

**수학 1 기말고사**  
(2019년 7월 29일 오후 6:00-8:00)

|     |     |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

( 연습용 여백 )

**문제 1** [15점] 두 점  $(0, 0, -1)$ 과  $(5, 5, 4)$ 를 지나는 직선  $\ell$ 을 평면  $2x + y - 2z = 5$ 에 정사영한 직선의 방정식을 구하시오.

**문제 2** [20점] 삼차원 공간의 세 점  $P = (2, 1, 0)$ ,  $Q = (1, 0, 1)$ ,  $R = (5, 7, 3)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 세 점  $P, Q, R$ 을 지나는 평면  $H$ 의 방정식을 구하시오.
- (b) (5점) 삼각형  $PQR$ 의 넓이를 구하시오.
- (c) (10점) 직선  $2x - 1 = y + 2 = 2z - 3$ 과 평면  $H$ 가 만난다면 그 교점을 구하고, 만나지 않는다면 둘 사이의 최단거리를 구하시오.

**문제 3** [15점] 두 행렬식이

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 3, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 7$$

로 주어져 있을 때 다음의 행렬식을 구하시오.

- (a) (5점)  $\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 6 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$
- (b) (5점)  $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + b_3 & a_2 + b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- (c) (5점)  $\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 2 & a_2 & b_2 \\ 3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$

**문제 4** [25점]  $n$ 차 정사각행렬  $A, B$ 와 단위행렬  $I_n$ , 그리고 영행렬  $O$ 에 대하여 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F를 표시하고 간단한 이유를 쓰시오. (단,  $n$ 은 2 이상의 자연수)

- (a) (5점)  $AB$ 가 가역행렬이면  $A$ 는 가역행렬이다.
- (b) (5점)  $A^2 = A$ 이면  $A = I_n$  또는  $A = O$ 이다.
- (c) (5점)  $A^5 = A^3 = I_n$ 이면  $A = I_n$ 이다.
- (d) (5점)  $\det(AB^t + B^t) = 1$ 이면  $B$ 는 가역행렬이다.
- (e) (5점) 실수  $k$ 에 대하여  $\det(kA) = k(\det A)$ 이다.

|     |     |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

**문제 5** [30점]  $\mathbb{R}^3$ 의 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여,  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음과 같이 정의될 때 물음에 답하시오.

( 연습용 여백 )

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

(a) (10점)  $L$ 이 선형사상임을 보이시오.

아래 문항 (b)~(d)에서는  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ 일 때 물음에 답하시오.

(b) (10점)  $L$ 에 대응되는 행렬  $A$ 를 구하시오.

(c) (5점)  $\det A$ 를 구하시오.

(d) (5점) 네 점  $O(0, 0, 0)$ ,  $P(1, -2, -3)$ ,  $Q(2, 1, -4)$ ,  $R(3, 4, 1)$ 에 대하여,  $L(O)$ ,  $L(P)$ ,  $L(Q)$ ,  $L(R)$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

**문제 6** [20점] 원점을 지나지 않는 미분가능한 곡선  $X(t) = (0, 0, z(t))$ 와  $Y(t) = (x(t), y(t), \sqrt{x^2(t) + y^2(t)})$ 에 대하여 다음을 보이시오.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \det \begin{pmatrix} X(t) \cdot X(t) & X(t) \cdot Y(t) \\ Y(t) \cdot X(t) & Y(t) \cdot Y(t) \end{pmatrix} \right) \\ = \det \begin{pmatrix} X(t) \cdot X'(t) & X(t) \cdot Y'(t) \\ -Y(t) \cdot Y'(t) & Y(t) \cdot Y'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**문제 7** [20점] 점  $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 에서 곡선  $X$ 의 접축평면을 구하시오.

$$X(t) = \left( e^{\tan \frac{t}{2}} \tan^2 \frac{t}{2}, e^{\tan \frac{t}{2}} \tan \frac{t}{2}, \tan \frac{t}{2} \right)$$

**문제 8** [20점] 극좌표로 주어진 좌표평면상의 곡선

$$r = 1 + \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

를 점  $(2, 0)$ 에서부터 켤 호의 길이  $s$ 로 매개화하면 다항식  $p(s), q(s)$ 에 대하여  $\tilde{X}(s) = (p(s), q(s)^{\frac{1}{2}})$ 가 된다고 할 때,  $s$ 의 범위와  $p(s), q(s)$ 를 구하시오.

**문제 9** [15점] 나선  $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 에서 밀도함수가  $f(t) = t^2$ 일 때, 구간  $-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 나선의 질량과 질량 중심을 구하시오.

**문제 10** [20점] 타원

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

위의 점  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 곡률벡터와 접축원의 방정식을 구하시오.