{QB} \cdot X'(\frac{\pi}{4})}{\|X'(\frac{\pi}{4})\|^2} X'(\frac{\pi}{4})$$

$$= \left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}},\ s-1,\ 0\right)$$

$\Rightarrow f(s) = |\overrightarrow{BH}|^2$ 이라고 정의하면

$$f(s) = (s-1)^2 + \left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right)^2 \quad \rfloor\ 10.$$

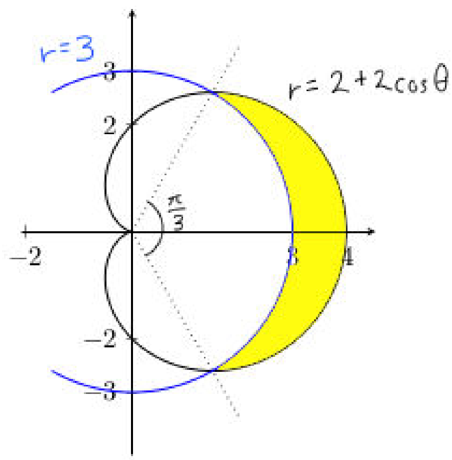
이 $f(s)$가 최소가 되는 값이 l_1과 l_2 사이 거리 이고 $f(s)$는 $s = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi}{4}}$일 때

최솟값을 가지므로

$$d = \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rfloor\ 5.$$

2021학년도 1학기 수학 1 기말고사 6번 문제 모범답안 및 채점기준

[모범답안]



$\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$일때 $3 = 2 + 2\cos\theta$이므로 적분 구간은 $-\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{3}$까지.
대칭성에 의해 $\theta = 0$에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$까지만 적분을 구해주고 적분값에 2를 곱해줘도 된다.

$$
\begin{aligned}
(\text{넓이}) &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(2+2\cos\theta)^2\ d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}3^2\ d\theta\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\theta + 8\cos\theta - 5\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2\theta + 2) + 8\cos\theta - 5\ d\theta \\
&= \sin 2\theta + 8\sin\theta - 3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi
\end{aligned}
$$

[채점기준]

- 전혀 엉뚱한 영역에 대한 넓이를 구했다면 0점
- $3 \le 2 + 2\cos\theta$인 θ범위를 구하여 적분 구간을 적절하게 잡았다면 5점 부여
- 적분식을 옳게 세운 경우, 학생이 극좌표계로 주어진 그래프의 넓이를 구하는 방법에 대해서 잘 알고있다 여겨 12점 부여
- 올바른 계산 결과값을 구한 경우 8점 부여 (영역의 반만 구한 뒤, 2배를 하지 않은 경우 계산 실수로 여겨 8점 감점)

문제 7. [30점] 극좌표계에서

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

로 표현된 곡선 $X(\theta)$에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) $X(\theta)$를 $X(0)$에서부터 잰 호의 길이로 매개화하시오.

(b) (15점) 위 곡선의 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서의 곡률을 구하시오.

(a) sol) 직교 좌표계에서 주어진 곡선은,

$$X(\theta) = r(\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

여기에서 곡선의 속력은,

$$|X'(\theta)| = \sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

따라서 $X(0)$ 부터 $X(\theta)$ 까지의 곡선의 길이는

$$s(\theta) = \int_0^\theta |X'(\theta)|\, d\theta = \int_0^\theta 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}$$ —— 6

올바른 길이 구하는 적분 시도. $\int_0^\theta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

또한 $\theta(s) = 2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)$ 이므로,

$X(\theta)$를 호의 길이로 매개화하면,

$$\tilde{X}(s) = \left(1 + \cos\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right)\right)\cdot\left(\cos\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right),\ \sin\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right)\right)$$ 이다. —(*) → 6

(단, $0 \le s \le 4$) —— 3 □.

채점기준
- (*)에서, $\left(\left(1-\frac{s^2}{8}\right)\left(2-\frac{s^2}{8}\right),\ \frac{s}{2}\left(2-\frac{s^2}{8}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{16}}\right)$ 도 인정.
- 호의 길이로 재매개화 한 뒤 극좌표계로 표현하였을 때, $(\tilde{r}(s), \tilde{\theta}(s))$가 아닌, $\tilde{r}(\theta) = 1 + \cos\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right)$ 만으로는 부족한 표현이므로 오답 처리함.

(b) sol). 곡률은

$$\kappa = \frac{1}{|X'|} \cdot \left| \left(\frac{X'}{|X'|} \right)' \right| = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \quad \text{— } (*)$$

이므로, 정의에 따라 계산하면 $\kappa = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 15 □

채점기준.
- 곡률벡터 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 까지만 구했을 경우 10 점.
- (*) 에 상응하는 곡률벡터, 혹은 곡률 공식이 있는 경우 5점 부여.

문제 8

$X(t) = (t, t^2)$ 이므로, $|X'(t)| = |(1, 2t)| = \sqrt{1+4t^2}$ 이다.

질량은 $m := \int_X \mu \ \mathrm{ds} = \int_0^{\sqrt{2}} \mu(t)|X'(t)| \ dt = \int_0^{\sqrt{2}} (1+4t^2) \ dt = \frac{11}{3}\sqrt{2}$ 이다. 답이 맞으면 +5점.

질량중심은 $\bar{x} := \frac{1}{m}\int_X x\mu \ \mathrm{ds}$, $\bar{y} := \frac{1}{m}\int_X y\mu \ \mathrm{ds}$ 이므로,

$m\bar{x} := \int_X x\mu \ \mathrm{ds} = \int_0^{\sqrt{2}} x(t)\mu(t)|X'(t)| \ dt = \int_0^{\sqrt{2}} t(1+4t^2) \ dt = 5,$

$m\bar{y} := \int_X y\mu \ \mathrm{ds} = \int_0^{\sqrt{2}} y(t)\mu(t)|X'(t)| \ dt = \int_0^{\sqrt{2}} t^2(1+4t^2) \ dt = \frac{58}{15}\sqrt{2}$ 이다.

답 : $m = \frac{11}{3}\sqrt{2}$, $(m\bar{x}, m\bar{y}) = \left(5, \frac{58}{15}\sqrt{2}\right)$

$\bar{x}, \bar{y}$ 정의를 명시한 경우 각 5 점. (정의 틀리면 점수 없음, 선적분 정의대로 명확한 적분 형태를 구해야 함)

답까지 맞으면 각 5점.