2019-여름 수학1 기말고사 채점기준

#1.

점 $(0, 0, -1)$을 평면 $2x+y-2z=5$에 정사영하면 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ - ①,

점 $(5, 5, 4)$은 $\left(\frac{41}{9}, \frac{43}{9}, \frac{40}{9}\right)$ - ② 이 된다.

직선 l의 방향벡터 $(1, 1, 1)$은 (상수차이를 무시하면 $(7, 8, 11)$) - ③, 평면과 직선 l의 교점은 $(3, 3, 2)$ - ④ 이다.

∴ 구하려는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-2}{11}$$ 가 된다.

①, ②, ③, ④ 중 2가지를 옳게 구한 경우 각 5점

직선의 방정식을 옳게 구한 경우 5점.

2

(a) $\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{PR} = (3, 6, 3)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-9, 6, -3)$ 이 법선 벡터가 된다. +2

$\therefore H : (-9, 6, -3) \cdot (x-2, y-1, z) = 0$

$$3x - 2y + z = 4$$ +3

(b) $\triangle PQR = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| = \frac{\sqrt{81+36+9}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$ +5

(c)

Sol1. 직선의 방향 벡터 $(1, 2, 1)$ 과
평면 H 의 법선 벡터 $(3, -2, 1)$ 을 내적하면
$(1, 2, 1) \cdot (3, -2, 1) = 0$ 이므로 직선은 평면에 속하거나
평행하다. +5

직선 위의 한 점 $(1, -1, 2)$ 와 평면 H 사이의 거리를
구하면 $\frac{|3+2+2-4|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$ 이므로 만나지 않고,

최단거리는 $\frac{3}{14}\sqrt{14}$ 이다. +5

Sol 2. 직선 $2x-1=y+2=2z-3$을

매개 변수로 나타내면 $\left(\frac{t+1}{2}, t-2, \frac{t+3}{2}\right)$ 이다.

이를 평면 H의 방정식에 대입하면

$$3\left(\frac{t+1}{2}\right)-2(t-2)+\left(\frac{t+3}{2}\right)-4=0$$

정리하면 $7-4=0$ 이 되어서 모순

∴ 직선과 H는 평행하다. +5

직선과 평면의 최단거리를 구하면

$$\frac{\left|3\left(\frac{t+1}{2}\right)-2(t-2)+\left(\frac{t+3}{2}\right)-4\right|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$ 이다.

+5

#3.

(a) $\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 3$

$\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 5 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 7$

$\therefore \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 6 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 5 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 10.$

(b) $\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1+b_3 & a_2+b_3 & a_3+b_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix}$

$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = -2\cdot 3 = -6.$

(c) $\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 2 & a_2 & b_2 \\ 3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left[\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right]$

$= \frac{1}{2}(7-3) = 2.$

※ 부분점수 X

#4.

(a) AB가 가역행렬 $\Rightarrow \det(AB) \neq 0$

$\Rightarrow \det(A)\det(B) \neq 0$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ A는 가역행렬.

$\boxed{\therefore \text{True}}$

(b). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\therefore \text{False}}$

(c) $A^5 = A^3 = I_n \Rightarrow A^5 = A^3 \cdot A^2$ 이므로 $A^2 = I_n$

$A^3 = A^2 \cdot A$ $\quad \therefore A = I_n$ $\quad \boxed{\therefore \text{True}}$

(d). $\det(AB^t + B^t) = \det((A+I)B^t) = \det(A+I)\det(B^t)$

$\therefore \det(B^t) \neq 0$ 인데, $\det(B) = \det(B^t)$ 이므로 $\det(B) \neq 0$

따라서 B는 가역행렬이다. $\boxed{\therefore \text{True}}$

(e) $\det(kA) = k^n \det(A)$ $(n \geq 2)$ $\boxed{\therefore \text{False}}$

∘ 채점기준

– 부분점수 없음. 이유가 없지 않으면 오답처리.

#5.

(a) $L(x) = (a\times x)\times b + a\times(x\times b)$

$= 2(a\cdot b)x - (a\cdot x)b - (b\cdot x)a$

① $L(x+cy) = (a\times(x+cy))\times b + a\times((x+cy)\times b)$

$= (a\times x + c\, a\times y)\times b + a\times((x\times b) + c(y\times b))$

$= [(a\times x)\times b + a\times(x\times b)]$

$+ c[(a\times y)\times b + a\times(y\times b)] = L(x) + cL(y)$

② $L(x+cy) = 2(a\cdot b)(x+cy) - (a\cdot(x+cy))b - (b\cdot(x+cy))a$

$= [2(a\cdot b)x - (a\cdot x)b - (b\cdot x)a] + c[2(a\cdot b)y - (a\cdot y)b - (b\cdot y)a]$

$= L(x) + cL(y)$

- 채점기준

스칼라곱이 보존된다와 덧셈이 보존된다를 언급하고 보인경우

각 5점.

(b) ① $a = (1,0,1),\ b = (1,0,0)$

$(a\times(x,y,z))\times(1,0,0) + (1,0,1)\times((x,y,z)\times(1,0,0))$

$= (-y,\ x-z,\ y)\times(1,0,0) + (1,0,1)\times(0,z,-y)$

$= (0,\ +y,\ z-x) + (-z,\ y,\ z) = (-z,\ 2y,\ 2z-x)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

② $A = \left(L(e_1) \mid L(e_2) \mid L(e_3) \right)$

$L(e_1) = (0, 0, -1)$, $L(e_2) = (0, 2, 0)$ $L(e_3) = (-1, 0, 2)$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

· 채점기준.

①의 경우 x, y, z 좌표 각 2점.

②의 경우 $L(e_1)$, $L(e_2)$, $L(e_3)$ 각 2점

행렬로 옮겨쓰는 것 4점 ($L(e_i)$와 좌표의 값이 틀려도 인정)

*단, A^T로 작성한 경우 0점

(c) $\det(A) = (-1) \times 2 \times (-1) \times \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2$.

· 채점기준

부분점수 없음. A를 잘못 계산한 경우도 0점.

(d) $\mathrm{Vol}(L(O), L(P), L(Q), L(R)) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(O, P, Q, R)$

(Vol(XYZW)는 사면체 XYZW의 부피라고 하자.)

$\underline{\underline{6}} \cdot \mathrm{Vol}(O, P, Q, R) = \left| \det\left(P-O \mid Q-O \mid R-O\right) \right| = \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right| = 30$

$\therefore \mathrm{Vol}(L(O), L(P), L(Q), L(R)) = 10$

· 채점기준

Vol(OPQR)만 계산하거나, 사면체의 부피가 $\frac{1}{6}$ 평행육면체의 부피임을 실수하여 $1/6$하지 않은 경우 2점 인정.

#6

$$\det\begin{pmatrix} X(t)\cdot X(t) & X(t)\cdot Y(t) \\ Y(t)\cdot X(t) & Y(t)\cdot Y(t) \end{pmatrix}$$

$$= |X(t)|^2 |Y(t)|^2 - |X(t)\cdot Y(t)|^2$$

$$= \left(z(t)\right)^2 \left(x^2(t) + y^2(t)\right)$$ 이므로

LHS $= 2z(t)\, z'(t)\, (x^2(t) + y^2(t)) + z^2(t)\, (2x(t)\, x'(t) + 2y(t)\, y'(t))$

RHS $= |X(t)|^2 (Y(t)\cdot Y'(t)) + (X(t)\cdot X'(t))\, |Y(t)|^2$ 이며

$Y'(t) = \left(x'(t),\ y'(t),\ \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}(x(t)\, x'(t) + y(t)\, y'(t))\right)$

$Y(t)\cdot Y'(t) = 2x(t)\, x'(t) + 2y(t)\, y'(t)$

$X(t)\cdot X(t) = z(t) \times z'(t)$ 이므로

RHS $= z^2(t)\, (2x(t)\, x'(t) + 2y(t)\, y'(t)) + 2z(t)\, z'(t)\, (x^2(t) + y^2(t))$

따라서 좌변과 우변은 같다.

+20.

※ 부분 점수 없음

#7

$X(t) = \left(e^{\tan\frac{t}{2}} \tan^2\frac{t}{2},\ e^{\tan\frac{t}{2}} \tan\frac{t}{2},\ \tan\frac{t}{2}\right)$

$u = \tan\frac{t}{2}$라 두자.

$\Rightarrow \tilde{X}(u) = (u^2 e^u, ue^u, u)$

곡선의 접촉평면은 재매개화에 의해 바뀌지 않으므로

$u = \tan\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) = 1$ 에서 $\tilde{X}$의 접촉평면을 구하면 된다.

$\Rightarrow \tilde{X}'(u) = \left((2u+u^2)e^u, (1+u)e^u, 1\right),$

$\tilde{X}''(u) = \left((2+4u+u^2)e^u, (2+u)e^u, 0\right)$

$\Rightarrow \tilde{X}(1) = (e, e, 1),$ +5

$\tilde{X}'(1) = (3e, 2e, 1)$ +5

$\tilde{X}''(1) = (7e, 3e, 0)$ +5

$\Rightarrow \vec{n} = \tilde{X}'(1) \times \tilde{X}''(1) = (-3e, 7e, -5e^2)$

$\Rightarrow$ 평면의 방정식

$(-3e, 7e, -5e^2) \cdot (x-e, y-e, z-1) = 0$

$\Rightarrow 3x - 7y + 5ez = e$ +5

채점 기준

- $X(\frac{\pi}{2})$, $X'(\frac{\pi}{2})$, $X''(\frac{\pi}{2})$ 각 5점 (재매개화 여부와 상관 없음), 접촉평면의 방정식 5점

- $X(\frac{\pi}{2})$, $X'(\frac{\pi}{2})$, $X''(\frac{\pi}{2})$ 가 틀렸어도 구한 벡터들로 평면의 방정식을 맞게 구한 경우 5점

8

$r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$\Rightarrow r' = -\sin\theta$

$$\Rightarrow s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^\theta \sqrt{(1+\cos t)^2 + (-\sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\theta 2\cos\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 4\sin\frac{\theta}{2}$$ +5

$0 \leqq \theta \leqq \pi \Rightarrow 0 \leqq 4\sin\frac{\theta}{2} \leqq 4$

$\Rightarrow 0 \leqq s \leqq 4$ +5

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{s}{4} \Rightarrow \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2 \times \frac{s}{4}\sqrt{1-\frac{s^2}{16}} = \frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{16}},$

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{s^2}{8}$

$\Rightarrow p(s) = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta = \left(2-\frac{s^2}{8}\right)\left(1-\frac{s^2}{8}\right),$ +5

$q(s)^{\frac{1}{2}} = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta = \left(2-\frac{s^2}{8}\right)\frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{16}}$

$$= s\left(1-\frac{s^2}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow q(s) = s^2\left(1-\frac{s^2}{16}\right)^3$ +5

채점기준

- $S(\theta)$, S의 범위, $p(s)$, $q(s)$ 각 5점

- $p(s)$, $q(s)$를 θ로 나타내거나, arcsin 등을 사용해서 다항식 꼴로 나타내지 못한 경우 점수 없음

9.

$X'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 1)$ 이므로 $|X'(t)| = \sqrt{2}$ 이다

따라서 나선의 질량 $= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2}t^2\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$ (3점)

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\cdot t^2\cdot\sqrt{2}\,dt = -\frac{6}{\pi^2} \quad (4점)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cdot t^2\sqrt{2}\,dt = 0 \quad (4점)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot t^2\sqrt{2}\,dt = 0 \quad (4점)$$

<채점기준>.

- 나선의 질량 이 틀리더라도 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 의 정의 에 따라 잘 구한 경우는 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$의 점수 인정.
(단. $\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$의 정의를 잘못써서 구한경우 점수 없음.)

- 곡선의 대칭성 과 밀도함수의 대칭성을 이용하여 $\bar{y}=0$. $\bar{z}=0$을 구한 경우 도 점수 인정.

- 대칭성에 대한 틀린논리를 사용한 경우 점수 없음.

#10

$x^2+4y^2=1$ 위의 점 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$에서 곡률벡터와 접촉원의 방정식 = ?

sol) $X(t)=\left(\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$ 로 매개화하자.

$\left(0,\frac{1}{2}\right)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)$

곡률 = $\dfrac{\sqrt{|X'|^2|X''|^2-(X'\cdot X'')^2}}{|X'|^3}$

$$\begin{cases} X'(t)=\left(-\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right) \Rightarrow X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0) \\ X''(t)=\left(-\cos t, -\frac{1}{2}\sin t\right) \Rightarrow X''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\therefore$ 곡률 $\left|K\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$

$t=\frac{\pi}{2}$에서 $X(t)$의 법선벡터 $=(0,-1)$ $\left(X'\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{와 수직임 이용}\right)$

$\therefore$ 곡률벡터 $K\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(0,-1)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ $\lrcorner$ +10점 (부분점수 없음)

접촉원 반지름 길이 $=\dfrac{1}{\text{곡률}}=2$ $\lrcorner$ +5점

접촉원 중심 $=X\left(\frac{\pi}{2}\right)+\dfrac{K\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left|K\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2}=\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ 접촉원의 방정식 $x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4$ $\lrcorner$ +5점

<채점기준>

- 곡률벡터 $=\dfrac{1}{|X'|}\left(\dfrac{X'}{|X'|}\right)'$ 을 사용할 때. $\left|X'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$ 을 이용하여, $\dfrac{1}{|X'|}\left(\dfrac{X'}{|X'|}\right)'=\dfrac{1}{1}\left(\dfrac{X'}{1}\right)'=X''$ 사용하면 곡률벡터 점수 X
- 곡률벡터 $K(t)$가 틀렸어도 구한 $K(t)$로 접촉원의 방정식을 맞게 구한 경우 +10점.