202 0여름 수학 1기말고사 모범답안 및 채점기준

#1.

여기서의 교과서는 미적분학 1^+ (김홍종) 2^{nd} edition 을 뜻한다.

전부 참 (All True)

(a) $K O = O$

$(K \neq 0)$

(b) 선형사상은 0을 0으로 보낸다.

(c) $A^n = (v_1, \dots, v_n)$

$nA^n = (nv_1, \dots, nv_n)$

$\det(nA^n) = \det(nv_1, \dots, nv_n) = n^n \det(v_1, \dots, v_n)$

$= n^n \det(A^n) = n^n (\det(A))^n$

(d) $CA = I_n$

$CAB = I_n B \to CI_n = B \to C = B$

(e) 교과서 참고 (p264) 정리 3.2.6

(f) 교과서 참고 (p262) 정리 3.2.2

(g) $\det A^t = \det A$

$$\det A^t A = \det A^t \det A = (\det A)^2$$

$$\shortparallel$$

$$\det I_n = 1 \qquad \longrightarrow \det A = 1 \text{ or } -1$$

(h) 교과서 참고 (p271) 정리 4.2.2

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면 $AA^t = I_n$ 이고, $\det A = -1$

(i) $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det A$

$$\shortparallel$$

$\det(I_n) = 1$

$\to \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

(j)

교과서 참고 (p273) 정리 4.2.4 의 증명의 두 번째 문장.

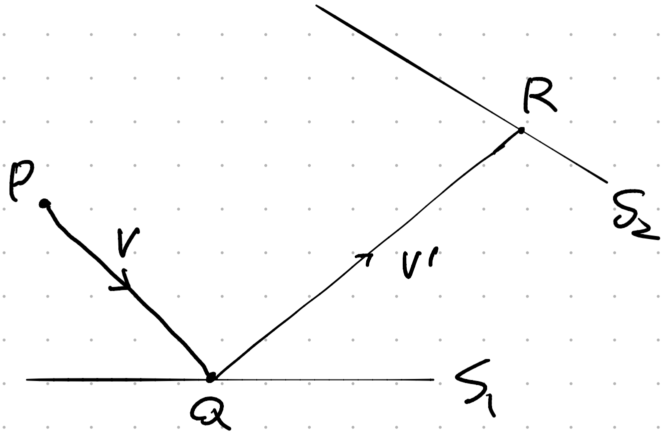
#2.

점 P에서 반사되어 v 방향으로 가는 빛은
직선방정식 $(-2t+8, -t+1, t)$ 로 나타낼 수 있다.
이 빛이 평면 S_1과 만나는 점 Q는 직선과 평면의 교점이므로

$$(-2t+8)+2(-t+1)+3t=0$$

$$\Rightarrow -t+10=0 \Rightarrow t=10$$

$$\therefore Q=(-12, -9, 10)$$ 17



평면 S_1에 반사된 빛의 방향벡터를 v_*라 하면,

$$v_* = v - 2\frac{v\cdot n}{n\cdot n}n$$

$$= \left(-\frac{13}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$ 4

$\therefore$ 반사된 빛은 직선방정식 $(-13t-12, -5t-9, 10t+10)$ 으로 나타낼 수 있다.

R 역시 직선과 평면의 교점이므로

$t=1$, $R=(-25, -14, 20)$ 4

(b) 선형사상의 합성은 선형사상이므로

$g \circ f$ 역시 선형사상이다. 4

선형사상 f에 대응되는 행렬을 A,

g에 대응되는 행렬을 B라 하면,

$M = BA$.

$f(e_1) = \frac{1}{14}(1, 2, 3)$

$f(e_2) = \frac{2}{14}(1, 2, 3)$

$f(e_3) = \frac{3}{14}(1, 2, 3)$

$\therefore A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 2

$g(x) = \det(b, c, X)$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix}$

$= z - y - 2x$.

$\therefore B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2

$\therefore M = BA = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. 2

※ M 대신 M^t를 답으로 쓴 경우, 2점 감점.

#3.

(a). $f(x) = \frac{a \cdot x}{a \cdot a} a$

$t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ 일 때,

$$f(tx+y) = \frac{a \cdot (tx+y)}{a \cdot a} a$$

$$= \frac{t(a \cdot x) + (a \cdot y)}{a \cdot a} a$$

$$= t\frac{a \cdot x}{a \cdot a} a + \frac{a \cdot y}{a \cdot a} a$$

$$= t f(x) + f(y)$$ 5점.

$g(x) = \det(b, c, x)$ 이고, 행렬식은 각 열에 대해 선형사상이므로

f, g는 선형사상이다. 5점.

※ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(t \cdot x) = t f(x)$

둘 중 하나가 틀리면 2점 감점.

#4.

(a)
구면 좌표계 $\quad$ 직교 좌표계

$$
\begin{array}{ccc}
(\rho,\ \varphi,\ \theta) & \longleftrightarrow & (\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi) = (x, y, z) \\
\downarrow T & & \downarrow T \\
(2\rho, \pi-\varphi, \frac{\pi}{2}+\theta) & \longleftrightarrow & (-2\rho\sin\varphi\sin\theta,\ 2\rho\sin\varphi\cos\theta,\ -2\rho\cos\varphi) = (-2y,\ 2x,\ -2z)
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\therefore\ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\quad (x,y,z) \longmapsto (-2y, 2x, -2z)
\end{array}\right\} \text{선형사상} \cdots\cdots \star
$$

이유 : $T(\vec{a} + t\vec{b}) = T(a_1+tb_1,\ a_2+tb_2,\ a_3+tb_3)$

$$= (-2a_2-2tb_2,\ 2a_1+2tb_1,\ -2a_3-2tb_3)$$

$$= (-2a_2, 2a_1, -2a_3) + (-2tb_2, 2tb_1, -2tb_3)$$

$$= T(a_1, a_2, a_3) + tT(b_1, b_2, b_3) = T(\vec{a}) + tT(\vec{b})$$

따라서 T는 선형사상이다.

〈채점기준〉

- ☆선형사상을 올바르게 구했으면 10점.
- 선형사상을 잘못 구했거나, 논리적 오류가 발견되면 0점. (부분점수 없음)

(b) $T = L_M$ 이 되는 행렬 M을 찾자.

$$
\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -2y \\ 2x \\ -2z \end{bmatrix}
= T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)
$$

$$
\therefore M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \& \quad \det M = -8
$$

〈채점기준〉

- 행렬 M을 올바르게 못 구하면, (det M을 구했더라도) 0점.
- 행렬 M은 올바르게 구했으나, det M을 틀리면 5점. $\quad$ • 둘 다 잘 구하면, 10점.

5.

(a) Vandermonde 행렬이므로, 행렬식은 $(a-b)(b-c)(c-a)$

<채점기준>

- 직접 계산을 해서 풀어도 인정.
- 답이 틀리면 부분점수 없이 0점.

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1행의 1배를} \\ \text{2행,3행,4행에서 뺌}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{2행의 2배, 3배를} \\ \text{3행, 4행에서 뺌}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{3행의 2배를} \\ \text{4행에서 뺌}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

위 과정들을 거쳐도 행렬식은 불변이고, 마지막 행렬은 상삼각행렬 (upper triangular) 이므로 행렬식은 대각원소들의 곱인 $1 \times 1 \times (-1) \times (-1) = 1$ 이다.

(행렬식의 성질을 이용하여 규명해도 무방.)

<채점기준>

- 답이 틀리면 부분점수 없이 0점.

6.

(a)

$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 5, -2)$

$$k\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-1, -2, -4)$$

$(-1, -2, -4)$ 와 평행한 벡터를 쓰면 5점

$(-1, -2, -4) \cdot (X - A) = 0$

or B or C

$\longrightarrow \quad x + 2y + 4z = 10$ (5점)

(b) [풀이 1]

l_1의 방향 벡터 : $V_1 = (-2, 3, -1)$

l_2의 방향 벡터 : $V_2 = (-2, -1, -2)$

$V_2 \times V_1 = (7, 2, -8)$ 와 나란한 벡터 구하면 5점

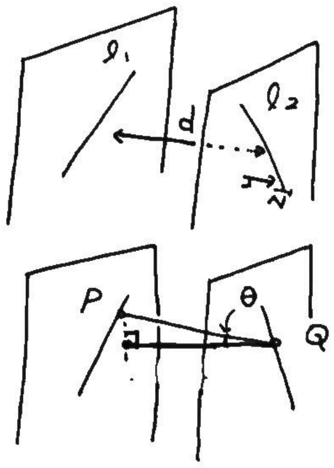
$= \vec{N}$

$$d = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N}}{|N|}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{13}} \quad (5점)$$

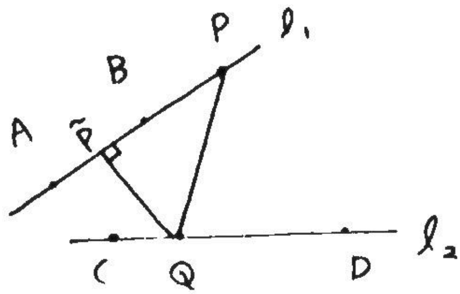
(P는 l_1 위의 점,

Q는 l_2 위의 점)



$d = |PQ| \cos\theta$

[풀이2]



$$\tilde{P}Q + QP = \frac{AB\cdot QP}{AB\cdot AB}AB$$

$$|\tilde{P}Q| = \left|QP - \frac{AB\cdot QP}{AB\cdot AB}AB\right|$$

$\tilde{P}$는 Q에만 의존한다.

따라서 P를 고정하면

$|\hat{P}Q|$는 일변수 함수

$$|\hat{P}Q| = \frac{1}{14}\left\{(-22t+14)^2+(-23t+7)^2+(-25t-7)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

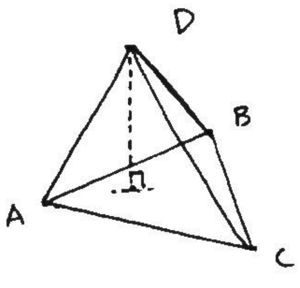
풀이 가능 (5점)

이는 직선 $\frac{x-14}{22} = \frac{y-7}{23} = \frac{z+7}{25}$

위의 점과 원점 사이의 거리

$|\tilde{P}Q|$의 최솟값 $\frac{4}{\sqrt{13}}$를 구하면 (5점)

(C)

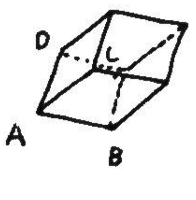


△ABC의 넓이 : $\frac{1}{2}|AB\times AC| = \frac{\sqrt{21}}{2}$

◇ABCD의 부피 : $\frac{1}{3}|AD|\frac{1}{2}|AB\times AC|\cos\theta$

$= \frac{1}{6}AD\cdot(AB\times AC) = 2$ (5점)

나란히꼴의 부피 $AD\cdot(AB\times AC)=12$를 구했으면 (2점)



나란히꼴의 부피 : $AD\cdot(AB\times AC)=12$

L(AB), L(AC), L(AD) 가 이루는 나란히꼴의

부피는 $|\det M|\,AD\cdot(AB\times AC) = 264$ (5점)

L(◇ABCD)의 부피 44를 구했으면 (2점)

7번

(a)

$$(a+b-2c)\cdot\big((a-3b+c)\times(b-c)\big) = \big((a-3b+c)\times(b-c)\big)\cdot(a+b-2c)$$

$$= \det(a-3b+c,\ b-c,\ a+b-2c)$$

$\times 3$ $\times -1$ $\times -2$

$$= \det(a-2c,\ b-c,\ a-c)$$

$$= \det(-c,\ b-c,\ a-c)$$

$$= \det(-c,\ b,\ a)$$

$$= (-1)\det(a,\ b,\ -c)$$

$$= \det(a,b,c)$$

$$= 2$$ +8

(b) p.238 #9

$$(2a\times b)\cdot(b\times c)\times(c\times 2a) = (2a\times b)\cdot\big[((b\times c)\cdot 2a)c-(b\times c\cdot c)2a\big]$$

$$= (2a\times b)\cdot\big[2\det(a,b,c)\,c - 0\cdot 2a\big]$$

$$= 4\ 2a\times b\cdot c$$

$$= 4\cdot 2\det(a,b,c)$$

$$= 16$$ +7

[채점기준]

- 올바른 풀이로 정답이 맞으면 각각 8점/7점
- 답이 틀리면 0점

8번

(a) $X(\theta) = (1+\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta, 1)$

$\Rightarrow X'(\theta) = \cos\theta(\cos\theta, \sin\theta, 1) + (1+\sin\theta)(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta, \cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta, 1)$

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = (1,0,1) \\ X'(0) = (1,1,1) \end{cases}$

$-2\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta$

$\theta=0$ 에서의 접선의 방정식은 $X(0) + t\cdot X'(0)$

$\Rightarrow (1,0,1) + t(1,1,1)$ // $+5$ $-$

(또는, $x-1 = y = z-1$)

$\theta = 0$ 에서 접촉평면의 방정식은 ⋯ 점 $X(0)$를 지나고 $X'(0) \times X''(0)$에 수직하다

$\Rightarrow X''(\theta) = (-4\sin\theta\cos\theta - \cos\theta, -\sin\theta + 2\cos(2\theta), 0)$

$\Rightarrow X''(0) = (-1, 2, 0)$

$\Rightarrow X'(0) \times X''(0) = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-2, -1, 3)$

$\Rightarrow$ 점 $(1,0,1)$을 지나고 $(-2,-1,3)$에 수직인 평면

$\Rightarrow -2(x-1) - 1(y-0) + 3(z-1) = 0$

$\Rightarrow -2x - y + 3z = 1$ // $+5$

※ 평면의방정식을

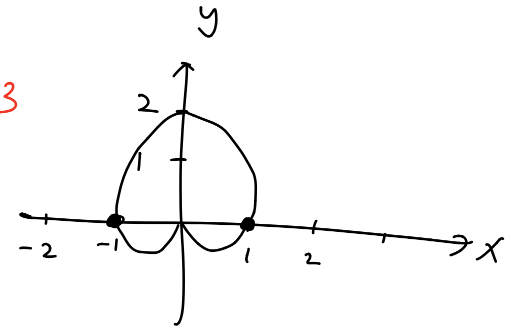
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = X(0) + sX'(0) + tX''(0),\ s,t \in \mathbb{R}\}$

으로 적어도 5/5점

※ 평면의 방정식을 $X'(0) \times X''(0) \cdot (X - X(0)) = 0$ 으로 적었을경우 2/5점

(b) $Y(\theta) = (1+\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$

$\Rightarrow$ 극좌표계로 표현하면 $r = 1 + \sin\theta$ +3



$\Rightarrow$ 극좌표계로 주어진 곡선의 넓이 공식 (p.319)

$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} r(\theta)^2 \, d\theta$

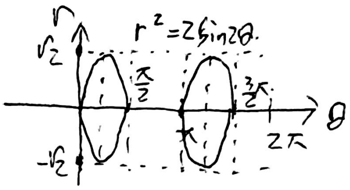
$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) \, d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[2\pi + 0 + \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta\right]$. 이제 $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \pi$

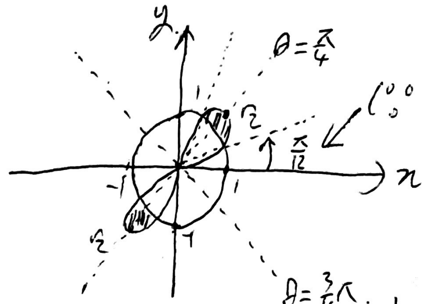
$= \frac{1}{2}[2\pi + \pi] = \frac{3}{2}\pi$ +7

($\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta$ 만 못했으면 +3)

Ⅱ-9. $r^2=2\sin 2\theta$, $r=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 구하기.



⇒



(∵ $2\sin(2\theta)=1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$)

+5

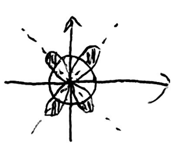
색칠한 부분의 넓이 =  $\times 4 = 4\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}(2\sin 2\theta)-\frac{1}{2}\right)d\theta$

(∵ $A=\int \frac{r^2}{2}d\theta$)

+5

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

+5. 도합 15점.

-  ⇒ 로 그려서 틀렸을 경우, 나머지 과정과 계산이 다 맞으면 7점.

- 간단한 계산이 틀렸을 경우 3점 감점.

- 그림이 없어도 충분한 서술이 있고 나머지 과정이 맞으면 만점.

#10. $X(t) = (e^t\cos(2t),\ 2,\ e^t\sin(2t))$ $t \geq 0$ 을 $X(0)$ 부터 호의 길이로 재매개화.

$$X'(t) = e^t(\cos(2t), 0, \sin(2t)) + 2e^t(-\sin(2t), 0, \cos(2t))$$

$$\Rightarrow |X'(t)| = \sqrt{5}\,e^t$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t |X'(x)|\,dx = \int_0^t \sqrt{5}\,e^x\,dx = \sqrt{5}(e^t - 1) \quad +5$$

$$\Rightarrow t(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{5}} + 1\right) \quad +5$$

$$\Rightarrow \tilde{X}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\cos 2\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\right),\ 2,\ \left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\sin 2\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\right)\right)$$

도합 10점.

- $s(t)$를 잘못 계산하면 3점 감점.
- $s(t)$를 잘못 계산하였어도, 잘못 계산한 s로 끝까지 계산하였으면 3점 추가.
- $\tilde{X}(s)$를 적는 과정에 실수 (e.g. $\tilde{X}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\cos 2\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\sin 2\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{5}}+1\right)\right)\right)$ 로 잘못 적는 등.)
  가 있어도 $t(s)$를 맞게 계산 했으면 만점.

#11.

우선 곡률 벡터 $\vec{K}$를 구하자.

$\vec{K} = \frac{1}{|x'|}\left(\frac{x'}{|x'|}\right)'$ 에서 $x' = (1, \cos t)$, $|x'| = \sqrt{1+\cos^2 t}$ 이므로

$\vec{K}(t) = \frac{1}{(1+\cos^2 t)^2}(\cos t \sin t, -\sin t)$.

$\vec{K}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$ 이다. +10점.

접촉원의 중심은 $X\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|^2} = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) + (0, -1) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

접촉원의 반지름은 $\frac{1}{|\vec{K}|}$ 이므로

접촉원의 방정식은 $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ +5점.

* 곡률벡터를 잘못 구하더라도 올바른 방법으로 접촉원의 방정식을 구했으면 접촉원 점수(5점) 인정.

\# 12.

곡률 $|\vec{K}| = \dfrac{|X' \times X''|}{|X'|^3}$ 에서

$$X'(t) = (\sinh t, -\cosh t, 1)$$

$$X''(t) = (\cosh t, -\sinh t, 0).$$

$$X'(t) \times X''(t) = (\sinh t, \cosh t, 1).$$

$$|\vec{K}(t)| = \frac{(\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1)^{1/2}}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1)^{3/2}} = \frac{1}{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \frac{1}{2\cosh^2 t}$$

$t = \log 2$ 를 대입하면

$$|\vec{K}| = \frac{1}{2\cosh^2(\log 2)} = \frac{1}{2\left(\frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{25}$$

+10점

* $|\vec{K}(t)|$ 를 구하고 사소한 계산실수가 있는 경우 −2점

* $X'(\log 2)$, $X''(\log 2)$ 를 먼저 대입하고 계산한 경우

부분점수 없음.