

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

( 연습용 여백 )

**문제 1** [20점]  $A, B, C$ 는  $n$ 차 정사각행렬이고,  $I_n$ 은  $n$ 차 항등행렬일 때, 다음 명제들의 참, 거짓을 판정하시오. (풀이과정 필요 없음, 각 문제당 맞으면 2점, 틀리면 -2점. 1번 문항 최하점 0점)

- (a) 영벡터를 포함하는  $n$ -벡터들은 일차종속이다.
- (b) 항등사상이 아닌 평행이동은 선형사상이 아니다.
- (c)  $\det(nA^n) = n^n(\det A)^n$ 이다.
- (d)  $AB = I_n = CA$ 이면,  $B = C$ 이다.
- (e)  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ 이다.
- (f) 행렬식은 각 열에 대하여 선형사상이다.
- (g)  $A^t A = I_n$ 이면  $\det A = 1$  또는  $\det A = -1$ 이다.
- (h)  $\det A \neq 0$ 이면  $A$ 의  $n$ 개의 열벡터는 일차독립이다.
- (i)  $A$ 가 가역행렬이면,  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ 이다.
- (j)  $\det A \neq 0$ 이면, 행렬  $A$ 에 대응하는 선형사상  $L_A$ 는 일대일대응 사상이다.

**문제 2** [15점] 삼차원 공간의 점  $P = (8, 1, 0)$ 에서  $\mathbf{v} = (-2, -1, 1)$  방향으로 발사된 빛이 평면

$$S_1 : x + 2y + 3z = 0$$

과 점  $Q$ 에서 만난 후, 반사되어 평면

$$S_2 : -x + 2y + z = 17$$

과 점  $R$ 에서 만난다고 한다. 이때, 점  $Q$ 와 점  $R$ 을 구하시오.

**문제 3** [20점] 삼차원 공간에서 벡터  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 벡터  $\mathbf{a}$ 에 대한 정사영  $f(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 와 사상  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x})$ 은 선형사상임을 보이시오.
- (b) (10점) 정사영  $f$ 와 사상  $g$ 의 합성 사상  $g \circ f$ 이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬  $M$ 을 구하시오.

**문제 4** [20점] 삼차원 공간의 변환  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 구면좌표계로  $(\rho, \varphi, \theta)$ 인 점을  $(2\rho, \pi - \varphi, \frac{\pi}{2} + \theta)$ 인 점으로 보낸다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 변환  $T$ 가 선형사상임을 보이시오.
- (b) (10점) 변환  $T$ 에 대응하는 행렬  $M$ 과  $\det M$ 을 구하시오.

**문제 5** [10점] 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

- (a) (5점)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad (\text{단, } a, b, c \text{ 는 실수})$$

- (b) (5점)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

학번:	이름:
-----	-----

**문제 6** [30점] 삼차원 공간의 네 점  $A = (2, -2, 3)$ ,  $B = (0, 1, 2)$ ,  $C = (0, 3, 1)$ ,  $D = (-2, 2, -1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

( 연습용 여백 )

- (a) (10점) 점  $A, B, C$ 를 지나는 평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (10점) 점  $A, B$ 를 지나는 직선  $\ell_1$ 과 점  $C, D$ 를 지나는 직선  $\ell_2$  사이의 거리를 구하시오.
- (c) (10점) 선형사상  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 은 행렬

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$L(x, y, z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

로 정의한다. 이 때, 점  $A, B, C, D$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피  $V_1$ 과 벡터  $L(\vec{AB})$ ,  $L(\vec{AC})$ ,  $L(\vec{AD})$ 가 이루는 나란히 꼴의 부피  $V_2$ 를 각각 구하시오.

**문제 7** [15점] 삼차원 공간의 세 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2$$

일 때 다음을 구하시오.

- (a) (8점)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}) \cdot ((\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}))$
- (b) (7점)  $(2\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times 2\mathbf{a})$

**문제 8** [20점] 매개화된 곡선

$$X(\theta) = (1 + \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $\theta = 0$  에서 접선의 방정식과 접촉평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (10점) 곡선  $X$ 를  $xy$ -평면으로 정사영시켰을 때 얻어지는 곡선을 극좌표계로 표현하고,  $xy$ -평면에서 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

**문제 9** [15점] 극좌표계로 주어진 두 곡선

$$r^2 = 2 \sin 2\theta, \quad r = 1$$

이 주어졌을 때, 첫 번째 곡선의 내부와 두 번째 곡선의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하시오.

**문제 10** [10점] 곡선  $X(t) = (e^t \cos 2t, 2, e^t \sin 2t), (t \geq 0)$ 을  $X(0)$ 에서부터  $\pi$  호의 길이로 재매개화 하시오.

**문제 11** [15점] 곡선  $X(t) = (t, \sin t)$  위의 점  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 에서 접촉원의 방정식을 구하시오.

**문제 12** [10점] 곡선  $X(t) = (\cosh t, -\sinh t, t)$ 에서  $t = \log 2$ 에서 곡률을 구하시오.