

수학 및 연습 1 기말고사
(2018년 6월 9일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 삼차원 공간의 네 점 $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (1, -1, 1)$, $X = (2t, t, 2t)$ 에 대하여 \overrightarrow{XA} , \overrightarrow{XB} , \overrightarrow{XC} 가 일차 종속이 되도록 하는 실수 t 의 값을 구하시오.

문제 2 [20점] 삼차원 공간에서, 두 평면 $2x - y + z = 1$, $y + z = 0$ 의 교선과 평행하고 직선 $2x = 6y - 6 = 3z$ 를 포함하는 평면의 방정식을 구하시오.

문제 3 [20점] 두 선형사상 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 와, 사상 $f = g \circ h$ 가 다음을 만족한다.

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

이때 h 에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 4 [20점] 삼차원 좌표공간에서, 점 $X = (x_1, x_2, x_3)$ 에서 평면 $x + y + z = 0$ 에 내린 수선의 발을 Y 라 할 때, 아래 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $L(X) = Y$ 로 정의한 사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 선형사상임을 보이시오.
- (b) (10점) 선형사상 L 에 대응하는 행렬 A 를 구하고, A^{10} 을 구하시오.

문제 5 [20점] 3×3 행렬 A 및 3×3 가역행렬 G 가 다음 등식을 만족한다고 할 때, 아래 물음에 답하시오.

$$GAG^{-1} + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- (a) (10점) $\det(A + I)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) 위 행렬 A 가 3×3 행렬 B 에 대해 다음 등식을 만족한다고 할 때, $\det(A + B)$ 를 구하시오.

$$A^2 + AB + A + B = I$$

문제 6 [20점] 삼차원 공간에서 점 $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 11)$ 을 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

문제 7 [20점] 좌표평면에서 다음 식으로 주어진 곡선에 대하여 아래 물음에 답하시오.

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 - y^2}$$

- (a) (10점) 곡선을 극좌표 (r, θ) 로 나타내고, xy -평면에 개형을 그리시오.
- (b) (10점) 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S 를 구하시오.

문제 8 [20점] 삼차원 공간 속의 곡선 $X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t)$ 의 $t = \pi$ 에서의 접선의 방정식 및 접축평면의 방정식을 구하시오.

문제 9 [20점] 삼차원 공간 속의 다음 곡선에 대하여 아래 물음에 답하시오.

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (a) (10점) t 에서의 속도 벡터와 가속도 벡터를 인접한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 t 에 관한 함수로 나타내시오.
- (b) (10점) $t = g(s) = 2 \sinh s$ 로 재매개화한 곡선 $\tilde{X} = X \circ g$ 에 대해 $|\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)|$ 의 최솟값을 구하시오.

문제 10 [20점] 좌표평면에 놓인 로그와선 $X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ($t \geq 0$)에 대하여 아래 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $X(t)$ 를 점 $X(0)$ 에서부터 잰 호의 길이로 매개화하시오.
- (b) (10점) 위 로그와선의 $t > 0$ 에서의 곡률 $\kappa(t)$ 는 다음 식을 만족함을 보이시오.

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}|X(t)|}$$