2020-1 수학 1 기말고사
예시답안 및 채점기준

#1. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ 이라 하면,

$x \geq 2$ 에서, f는 감소하는 음이 아닌 연속함수이다.

따라서 적분판정법에 의해, $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ 과 $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$의 수렴성은 동일하다

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx \underset{\log x = t}{=} \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \infty$$

따라서, $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\log n}$ 은 발산한다.

(채점기준) ① $x \geq 2$, $x \geq 3$, $x > 1$ .. 등의 적절한 범위를 명시해야 (+2점)

② f가 감소함 (주어진 범위에서)을 명시해야 (+2점)

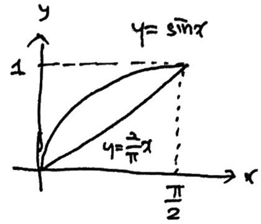
③ ☆이나 ☆☆ 중 적어도 하나를 언급해야 (+3점)

④ 적분 계산 후, 주어진 급수가 발산한다는 결론까지 잘 내리면 (+3점).

* "함수"의 정의역, 감소 여부가 아닌, "수열" $a_n = \dfrac{1}{n\log n}$의 정의역, 감소 여부를 언급하며 적분판정법의 가능성을 주장할시 ①, ②의 점수 없음.

* 사소한 계산 실수.. (−3점)

(b) (풀이 1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 이므로,



$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n} \geq \frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}}{\log n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n\log n} \quad +5$$

한편 (a) 에서 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ 의 발산함을 보였으므로, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n\log n}$ 도 발산,

비교판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$ 가 발산한다. $+5$

(풀이 2) $a_n=\frac{1}{n\log n}$, $b_n=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$ 이라고 하면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\log n}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=1 \quad +5$$

이므로, 극한 비교 판정법에 의해 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 와 $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ 의 수렴성은 동일하다.

한편 (a) 에서 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ 의 발산함을 보였으므로,

$\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$ 역시 발산한다. $+5$

(채점기준) * (풀이 1) 에서, 잘못된 부등식을 적용하여 비교판정법을 시도하면 0점

* (풀이 2) 에서, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 의 값을 정확히 계산하지 않으면 0점

* 답이 "수렴" 이라고 쓴 풀이는 0점.

* 사소한 계산 실수... (−3점)

(ex. $\sin x \geq \frac{4}{\pi}x$ .. 등)

2. $\boxed{\text{풀이1}}$ $f(x) = \sinh x$

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (\because) \text{ 역함수 정리}$$

+10

$$= \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1} x)} \quad (\because) \ \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

+5

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\sinh^{-1} x)}} \quad (\because) \ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ 이고 } \cosh x > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

+5

$\boxed{\text{풀이2}}$ $y = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$\iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad (\because) \ e^y > 0$$

$$\iff y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

+10

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+1}) \underset{\text{계산}}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

+10

✱ 역함수 구할 때 근의공식 쓰는 과정에서 오류 범한 경우 5점.

#3.

(a). 풀이 I.

$f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = 2e^x \cos x \Rightarrow f''(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$

$\therefore T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

상수항 포함, 계수 하나 틀릴 때마다 −2점.

풀이 II.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$\Rightarrow e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)$

$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

$\therefore T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

(근사다항식의 유일성에 의해) 언급 없으면 −2점.

상수항 포함, 계수 하나 틀릴 때마다 −2점.

#3
(b). $\left| e\sin 1 - T_3(1) \right| = \left| f(1) - T_3(1) \right|$

$$= \left| R_3(1) \right| \le \frac{\max_{0\le x\le 1} \left| f^{(4)}(x) \right|}{4!}$$ — 5점

$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x$ 이고,

e^x, $\sin x$ 는 $[0, 1]$ 에서 증가함수이므로

$\left| f^{(4)}(x) \right|$ 의 최댓값은 $\left| f^{(4)}(1) \right| = 4e\sin 1$. — 5점.

$$\therefore \left| e\sin 1 - T_3(1) \right| \le \frac{4e\sin 1}{4!} = \frac{e\sin 1}{6} \le \frac{e}{6}.$$

※ $\left| f^{(4)}(x) \right|$ 가 $x=1$ 에서 최댓값을 가짐을

논리적으로 잘 설명하면 (ex: 도함수) 점수 인정.

※ (테일러 정리를 이용했다는) 언급 없이
또는 $\max_{0\le x\le 1} \left| f^{(4)}(x) \right|$)

$$\left| f(1) - T_3(1) \right| \le \frac{f^{(4)}(1)}{4!}$$

을 바로 쓸 경우 0점

4.

주어진 식을 얻기 위해 $\sin x$의 급수

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

✓ +5

을 이용하려 한다. 위 급수의 수렴반경은 $(-\infty, \infty)$ 이므로 거듭제곱급수의 기본정리로부터

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right)' = -x^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \sin x - x\cos x$$

✓ +10

를 얻는다. 따라서 $x = \frac{\pi}{4}$를 대입하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

✓ +5

를 얻는다.

문제 5. $z = r^2 \sin 2\theta$

part 1. 직교좌표계 변형 $\Leftrightarrow$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
(5점)

$$z = 2r^2 \sin\theta\cos\theta = 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2xy$$ 이므로 $\therefore\ z = 2xy$

※ 매개변수 방정식 형태 $(x, y, z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z = r^2\sin 2\theta)$ 도 답으로 인정.

※ $\sin 2\theta = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 로 변형을 시도한다면 $x^2+y^2 \neq 0$ 이라는 언급을 해줘야 감점이 없음.

part 2. 구면좌표계 변형 $\Leftrightarrow$ $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$
(15점)

위의 좌표 변환을 사용하여 $z = 2xy$ 에 대입하면

$$\rho\cos\phi = \rho^2\sin^2\phi\sin 2\theta$$ 를 얻는다. —— ①

① 을 답으로 하고, 특히 식 ① 을 점집합 (즉. 그래프) 으로 관찰하면

$$\cos\phi = \rho\sin^2\phi\sin 2\theta$$ 의 점집합과 동치이다. 따라서 이 식도 답으로 인정.

하지만 ① 을 식으로 관찰해 ρ 를 약분하는 행위는 $\rho = 0$ 인 경우와 $\rho \neq 0$ 인 경우를 구별해줘야 하므로 언급없이 약분했다면 -1

※ 또한, 식 ① 에서 삼각함수의 무분별한 감점 -1
나눗셈 역시

ex. '$\rho\tan\phi\sin\phi\sin 2\theta = 1$' 은 식 ①의 그래프를 전부 얻어낼 수 없다. 이 식은 xy 평면 위 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 직선을 품지 않는다.

※ 매개변수 방정식 형태 ~~(ρ, φ, θ)~~ $(x, y, z) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = 2xy = 2\rho^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta)$
도 정답으로 인정.

※ 직교좌표를 거치지 않고 원기둥좌표계에서 직접 구면좌표계로 변형했을 때 사용된 관계식

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2}\ ,\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right)\ ,\quad \theta = \theta$$

은 xy 평면 ($z=0$)의 x축, y축에 대해서 추가적인 논의를 더 해야한다. 따라서, 이러한 언급은 하지 않은 채 대수적인 계산을 거쳐 얻은 식은 식 ①의 그래프를 나타내지 못한다. 1점 감점

$$\rho = \sqrt{r^2\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)} = \sqrt{\left[\frac{1}{\sin 2\theta \tan\phi}\right]^2\left[1+\frac{1}{\tan^2\phi}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2\phi}{\sin^2 2\theta \tan^4\phi}}$$

$$= \left|\frac{\sec\phi}{\sin 2\theta \tan^2\phi}\right|$$

※ 사소한 계산 실수 (ex. $\sin 2\theta \overset{?}{=} \sin\theta\cos\theta$) = n회 × (−1) 감점.

반면 정의에 대한 실수는 부분점수 없음.

수학1 기말고사 문제6 채점기준

총 점수는 20점입니다.

답 점수

답을 맞히지 못한 경우 최대 점수는 10점입니다.

행렬을 구하지 않는 풀이의 채점기준

L을 나타내는 행렬을 A라고 할 때,

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

를 적은 경우 5점

$$\det A \ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

을 적은 경우 10점

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 14 \quad \text{and} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5$$

임을 이용해

$$\det A = \frac{5}{14}$$

임을 보이면 20점

행렬을 구하는 풀이의 채점기준

L을 나타내는 행렬을 A라고 할 때,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

와 같이 행렬의 원소를 표현하거나

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

를 이용해

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

의 값을 계산하는 등, 행렬을 구하는 법을 명시적으로 적은 경우 5점

$$A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -14 \\ 4 & -14 & 8 \\ 5 & -35 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{7} & -1 & \frac{4}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

행렬을 정확하게 적은 경우 10점

$$\det A = \frac{5}{14}$$

임을 구하면 20점

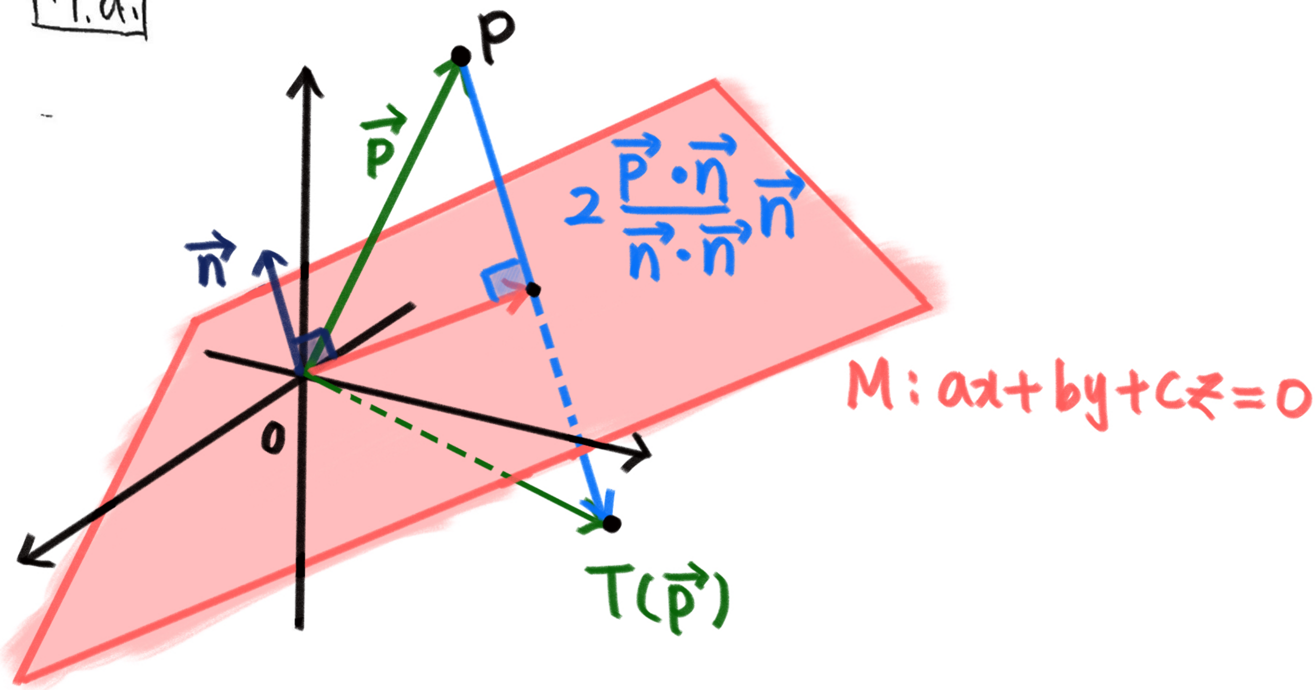
그 외의 풀이의 채점기준

오른쪽에 행렬 A를 곱하는 것으로 선형사상 L을 표현할 때,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T$$

와 같이 어떻게 표현되는지 적은 경우 위 채점기준들과 동일한 기준으로 채점함.

17.a.



평면 $M: ax+by+cz=0$ 의 법벡터는 $\vec{n}=(a,b,c)$ 이다. ($\vec{n}\neq 0$)

$\mathbb{R}^3$ 의 임의의 점 $p=(x,y,z)$ 이 주어져 있다고 하자.

이때, M에 대한 대칭변환 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 의 식은,

$$T(\vec{p}) = \vec{p} - 2\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = (x,y,z) - 2\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$$

으로 주어진다.

이제, T의 행렬 표현을 얻기 위해, $\mathbb{R}^3$의 표준 기저 벡터 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 를 대입하면,

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1-2\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \\ -2\frac{ab}{a^2+b^2+c^2} \\ -2\frac{ac}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix},\quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2\frac{ab}{a^2+b^2+c^2} \\ 1-2\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \\ -2\frac{bc}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix},\quad T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -2\frac{ac}{a^2+b^2+c^2} \\ -2\frac{bc}{a^2+b^2+c^2} \\ 1-2\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

이제, $T(\vec{e_1})$, $T(\vec{e_2})$, $T(\vec{e_3})$ 로부터,

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

을 얻는다. □

채점기준 (20점 만점)

$\boxed{1}$ $ax+by+cz=0$ 의 법벡터 (a,b,c)를 이용하면 5점.

$\boxed{2}$ 식 $\vec{p} - 2\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ 을 올바르게 쓰면 10점.

- 식을 유도할 경우,

  i) 유도하는 과정이 올바른 경우 5점

  ii) 올바른 결과를 도출하면 추가 5점.

$\boxed{3}$ 표준 기저 벡터 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$를 대입하여 행렬을 구하면 5점.
($\boxed{2}$의 식이 틀려도, 행렬을 구하는 법을 알면 5점 모두 부여)

$\boxed{4}$ 모든 과정이 맞지만, 결과값을 잘못 구하면 −2점.

$\boxed{17.b.}$ 풀이 I.

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}\begin{bmatrix} -p^2+q^2+r^2 & -2pq & -2pr \\ -2pq & p^2-q^2+r^2 & -2qr \\ -2pr & -2qr & p^2+q^2-r^2 \end{bmatrix}$$

먼저, 주어진 평면 $ax+by+cz=0$ 과 $px+qy+rz=0$ 을 각각 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 과 $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ 으로 나누어주어도, 평면은 변하지 않으므로, 법벡터 (a,b,c), (p,q,r)을 단위 벡터라고 가정해도 무방하다.

한편, A와 B는 대칭행렬이므로, AB와 BA의 대각성분은 같다.

$(\Leftarrow)$ $ap+bq+cr=0$.

$[AB=BA \Leftrightarrow AB-BA=0 \Leftrightarrow (AB)_{ij}-(BA)_{ij}=0,\ 1\le i,j\le 3]$ $(*)$

$$\left.\begin{aligned}
(AB)_{12}-(BA)_{12} &= 4(aq-bp)(ap+bq+cr)=0 \\
(AB)_{13}-(BA)_{13} &= 4(bp-aq)(ap+bq+cr)=0 \\
(AB)_{23}-(BA)_{23} &= 4(br-cq)(ap+bq+cr)=0 \\
(AB)_{31}-(BA)_{31} &= 4(cp-ar)(ap+bq+cr)=0 \\
(AB)_{32}-(BA)_{32} &= 4(cq-br)(ap+bq+cr)=0
\end{aligned}\right\}(\bullet)$$

따라서, $AB=BA$.

$(\Rightarrow)$ $AB=BA$.

$(*)$에 의해, $(\bullet)$이 성립한다. 이제, $ap+bq+cr\neq 0$ 이라고 하자.

$(\bullet)$에 의해, $aq=bp$, $bp=aq$, $br=cq$, $cp=ar$, $cq=br$ 이다.

이제, $a\neq 0$ 이라고 가정하면, $a(p,q,r)=p(a,b,c)$ 가 성립한다.

이는 (p,q,r)과 (a,b,c)가 일차독립인 가정에 모순.

따라서, $ap + qb + cr = 0$ 이다. □

<u>채점기준</u> (20점)

$\boxed{1}$ $(AB)_{ij}$, $(BA)_{ij}$ $(i \neq j)$를 한 개 이상 완벽하게 계산하여 결론을 내면 20점.

$\boxed{2}$ $(\Rightarrow)$ 방향 결론에서 일차독립 언급이 없을 시 -5점.

$\boxed{3}$ B를 구한 것은 부분 점수 없음.

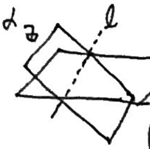
$\boxed{4}$ 이외에 서술에 부족함이 있다고 판단될시 -5점.
(e.g. 계산의 완결성)

7-(b)

풀이 II.

$ax+by+cz=0$이 나타내는 평면을 α, $px+qy+rz=0$ 이 나타내는 평면을 β 라고 두면, (a,b,c) 와 (p,q,r) 이 일차독립이기 때문에 α 와 β는 평행하지 않다.

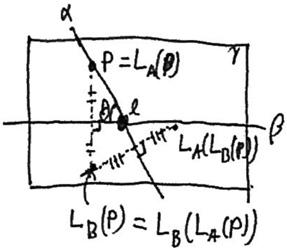
따라서 α와 β는 만나므로, 아래 (그림)과 같이 교선 l을 가진다.



(그림1)

이때, α와 β가 이루는 각의 크기를 $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$로 잡자.
그리고 α에 대한 대칭변환을 L_A, β에 대한 대칭변환을 L_B로 두자.

(Case 1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. α 위의 l 위에 있지 않은 점 P를 하나 고정하자. 이제 l에 수직이고 점 P를 지나는 평면 γ를 생각해보면, $L_A(P)$, $L_B(P)$, $L_B(L_A(P))$, $L_A(L_B(P))$가 모두 γ 위에 있고, 특히 아래 (그림2)와 같이 $L_B(L_A(P))$와 $L_A(L_B(P))$는 평면 α를 기준으로 서로 반대편에 있어 다른 점이 된다. 즉, $L_B(L_A(P))\neq L_A(L_B(P))$인 점 P를 찾았으니 $BA\neq AB$ 이다. +10

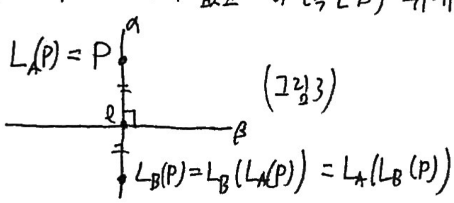


(그림2) +5

(Case 2) $\theta=\frac{\pi}{2}$.

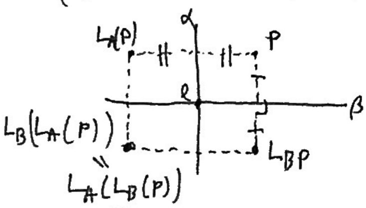
(I) P가 l 위에 있을 경우, l은 L_A와 L_B에 불변이니 $L_A(L_B(P))=L_B(L_A(P))$ 이다.

(II) P가 l 위에 없고 α (혹은 β) 위에 있을 경우 (case1)에서와 같이 그림을 그려보면 아래 (그림3)과 같이 $L_B(L_A(P))=L_A(L_B(P))$를 얻는다.



(그림3)

(III) 마지막으로 $P\notin\alpha\cup\beta$ 인 경우, 마찬가지로 아래(그림4)와 같은 방법으로 마찬가지 결론을 얻는다.



(그림4) +5

따라서 모든 P에 대해 $L_B(L_A(P))=L_A(L_B(P))\Rightarrow AB=BA$ 이다. +10

이제 (case1)과 (case2)를 종합하면, $AB=BA\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\alpha\perp\beta\Leftrightarrow ap+bq+cr=0$. □

(b) 풀이 Ⅲ

$V=(a,b,c) \quad w=(p,q,r)$

일때 평면 $ax+by+cz=0$ 에 대한 대칭변환 T에 대하여

$T(X)= X-2\cdot\frac{V\cdot X}{V\cdot V}V$ 가 모든 $X\in\mathbb{R}^3$ 에 대하여 성립한다.

마찬가지로 $S(X)= X-2\cdot\frac{w\cdot X}{w\cdot w}w$ 가 모든 $X\in\mathbb{R}^3$ 에 대하여 성립한다

$$T\circ S(X)= S(X)-2\cdot\frac{v\cdot S(X)}{v\cdot v}v$$
$$= X-2\frac{w\cdot X}{w\cdot w}w-2\cdot\frac{v\cdot(X-2\frac{w\cdot X}{w\cdot w}w)}{v\cdot v}v$$
$$= X-2\frac{w\cdot X}{w\cdot w}w-2\frac{v\cdot X}{v\cdot v}v+4\frac{(v\cdot w)(w\cdot X)}{(v\cdot v)(w\cdot w)}v$$

$$S\circ T(X) = T(X)-2\cdot\frac{w\cdot T(X)}{w\cdot w}w$$
$$= X-2\cdot\frac{v\cdot X}{v\cdot v}v-2\frac{w\cdot(X-2\frac{v\cdot X}{v\cdot v}v)}{w\cdot w}w$$
$$= X-2\frac{v\cdot X}{v\cdot v}v-2\frac{w\cdot X}{w\cdot w}w+4\frac{(v\cdot w)(v\cdot X)}{(v\cdot v)(w\cdot w)}w$$

$AB=BA \Longleftrightarrow S\circ T=T\circ S$ 이므로 $S\circ T(X)=T\circ S(X)$ 에서 다음 식을 얻는다

$\Leftrightarrow (v\cdot w)(w\cdot X)v=(v\cdot w)(v\cdot X)w$ 는 모든 X에 대하여 성립해야 한다 Ⓐ

$AB=BA$ 이라면, $X=v$일때 $(v\cdot w)(w\cdot v)v=(v\cdot w)(v\cdot v)w$

v, w가 일차독립 이므로 $(v\cdot w)^2=(v\cdot w)(v\cdot v)=0$

$\Rightarrow v\cdot w=0 \quad \Rightarrow \quad ap+bq+cr=0.$

역으로, $ap+bq+cr=0 \Rightarrow v \cdot w = 0$

$\Rightarrow AB = BA \quad (\because ⊛)$

10점

(⟹)

① 선형결합식까지 잘 쓰면 5점.

② 결론에 "일차독립" 언급과 함께 증명 완성시 5점

#8.

sol1) $\det(a\times b,\ b\times c,\ c\times a) \neq 0$ 임을 보이자.

$$\det(a\times b,\ b\times c,\ c\times a)$$

$$= [(a\times b)\times(b\times c)]\cdot(c\times a) \quad +5점$$

$$= [((a\times b)\cdot c)\,b - ((a\times b)\cdot b)\,c]\cdot(c\times a)$$

$$= [(a\times b)\cdot c]\,b\cdot(c\times a) \quad +10점$$

$$= \{\det(a,b,c)\}^2$$

a,b,c가 일차독립임으로 $\det(a,b,c) \neq 0$.

따라서 $\det(a\times b,\ b\times c,\ c\times a) \neq 0$

$\therefore$ $a\times b,\ b\times c,\ c\times a$ 는 일차독립 $\quad$ +5점

sol2)

$0 = x(a\times b) + y(b\times c) + z(c\times a)$ $\quad (x,y,z\in\mathbb{R})$ 이라 하자. +5점 …(1)

$$c\cdot 0 = c\cdot[x(a\times b) + y(b\times c) + z(c\times a)]$$

$$= x\, c\cdot(a\times b) = x\det(a,b,c).$$

a,b,c가 일차독립이므로, $\det(a,b,c)\neq 0$. $\quad \therefore x=0$ $\quad$ +10점

비슷한 논리로 $y=0,\ z=0$ 이다.

$\therefore (x,y,z)=(0,0,0)$ 이므로 일차독립의 정의에 의해 $a\times b,\ b\times c,\ c\times a$ 는 일차독립

+5점

*특이사항.

- …(1) 뒤 충분한 논리가 없으면 점수없음.
- 논리가 맞은 풀이면 인정 (모범답안과 달라도)
- 기하적으로만 해석한 풀이는 0점. (부분적으로 올바르게 이용시에는 인정)

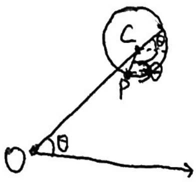
- 자명하지 않은 계산과정 생략시 0점.
(특히 좌표를 잡고 푸는 경우)
- 자명하지 않은 기하적 ~~풀이~~ 논리 전개는 0점.

9. (a) 15점

$\vec{X}(\theta)$: 점 P의 위치벡터, C : 작은 원의 중심

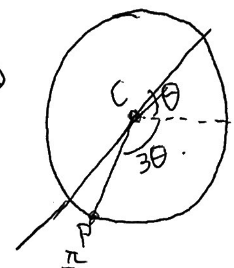
$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$

$\vec{OC} = (3\cos\theta, 3\sin\theta)$ +5점, $\vec{CP} = (\cos(-3\theta), \sin(-3\theta)) = (\cos 3\theta, -\sin 3\theta)$ +10점



$\Rightarrow \vec{X}(\theta) = \vec{OP} = (3\cos\theta + \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta)$

$= (4\cos^3\theta, 4\sin^3\theta)$



* $\vec{CP}$를 $+3\theta$, -4θ 등으로 구할 경우 10점 중 0점.

* $\vec{CP}$를 구할 때 사소한 계산 실수가 있으면 10점 중 8점

(b) 15점

곡선의 길이 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |X'(\theta)|\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta$ +5점

$|X'(\theta)| = \sqrt{(-3\sin\theta - 3\sin 3\theta)^2 + (3\cos\theta - 3\cos 3\theta)^2}$

$= \sqrt{18 + 18\sin\theta\sin 3\theta - 18\cos\theta\cos 3\theta}$

$= \sqrt{36 \cdot \frac{1-\cos 4\theta}{2}} = 6|\sin 2\theta|$ +5점

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |X'(\theta)|\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 2\theta\, d\theta = \left[-3\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$ +5점

* 극좌표를 이용하여 계산할 경우 $r(\theta)$를 정확히 명시하지 않으면 부분점수 없음 (0점).

* 답이 맞더라도 계산 과정에 오류가 있을 경우 부분점수 없음.

ex) $r(\theta)$가 스칼라 함수가 아니라 벡터함수인 경우

10번.

풀이 1.

S_1 : 바깥 큰고리  ,

S_2 : 작은 고리  ,

$0 \le \theta \le 2\pi$ 일 때, $1+2\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 이므로,

$0 \le \theta \le \frac{2}{3}\pi$ & $\frac{4}{3}\pi \le \theta \le 2\pi$ 일 때 $r \ge 0$ 이고,

$\frac{2}{3}\pi \le \theta \le \frac{4}{3}\pi$ 일 때 $r \le 0$ 이야.

(S_1 의 넓이) $= 2\cdot\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \left(\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times 2 = 2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

(S_2 의 넓이) $= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{2}\cdot r^2 d\theta = \pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 이므로

구하고자 하는 넓이는 $\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pi+3\sqrt{3}$ 이다.

---

1) 큰 고리와 작은 고리가 만들어지는 θ 구간 구하기 (5점.)

"$1+2\cos\theta=0$, $0<\theta<2\pi \Leftrightarrow \theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$" 와 같은 글이 쓰지 않아도 적분하는 과정에서 잘 드러나 있으면 5점.

θ 값을 잘 못 구한 경우, "$1+2\cos\theta=0$, $0<\theta<2\pi$" 로 놓고 구하려는 시도가 있으면 3점, 없으면 0점. (이 경우 2), 3) 에 대한 부분점수 없음.)

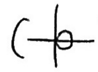
2-1) S_1 의 넓이를 구하는 식 (4점) 과 넓이를 제대로 계산하면 2점.
(12점)

S_2 〃 (4점) 〃 2점.

3) S_1-S_2 를 계산해서 정답을 잘 구하면 3점.

풀이 2.

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta - 2\cdot\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{2}\cdot r^2 d\theta = \pi+3\sqrt{3}.$$

($\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta$ 는 큰원의 넓이 () 와 작은 원의 넓이 () 를 더한것이다.

따라서 작은 원의 넓이인 $\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{2}\cdot r^2 d\theta$ 를 두번 빼야한다.)

---

1) 풀이 1과 동일. (5점)

2-2) " $\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta}_{①} - 2\cdot\underbrace{\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{2}\cdot r^2 d\theta}_{②}$ " 라고 잘 명시되어 있고,

①, ② 각각의 식을 잘 구하고 (4점), 계산을 잘하면 2점 씩. (총 12점.)

① − ② 라고 쓴 경우 최대 6점. (계산 실수가 있는 경우 4점)

① 만 있고 ② 에 대한 근거가 없는 경우 0 점.

3) 정답을 잘 계산하면 3점.

문제 11 모범답안

$X(t) = (t-\sin t,\ 1-\cos t,\ 4\cos(\frac{t}{2}))$ 이므로 $X(\pi) = (\pi, 2, 0)$ 을 만족한다.

$X'(t) = (1-\cos t,\ \sin t,\ -2\sin(\frac{t}{2})) \Rightarrow X'(\pi) = (2, 0, -2)$

$X''(t) = (\sin t,\ \cos t,\ -\cos(\frac{t}{2})) \Rightarrow X''(\pi) = (0, -1, 0)$. +10 ... (☆)

구하려는 접촉평면의 법선벡터는 $X'(\pi) \times X''(\pi) = (-2, 0, -2)$ 이고 +5

$(\pi, 2, 0)$을 지나므로, 접촉평면의 식은,

$$0 = (X'(\pi)\times X''(\pi)) \cdot ((x,y,z) - X(\pi))$$
$$= (-2, 0, -2)\cdot(x-\pi,\ y-2,\ z)$$
$$= -2x + 2\pi - 2z$$

이다. 정리하면 $x + z = \pi$. +5

다른 풀이 1

접촉평면의 정의를 활용하여, $\{X(\pi) + aX'(\pi) + bX''(\pi) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(\pi + 2a,\ 2-b,\ -2a) : a, b \in \mathbb{R}\}$ 로 구할 수 있다.

다른 풀이 2.

접촉평면을 구할 때, $\det\begin{pmatrix} x-\pi & 2 & 0 \\ y-2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$ 으로 놓고 계산해도 된다.

☆ ① $X(\pi) = (\pi, 2, 0)$ 명시 or $t=\pi$임을 이용함.

② $X'(t)$를 제대로 계산.

③ $X''(t)$를 제대로 계산.

①, ②, ③ 모두 만족하면 10점.

①, ②, ③ 중 2가지만 만족하면 5점.

①, ②, ③ 중 1가지 이하 만족하면 0점.

12번.

누적 점수표

① 3점: 호를 매개화한 경우. (극좌표 or 그래프)

② 7점: 질량구하는 식이 맞고, 질량계산이 맞는 경우.

③ 5점: 질량중심식의 분자부분 식을 옳게 쓴 경우.

④ 5점: 계산 식에서 값이 맞는 경우.

누적 그래프

① 3점

② 10점 ③ 8점

①+②+③ 15점

④ 20점.

Sol) $C(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ ①, $(0 \le \theta \le \pi)$ $\left(\text{or } C(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \right)$.

$$m = \int_X \mu \, ds = \underbrace{\int_0^{\pi} \theta \, d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta^2 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2}_{②}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \cdot \int_X \mu y \, ds = \frac{1}{m} \underbrace{\int_0^{\pi} \theta \sin\theta \, d\theta}_{③}$$

①, ②, ③

$$\int_0^{\pi} \theta \sin\theta \, d\theta = \left[-\theta\cos\theta \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos\theta \, d\theta$$

$$= \pi + 0 + \left[\sin\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi.$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\pi}{\pi^2/2} = \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{④}$$

13. (a) 모범답안

곡선 $X(t)$ 의 곡률은 다음 곡률벡터

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)' \quad \cdots\cdots \boxed{\text{기준 1}}$$

의 크기이다. $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ 이므로

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2},\ \cos\frac{t}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t}{2},\ -\sin\frac{t}{2}\right)$$

$\boxed{\text{기준 2}}$

이다. $t = \pi$ 일 때는

$$\vec{\kappa}(\pi) = \left(0,\ -\frac{1}{4}\right).$$

따라서 $\kappa(\pi) = |\vec{\kappa}(\pi)| = \frac{1}{4}$ 이다.

$\boxed{\text{기준 3}}$

---

13. (a) 의 채점기준

기준 1 (5점): 곡률벡터 공식을 명시

기준 2 (5점): 주어진 $X(t)$ 를 대입하여 $\vec{\kappa}(t)$ 를 t 에 대한 식으로 나타냄

기준 3 (5점): 정답 $\frac{1}{4}$ 을 얻음.

※ 곡률공식 $\kappa(t) = \dfrac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^3}$ 을 써도 정답인정.

※ 기준 2가 틀렸는데 기준 3이 맞았으면 (우연한 정답이므로) 기준 3도 0점처리.

#13. (b) 모범답안

곡선 $X(t)$ 의 t 에서의 접촉원의 중심을 $C(t)$ 라 하면

$$c(t) = X(t) + \frac{1}{\kappa(t)^2}\vec{\kappa}(t) \quad \boxed{\text{기준 1}}$$

이다. (a) 의 결과로부터, $t = \pi$ 이면

$$c(\pi) = (\pi, 2) + 16\cdot\left(0, -\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= (\pi, -2) \quad \boxed{\text{기준 2}}$$

이다.

---

13. (b) 의 채점기준

기준 1 (5점) : 접촉원의 중심의 정의를 명시

기준 2 (10점)

- Case 1. (a) 에서 곡률벡터를 구해서 (b) 에도 이용하여 정답을 낸 경우.
- Case 2. (b) 에서 처음으로 곡률벡터를 계산하여 정답을 낸 경우.

※ Case 1, Case 2 에서, ~~(a) 의 공식에 대~~ 답만 틀리면 5점이다.